Pépinière académique de mathématiques
Stage des 24 et 25 février 2011
Élèves de terminale
présentés par leurs établissements
au Concours général

Organisation générale et emploi du temps

Jeudi 24 février			
	Groupe 1	**Groupe 2**	**Groupe 3**
10 heures à 11 h 45	**Algèbre et nombres AV**	**Géométrie et calcul CH**	**Équations BB**
12 heures à 12 h 45	**Repas**		
12 h 45 à 13 h 45	**Réflexions sur le calcul formel (RB)**		
13 h 45 à 15 h 25	**Équations BB**	**Algèbre et nombres AV**	**Géométrie et calcul CH**
15 h 35 à 17 heures	**Géométrie et calcul CH**	**Équations BB**	**Algèbre et nombres AV**
Vendredi 25 février			
9 h 30 à 10 h 30	**Inversion (PM)**		
10 h 30 à 12 h 15	**Géométrie des transformations AA**	**Fonctions CW & DPG**	**Suites & Arithmétique GD & MP**
12 h 15 à 13 h 15	**Repas**		
13 h 15 à 15 heures	**Suites & Arithmétique GD & MP**	**Géométrie des transformations AA**	**Fonctions CW & DPG**
15 h 10 à 17 heures	**Fonctions CW & DPG**	**Suites & Arithmétique GD & MP**	**Géométrie des transformations AA**

Intervenants : Claude DESCHAMPS (Olympiade française de mathématiques), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Monique TALEB (Lycée Hoche, VERSAILLES), Anne ALLARD (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Geneviève DELYON (Lycée Lakanal, SCEAUX), Maud PARTIER (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Christine WEILL (Lycée Dumont d'Urville, MAUREPAS), Danièle PERRET-GENTIL (Lycée Hoche, VERSAILLES), Richard BREHERET (Lycée Galilée, CERGY), Alexandra VIALE (Lycée Émilie de Breteuil, MONTIGNY LE BRETONNEUX), Michel OLIVIER (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE°
Responsables : Dominique BARTH, Mohamed KRIR (Université de Versailles Saint Quentin), Marie-Françoise BOURDEAU, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF (Inspection, Rectorat de Versailles),
Organisation : Frédérique CHAUVIN (Rectorat de Versailles), Florence GOEHRS (U.V.S.Q.)

Algèbre et théorie des nombres

Exercice 1

a. Trouver trois nombres entiers naturels a, b et c distincts ou non tels que $\frac{1}{4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

b. Déterminer tous les entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers naturels x_1, x_2, …, x_n tels que $1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+....+\frac{1}{x_n^2}$.

Concours général 1990

Exercice 2

a. Soit $\left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$x_0^3+x_1^3+...+x_n^3=\left(x_0+x_1+...+x_n\right)^2$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que :

$$x_0+x_1+...+x_n=\frac{m(m+1)}{2}.$$

b. Si n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose $S_{n,p}=1^p+2^p+...+n^p$.

Déterminer les entiers naturels non nuls p tels que, quel que soit l'entier naturel non nul p, $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

Concours général 1991 - Exercice 1

Exercice 3

Trouver tous les entiers x tels que le produit des chiffres de l'écriture décimale de x est égal à $x^2-10x-22$.

Olympiades internationales 1968

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers p tels que $50^n<7^p<50^{n+1}$.

a. Démontrer que pour tout n, I_n vaut 2 ou 3.

b. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels I_n vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

Concours général 1994 - Exercice 1

Exercice 5

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

A un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. (a) Etant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

   (b) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.

2. Etant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

Concours général 2007, exercice 2

Géométrie et calcul

Exercice 1

1. Soit u et v deux nombres complexes. Montrer que $|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|$.
2. Soit u_1, u_2, u_3, u_4 quatre nombres complexes. Montrer que :

$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| \leq |u_1 + u_2| + |u_1 + u_3|+|u_1 + u_4|+|u_2 + u_3|+|u_2 + u_4| + |u_3 + u_4|$

Concours général 1986

Exercice 2

a. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 z_2 = 1$ et $|z_1 - z_2| = 2$.

On désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives -1, 1, z_1 et z_2.

