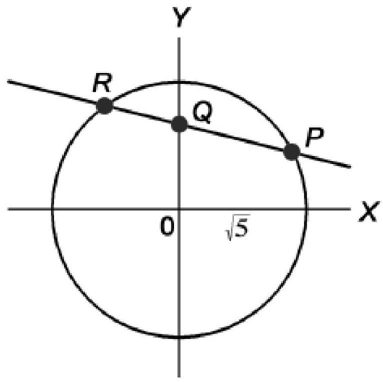
Calculs et ordre dans R

C1 Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 = 5$.



Posons Q $(0, u)$ où $u = \dfrac{m}{n}$ est un nombre rationnel.

Puisque P = (2, 1), la droite (PQ) a pour équation $y = u + \dfrac{1}{2}(1-u)x$. En substituant cette valeur de y dans l'´equation $x^2 + y^2 = 5$, on obtient, après calculs : $x = 2$ ou $x = \dfrac{2(u^2-5)}{5-2u+u^2}$.

Dans les deux cas, x est rationnel. Les valeurs de y correspondantes sont $y = 1$ et $y = \dfrac{5-10u+u^2}{5-2u+u^2}$.

On en déduit que les coordonnées de R sont rationnels.

Puisqu'il existe une infinité de rationnels compris entre $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ et qu'à deux points distincts Q et Q' sont associés deux points distincts R et R', il existe donc une infinité de points rationnels sur le cercle $\mathcal{C}$.

C2 300g à 34,3 euros le kg cela fait 0,3×34,3=10,29 euros à payer. Ne pas payer les centimes, c'est payer 10 euros, soit [10,29] euros ($[x]$ étant la partie entière du réel x).

Donc si x est le prix au kg des côtelettes, y le prix au kg du rôti, on obtient le système suivant : $\begin{cases}[0{,}75x]+[0{,}25y]=18\\ [0{,}25x]+[0{,}5y]=17\end{cases}$.

Posons $k = [0{,}25x]$. On en déduit que $x \in [4k;4(k+1)[$. Examinons alors les valeurs prises par $[0{,}75x]$:

- Si $4k \le x < 4k + \frac{4}{3}$ alors $[0{,}75x]=3k$;
- Si $4k + \frac{4}{3} \le x < 4k + \frac{8}{3}$ alors $[0{,}75x]=3k + 1$;
- Si $4k + \frac{8}{3} \le x < 4k + 4$ alors $[0{,}75x]=3k + 2$.

De même, en posant $k' = [0{,}25y]$, on a $y \in [4k';4(k'+1)[$. On en déduit que:

- Si $4k' \le y < 4k' + 2$ alors $[0{,}5y]=2k'$
- Si $4k' + 2 \le y < 4k' + 4$ alors $[0{,}5y]=2k'+ 1$.

Donc si $x \in \left[4k + \frac{4}{3}i, 4k + \frac{4}{3}(i+1)\right]$ avec i =0 ou 1 ou 2 et si $y \in \left[4k' + 2j, 4k' + 2(j+1)\right]$ pour j=0 ou 1, alors :

$\begin{cases}[0{,}75x]+[0{,}25y]=3k+i+k'\\ [0{,}25x]+[0{,}5y]=k+2k'+j\end{cases}$. Le problème revient donc à trouver les entiers k, k', i, j tels que :

$\begin{cases}3k+k'=18-i\\ k+2k'=17-j\end{cases}$ avec $i \in \{0;1;2\}$ et $j \in \{0;1\}$ et k et k' deux entiers naturels (puisque ce sont les parties entières de réels positifs).

$$\begin{cases}3k+k'=18-i\\k+2k'=17-j\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{19-2i+j}{5}\\k'=\dfrac{33+i-3j}{5}\end{cases}$$

k et k' étant deux entiers naturels, $19-2i+j$ et $33+i-3j$ doivent être divisibles par 5.

Or $\begin{cases}-4\le -2i\le 0\\0\le j\le 1\end{cases}\Rightarrow -15\le 19-2i+j\le 20$.

Il n'y a donc que deux valeurs possibles pour $19-2i+j$: $19-2i+j=15$ ou $19-2i+j=20$.

On en enduit deux valeurs possibles pour $-2i+j$: $-2i+j=-4$ ou $-2i+j=1$.

Si $-2i+j=-4$, alors j est pair, donc $j = 0$ et alors $i = 2$, ce qui donne :

k =3, k'=7, et alors $x\in\left[\dfrac{44}{3},16\right[$ et $y\in[28;30[$.