Montrer que le quadrilatère AM_1BM_2 est en général un trapèze isocèle dont on calculera la longueur des côtés non parallèles.

Préciser les cas particuliers.

b. Soit O_1 et O_2 deux points distincts du plan et (C_1), (C_2) les cercles de centres O_1, O_2 et de rayons $d\sqrt{2}$, où $2d$ désigne la longueur O_1O_2.

Deux points mobiles P et Q se déplacent respectivement sur les cercles (C_1) et (C_2) de façon que : $PQ = 2d$ et que les points P et Q soient sur la droite (O_1O_2) ou de part et d'autre de la droite (O_1O_2).

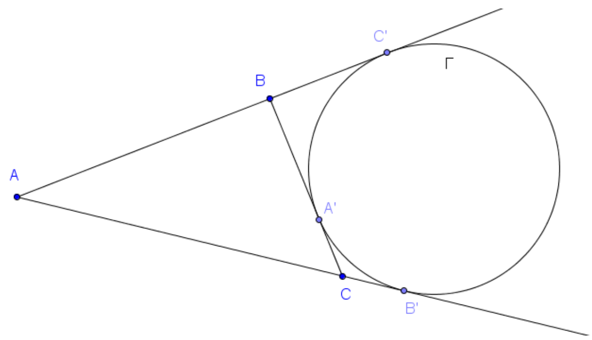
Démontrer que le milieu I du segment [PQ] décrit une ligne de niveau de l'application $f : M \mapsto MO_1 \cdot MO_2$ lorsque P décrit le cercle (C_1).

Concours général 1989 - Exercice 2

Exercice 3

Pour tout triangle ABC, on note :

1. Γ son cercle exinscrit dans l'angle du triangle de sommet A ;
2. A', B', C' les points de contact de Γ avec les droites (BC), (CA) et (AB) ;
3. S(ABC) l'aire de la portion du plan délimitée par les segments [AB'], [AC'] et l'arc C'A'B' de Γ.



Montrer qu'il existe des triangles ABC, de périmètre $2p$ donné, pour lesquels l'aire S(ABC) est maximale.

Pour un tel triangle, donner une valeur approchée, à un degré près, de la mesure de l'angle du triangle ABC de sommet A.

Concours général 1990 - Exercice 5

Exercice 4

Soit (C) un cercle de rayon 1.

a. Déterminer les triangles ABC inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ est maximale.

b. Déterminer les quadrilatères ABCD inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2$ est maximale.

Concours général 1992 - Exercice 2

Exercice 5

Le cercle circonscrit à un triangle ABC a pour rayon R et centre O, son cercle inscrit a pour rayon *r* et centre I.

Montrer que si ABC est isocèle alors $\mathrm{OI}=\sqrt{R(R-2r)}$

Olympiades internationales 1962

Exercice 6

Soit ABC un triangle. Si P est un point du plan, on note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).

Déterminer le point P pour lequel la quantité $\mathrm{BL}^2+\mathrm{CM}^2+\mathrm{AN}^2$ est minimale.

Concours général 1994

Équations

Exercice 1
Soit n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation $\cos^n x - \sin^n x = 1$.

Olympiades internationales 1961

Exercice 2
Existe-t-il $2n+1$ entiers naturels consécutifs a_0, a_1, …., a_{2n} rangés dans l'ordre croissant et vérifiant : $a_0^3 + a_1^3 + ... + a_n^3 = a_{n+1}^3 + a_{n+2}^3 + ... + a_{2n}^3$?
(on pourra étudier les variations de la fonction f définie sur **R** par
$f(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + ... + x^3 - (x+1)^3 - ... - (x+n)^3$ et étudier l'équation $f(x) = 0$)

Concours général 1993 - Exercice 2

Exercice 3
Soit P, Q, R et S des polynômes tels que $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2 R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$.
Prouver que 1 est racine de P.