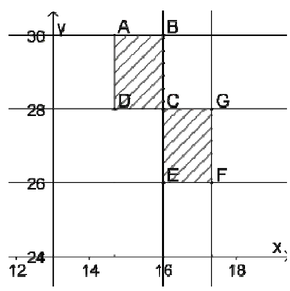
Si $-2i+j=1$ alors j est impair, donc $j = 1$ et alors $i = 0$, d'où k =4, k'=6 et alors $x\in\left[16,\dfrac{52}{3}\right[$ et $y\in[26, 28[$.

$-2i+j$=1 exige que j soit impair, donc $j = 1$ et alors $i = 0$, d'où k =4, k'=6 et $x\in\left[16,\dfrac{52}{3}\right[$ et $y\in[26, 28[$.

Finalement les solutions cherchées sont les couples (x, y) de nombres décimaux de D_2 (*) ceux tels que :
$x\in\left[\dfrac{44}{3},16\right[$ et y $\in[28;30[$.**et ceux tels que ceux tels que** $x\in\left[16,\dfrac{52}{3}\right[$ et $y\in[26, 28[$.

(On pose D_2 = { $d\in$ R / ($\exists\, a\in$ **N**) tel que $d=\dfrac{a}{100}$ }).

L'ensemble des points M(x, y) correspondants est l'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent à D_2 , inclus dans la partie de plan hachurée représentée ci-contre. Il est constitué de l'intérieur des deux rectangles ABCD et CEFG. dont les côtés sont parallèles aux axes et qui ont mêmes dimensions
(AB = CG = 4/3 et AD = CE = 2). Leur sommet commun, le point C(16,28) n'est pas solution du problème de même que les côtés [AB], [BC], [CG] et [GF].



C3 Posons $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt5}+\sqrt[3]{2-\sqrt5}$.

Alors $\alpha^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt5}+\sqrt[3]{2-\sqrt5}\right)^3=2+\sqrt5+3\left[\left(\sqrt[3]{2+\sqrt5}\right)^2\sqrt[3]{2-\sqrt5}\right]+3\left[\sqrt[3]{2+\sqrt5}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt5}\right)^2\right]+2-\sqrt5$.

$\alpha^3=4+3\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt5}\sqrt[3]{2+\sqrt5}}_{-1}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt5}+\sqrt[3]{2+\sqrt5}\right)$. Donc $\alpha^3=4-3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt5}+\sqrt[3]{2+\sqrt5}\right)$ d'où $\alpha^3=4-3\alpha$.

α est donc solution de l'équation $x^3+3x-4=0$.

1 est une solution de cette équation et pour tout x réel, $x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$.

Comme l'équation $x^2+x+4=0$ n'admet pas de solution réelle, on en déduit que $\boxed{\alpha = 1}$.

C4 $A=\left]0,1\right]$ et $B=\{1\}$.

C5 Posons $S=\cos^2 1°+\cos^2 2°+\cos^2 2°+...+\cos^2 90°$

Comme cos 90° = 0 et que pour tout x (exprimé en degrés), $\cos x=\sin(90°-x)$ et $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

On a donc $S=\sin^2(90°-1°)+\sin^2(90°-2°)+...+\sin^2(90°-89°)$.

$S=\sin^2 89°+\sin^2 88°+...+\sin^2 1°=(1-\cos^2 89°)+(1-\cos^2 88°)+...+(1-\cos^2 1°)$ soit $S = 89 - S$.

On en déduit que $\boxed{S = 44{,}5}$.

C6 1. a) Pour tous réels x et y positifs, $x+y-2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$ d'où le résultat (de plus $x+y=2\sqrt{xy}$ si, et seulement si $x = y$).

b) D'après a), on a : $1+x^{2n}\geq 2\sqrt{x^{2n}}$ soit $1+x^{2n}\geq 2x^n$ (avec égalité si $x = 1$).

De plus $(1+x)^{2n-2}\geq\left(2\sqrt{x}\right)^{2n-2}$ d'où $(1+x)^{2n-2}\geq 2^{2n-2}x^{n-1}$ (avec égalité si $x = 1$).

On en déduit que pour tout réel x positif, $\left(1+x^{2n}\right)(1+x)^{2n-2}\geq 2x^n\times 2^{2n-2}x^{n-1}$ d'où $\left(1+x^{2n}\right)(1+x)^{2n-2}\geq(2x)^{2n-1}$.

Ce qui conduit au résultat demandé.

Il y a égalité si et seulement si $x = 1$.

2. a) $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}$ qui est positif ou nul.

b) Pour tout x non nul, $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\times\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{x^k}$.