Olympiades des Etats-Unis 1989

Exercice 4
Trouver tous les polynômes f à deux variables tels que :

(i) Pour tous réels t, x, y : $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, où n est un entier (f est un polynôme homogène de degré n) ;

(ii) Pour tous réels a, b, c : $f(a+b, c) + f(b+c, a) + f(c+a, b) = 0$;

(iii) $f(1,0) = 1$

Olympiades internationales 1975

Exercice 5
On écrit à la suite 21 nombres, de telle sorte que pour tout triplet (a, b, c) de nombres consécutifs de cette suite : $b = \dfrac{2ac}{a+c}$

Le premier nombre écrit est $\dfrac{1}{100}$, le dernier est $\dfrac{1}{101}\cdot$ Quel est le quinzième ?

Exercice 6
Le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 2x^3 + px + q$ a ses quatre racines réelles. Montrer qu'elles sont toutes inférieures à 2.

Exercice 7
Les quatre nombres réels a, b, c, d sont tels que $a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}$, $b = \sqrt{45 - \sqrt{21 - b}}$, $c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}}$, $d = \sqrt{45 - \sqrt{21 + d}}$. Montrer que $abcd = 2004$.

Géométrie des transformations

Exercice 1
Soit ABC un triangle, tel que AB > BC ; On note M et L les points de (AC) teles que (BM) soit une médiane du triangle et (BL) une bissectrice. La parallèle à (AB) – respectivement à (BC) – passant par M – respectivement par L – coupe (BL) – respectivement – (BM) en D – respectivement en E. Montrer que (ED) est perpendiculaire à (BL).

Exercice 2
Soit ABCD un quadrilatère convexe. On suppose que (AD) et (BC) ne sont pas parallèles et que AD = BC. Soit E un point de [AD] et F un point de [BC] tels que AE = CF. On note P, Q et R les points d'intersection respectifs de (AC) et (BD), de (AC) et (EF), de (BD) et (EF). Montrer que quand E varie les cercles circonscrits aux triangles PQR ont un point commun autre que P.

Exercice 3 Puissance d'un point par rapport à un cercle
Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R, M un point quelconque du plan et D une droite passant par M rencontrant le cercle Γ en A et B. Il s'agit de démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est indépendant de la droite D.

1. En considérant le point A′ de Γ diamétralement opposé à A. Démontrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.
Conclure. *Cet invariant est appelé puissance du point M par rapport au cercle* Γ et on le note $P_\Gamma(M)$.

2. Quel est l'ensemble des points du plan tels que $P_\Gamma(M) = 0$? $P_\Gamma(M) < 0$? $P_\Gamma(M) > 0$?
3. **Application** : On considère un triangle ABC d'orthocentre H ; Soit A', B' et C' les pieds des hauteurs de ce triangle, respectivement issues de A, B et C.
Démontrer que : HA × HA' = HB × HB' = HC × HC'.
4. Soit quatre points A, B, C et D, dont trois d'entre eux ne sont pas alignés et tels que (AB) et (CD) se coupent en M.
Démontrer que les points A, B, C, D sont cocycliques si, et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$

Exercice 4 Inversion géométrique
Soit O un point d'un plan $\mathscr{P}$ euclidien et k un réel non nul et $\mathscr{P}^*$ le plan privé de O.
Alors pour tout point M de $\mathscr{P}^*$, il existe un unique point M' de $\mathscr{P}^*$ tel que $\begin{cases} M' \in (OM) \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k \end{cases}$.
L'application f de $\mathscr{P}^*$ dans lui-même qui, à tout point M associe l'unique point M' de la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$, est appelée inversion de pôle O et de rapport k.

1. a) Soit M un point de $\mathscr{P}^*$ et M' = f(M). Déterminer f(f(M)). On dit que f est involutive.
   b) Quels sont les points invariants de f ?
2. Soit O, A et B trois points alignés du plan deux et deux distincts. Construire l'image D de C par l'inversion de pôle O qui transforme A en B.
3. Soit M et N deux points du plan, M' et N' leurs images par l'inversion f de pôle O et de rapport k. Exprimer la distance M'N' en fonction de k, MN, OM et ON.
4. a) *Image d'une droite* : Soit Δ une droite ne passant pas par O et H le projeté orthogonal de O sur Δ. Soit M un point de Δ. Démontrer que son image M' par f appartient au cercle de diamètre [OH'] où H' désigne l'image de H par f. Démontrer que f (Δ)=Γ.
   b) *Image d'un cercle* : Démontrer que l'image dans une inversion f d'un cercle Γ passant par le pôle d'inversion est une droite parallèle à la tangente en O à Γ.

Exercice 5 Théorème de Ptolémée

L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème de Ptolémée : « *un quadrilatère convexe est inscriptible, si et seulement si la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales* ».

Indication : On pourra considérer l'image des points B, C et D dans une inversion de pôle A et utiliser les résultats de l'exercice 2, question 3.

Exercice 6 Une formule pour calculer des aires planes

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soit p un plan, de vecteur normal unitaire $\vec{n}$. On pose $\vec{n}.\vec{k} = \cos\gamma$, et l'on désigne par $\mathscr{P}_0$ le plan de repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. On suppose dans cette question que $\mathscr{P}$ et le plan $\mathscr{P}_0$ ne sont pas parallèles.

Soit D la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_0$, A et B des points de D, C un point de $\mathscr{P}$, C' le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathscr{P}_0$ et enfin H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

(a) Justifier le fait que H est également le projeté orthogonal de C' sur la droite (AB).

(b) En déduire une relation entre les longueurs CH, C'H et l'angle γ, puis entre les aires S et S' des triangles ABC et ABC'.

Fonctions

Exercice 1 (Tchébychev)

Pour réaliser des approximations de fonctions à l'aide de fonctions polynômes, il faut bien maîtriser ces dernières qui partent vite vers l'infini.

1. À tout nombre réel α on associe la fonction f_α définie sur $[-1,1]$ par $f_\alpha(x) = x^3 - \alpha x$. Montrer qu'il existe un nombre positif $m(\alpha)$ tel que l'ensemble des images des éléments de l'intervalle $[-1,1]$ par *f* soit l'intervalle $[-m(\alpha), m(\alpha)]$.

2. Étudier la fonction $\alpha \mapsto m(\alpha)$. En déduire qu'il existe un nombre réel positif α_0 tel que pour tout réel *x* élément de $[-1,1]$: $\left|f_{\alpha_0}(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}$.

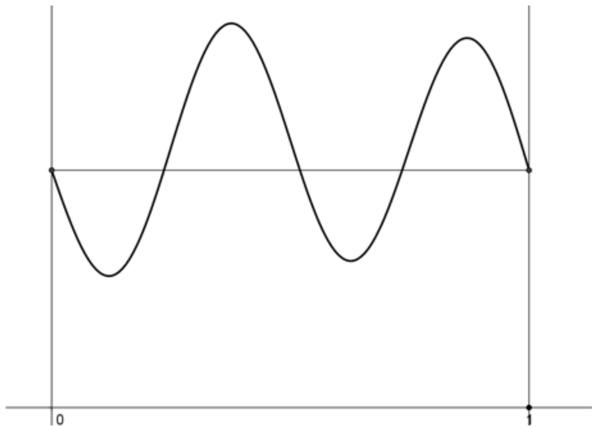
3. À tout couple (a,b) de nombres réels, on associe la fonction *f* définie sur $[-1,1]$ par:
$f(x) = ax^3 + bx$. Pour quelle valeur maximale de *a* peut on réaliser la condition : pour tout *x* élément de $[-1,1]$: $\left|f(x)\right| \leqslant 1$. Donner un exemple de fonction convenable.

4. Même question pour les fonctions $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exercice 2

Cordes horizontales de longueur donnée de la représentation graphique d'une fonction continue

1. On considère une fonction *f* continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, il existe un nombre c_n inférieur à $1 - \frac{1}{n}$ tel que $f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$.
On pourra pour cela considérer la fonction f_n définie par $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.
La représentation graphique de *f* a donc des cordes horizontales de longueur $\frac{1}{n}$, pour tout naturel non nul.



2. Montrer que si on remplace $\frac{1}{n}$ par α, où α n'est pas l'inverse d'un naturel, on n'obtient pas un théorème. Prendre par exemple la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right)$.

Exercice 3

Soit *f* une application de **N** dans **N** telle que, pour tout entier naturel *n*, $f(n+1) > f(f(n))$
Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $f(n) = n$

Olympiades internationales 1977

Exercice 4

Soit f une application de l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des réels.