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\sum_{0\leq k\leq j\leq n}a_k a_j\left(\frac{x^k}{x^j}+\frac{x^j}{x^k}\right).$$

Or d'après la question a), en posant $x=\frac{x^k}{x^j}$ qui est un réel strictement positif, on a : $\frac{x^k}{x^j}+\frac{x^j}{x^k}\geq 2$. Donc, pour tout $x > 0$, $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)\geq\sum_{k=0}^{n}a_k^2+2\sum_{0\leq k\leq j\leq n}a_k a_j\geq\sum_{k=0}^{n}a_k^2$.

On en déduit que pour tout $x > 0$, $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)\geq\left[P(1)\right]^2$.

C7 1. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel et que a et b sont entiers, $a-b\sqrt{2}$ n'est jamais nul. On peut donc écrire :

$\left|a+b\sqrt{2}\right|=\frac{\left|a^2-2b^2\right|}{\left|a-b\sqrt{2}\right|}$. Comme $\left|a^2-2b^2\right|$ est un entier naturel non nul , on a donc :

$\left|a^2-2b^2\right|\geq 1$. D'autre part $\left|a-b\sqrt{2}\right|\leq|a|+|b|\sqrt{2}$. Donc $\frac{\left|a^2-2b^2\right|}{\left|a-b\sqrt{2}\right|}\geq\frac{1}{|a|+|b|\sqrt{2}}$.

Pour $a| < 10^6$ et $|b| < 10^6$, $|a|+|b|\sqrt{2}\leq(1+\sqrt{2})10^6>10^7$ d'où le résultat.

2. Trouver deux entiers a et b non nuls tels que $|a| < 10^6$, $|b| < 10^6$ et $\left|a+b\sqrt{2}\right|<10^{-5}$.

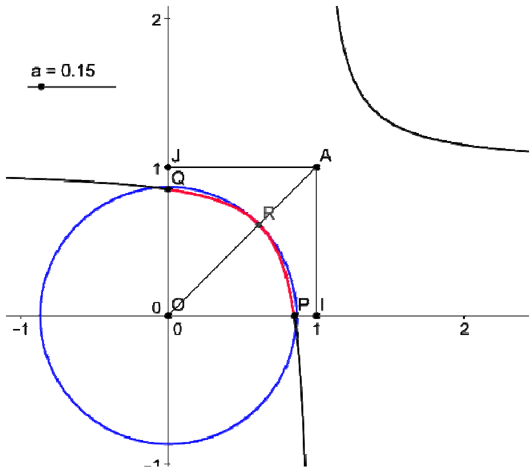
$-1+\sqrt{2}>0$ donc $\left|-1+\sqrt{2}\right|=-1+\sqrt{2}$.

$0 < -1+\sqrt{2} < 0{,}42$. D'autre part ; on peut démontrer par récurrence (ou en utilisant la formule du binôme) que pour tout entier naturel n, il existe un entier a_n et un entier b_n tels que $\left(-1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Comme $0 < \left(-1+\sqrt{2}\right)^n < 0{,}42^n$, il suffit donc de déterminer un entier naturel n tel que : $0{,}42^n < 10^{-5}$.

Tout entier n vérifiant $n > \dfrac{\ln 10^{-5}}{\ln 0{,}42}$ convient soit $\boxed{n \geq 14}$.

Remarque : A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\left(-1+\sqrt{2}\right)^{14} = -80782\sqrt{2} + 114243$ $\left(\approx 4{,}38.10^{-6}\right)$

C8 $0 < a < 1$.soit $\mathcal{H}$ l'ensemble d'équation $(1-x)(1-y) = a$ et $\mathcal{H}_1$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) de $\mathcal{H}$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.



$\mathcal{H}$ est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{a}{x-1} + 1$.

$\mathcal{H}_1$ est l'intersection de $\mathcal{H}$ et du carré OIAJ où I, A et J ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 1) et (0 ; 1). $\mathcal{H}_1$ est donc partie de H située dans le premier quadrant ($x \geq 0$ et $y \geq 0$)

C'est l'arc de $\mathcal{H}$ limité par les points P (0, 1 – a) et Q (1 –a, 0).

2. M(x ; y) ∈ $\mathcal{H}_1$ $\Leftrightarrow \begin{cases}(1-x)(1-y)=a \\ 0 \leq x \leq 1-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a}{x-1}+1 \\ 0 \leq x \leq 1-a\end{cases}$.

Lorsque M(x ; y) ∈ $\mathcal{H}_1$, $\begin{cases} x+y = x+\dfrac{a}{x-1}+1 \\ 0 \leq x \leq 1-a\end{cases}$

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1 – a] par . $f(x) = x+1+\dfrac{a}{x-1}$.