On suppose que f est minorée et vérifie : pour tout entier relatif n, $f(n) \geq \frac{1}{2}\left[f(n+1)+f(n-1)\right]$.

Montrer que l'application f est constante.

Concours général 1993

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions de l'ensemble des nombres réels strictement positif dans lui-même qui vérifient les conditions suivantes :

(i) Pour tous réels strictement positifs x et y, $f\left(x f(y)\right) = y f(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Olympiades internationales 1983

Exercice 6

Soit $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle [0,1].

On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et, que pour tout x réel de l'intervalle $\left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions dans l'intervalle $[0,1]$.
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

Concours général 2005- exercice 2

Exercice 7

Déterminer toutes les applications f de l'ensemble $\mathbf{R}^+$ des réels positifs ou nuls dans lui-même vérifiant les trois propriétés :

(i) pour tous réels x et y de $\mathbf{R}^+$, $f\left(x f(y)\right) \cdot f(y) = f(x+y)$;

(ii) $f(2) = 0$;

(iii) pour tout $x \in [0,2[$, $f(x) \neq 0$.

Suites et Arithmétique

Exercice S1

Soit $\left(u_n\right)_{n\in N}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation :

$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$

Montrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation : $u_{n+p} = u_n$ ait lieu pour tout entier naturel n.

Concours général 1998 – Exercice 2

Exercice S2

Soit $\left(u_n\right)_{n\in N}$ la suite de nombres entiers définie par :

$u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{2n} = u_n \\ \text{et} \\ u_{2n+1} = 1 - u_n \end{cases}$

1. Calculer u_{1990}.
2. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.
3. Soit p un nombre entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$. Calculer u_N.

Concours général 1990 – Exercice 1

Exercice S3

Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 tels que $0 < u_0 < 1$ et $0 < u_1 < 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right)$.

1. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, la suite $\left(u_n\right)$ est monotone (on ne demande pas de déterminer n_0 qui dépend des valeurs initiales de u_0 et u_1.

Concours général 1992 – Exercice 4

Exercice A1

Soit a, b, c et d des entiers positifs impairs vérifiant les conditions :

(i) $a < b < c < d$;

(ii) $ad = bc$;

(iii) Il existe deux entiers k et m tels que $a + d = 2^k$ et $b + c = 2^m$.

Montrer que $a = 1$.

Olympiades internationales 1984

Exercice A2

Déterminer tous les couples $\left(m, n\right)$ d'entiers strictement positifs tels que $\frac{n^3+1}{mn-1}$ soit un entier.

Olympiades internationales 1994

Exercice A3

Trouver tous les entiers a, b et c tel que $1 < a < b < c$ et $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)$ soit un diviseur de $abc - 1$.

Olympiades internationales 1992

Exercice A4

Pour tout entier strictement positif *n*, on désigne par $S(n)$ le plus grand entier tel que, pour tout entier strictement positif $k \leqslant S(n)$, n^2 peut s'écrire comme la somme de *k* carrés parfaits.

a. Prouver que $S(n) \leqslant n^2 - 14$ pour tout $n \geqslant 4$.

b. Trouver un entier *n* tel que $S(n) = n^2 - 14$.

c. Prouver qu'il existe une infinité d'entiers *n* tels que $S(n) = n^2 - 14$.

Olympiades internationales 1992

Exercice A5

Soit *m* un entier naturel impair strictement supérieur à 2. Trouver le plus petit entier positif *n* tel que 2^{1989} divise $m^n - 1$.

Proposé à l'OIM 1989

Exercice A6

Soit *n* un entier tel que $n \geqslant 2$. Montrer que si $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier *k* tel que $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$, alors $k^2 + k + n$ est un nombre premier pour tout entier *k* tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 2$.

Olympiades internationales 1987

Exercice A7

Soit n un entier tel que $n > 6$. On considère les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ inférieurs à *n* et premiers avec *n* et on suppose que : $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1}$ et $a_2 - a_1 > 0$.
Prouver qu'alors *n* est un nombre premier ou une puissance de 2.

Olympiades internationales 1991