$\left(\forall x \in [0,1-a]\right) f'(x) = 1 - \dfrac{a}{(x-1)^2}$ soit. $f'(x) = \dfrac{\left(x-1-\sqrt{a}\right)\left(x-1+\sqrt{a}\right)}{(x-1)^2}$.

On vérifie que sur l'intervalle [0 ; 1 – a], $f'(x)$ a le même signe que $-\left(x-1+\sqrt{a}\right)$ et que :

$f(0) = 1-a$, $f\left(1-\sqrt{a}\right) = 2\left(1-\sqrt{a}\right)$, $f(1-a) = 1-a$.

f est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left[0,\ 1-\sqrt{a}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[1-\sqrt{a},\ 1-a\right]$. On en déduit que :

Lorsque M(x ; y) parcourt $\mathcal{H}_1$, $x + y$ décrit l'intervalle $\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$. La valeur minimale de $x + y$ correspond aux points P et Q et la valeur maximale $s_0 = 2\left(1-\sqrt{a}\right)$ correspond au point R($1-\sqrt{a}$, $1-\sqrt{a}$).

3. L'ensemble des valeurs de $x^2 + y^2$ quand le point de coordonnées (x, y) décrit $\mathcal{H}_1$ est l'ensemble des valeurs prises par OM^2 où M est un point de $\mathcal{H}_1$.

M(x ; y) ∈ $\mathcal{H}$ $\Leftrightarrow (1-x)(1-y) = a \Leftrightarrow xy = a-1+(x+y)$.

D'autre part : $x^2 + y^2 = (x + y)^2 – 2xy$.

Donc, si M(x; y) est un point de $\mathcal{H}$ alors : $x^2 + y^2 = (x + y)^2 – 2\ (a – 1 + x + y)$

Posons $s = x + y$. Lorsque M(x; y) $\in \mathcal{H}$; $x^2 + y^2 = s^2 - 2s + 2 - 2a$.

On a vu que lorsque M(x ; y) parcourait $\mathcal{H}_1$, s décrivait l'intervalle $\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$.

Étudions les variations de la fonction g définie sur $I = \left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$ par :

$g(s) = s^2 - 2s + 2 - 2a$ soit $g(s) = (s-1)^2 - 2a$.

La fonction g est décroissante sur tout intervalle contenu dans $]-\infty, 1]$ et croissante sur tout intervalle contenu dans $[1, +\infty[$. On doit donc préciser la position de 1 par rapport à l'intervalle I.

Remarquons tout d'abord que, pour tout a de $]0 ;1[$, $1 - a < 1$.

D'autre part, $2\left(1-\sqrt{a}\right)-1 = 1-2\sqrt{a}$ et $1-2\sqrt{a} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{4}$.

Donc $2\left(1-\sqrt{a}\right) < 1$ si, et seulement si $0 < a < \frac{1}{4}$

Premier cas : $\boxed{0 < a < \frac{1}{4}}$. Alors $1 < 2\left(1-\sqrt{a}\right)$ et $1 \in$ I.

La fonction g est décroissante sur $|1-a, 1]$, croissante sur $[1,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)]$.

$g(1-a) = (1-a)^2$, $g(1) = 1-2a$ et $g\left(2\left(1-\sqrt{a}\right)\right) = 2\left(1-\sqrt{a}\right)^2$. Comme g est continue sur I,

$g(I) = [1-2a\ ;\ M_a]$ où M_a est le plus grand des deux nombres $(1-a)^2$ et $2-\left(1+\sqrt{a}\right)^2$.

Déterminons $M(a)$ selon les valeurs de a :

$2\left(1-\sqrt{a}\right)^2 - (1-a)^2 = \underbrace{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}_{\text{positif}}\left(2-\left(1+\sqrt{a}\right)^2\right)$. $2\left(1-\sqrt{a}\right)^2 - (1-a)^2$ est du signe de $2-\left(1+\sqrt{a}\right)^2$ donc du signe de $\sqrt{2}-\left(1+\sqrt{a}\right)$ donc du signe de $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 - a$ (en effet : $\sqrt{2}-\left(1+\sqrt{a}\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{a} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 - a}{\underbrace{\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{positif}}+\sqrt{a}}_{\text{positif}}}$)

On vérifie que $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 < \frac{1}{4}$. On en déduit que :

- Si $0 < a < \left(\sqrt{2}-1\right)^2$, alors $M_a = 2\left(1-\sqrt{a}\right)^2$.

  Dans ce cas, lorsque M (x ; y) décrit $\mathcal{H}_1$, $x^2 + y^2$ parcourt l'intervalle $\left[1-2a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)^2\right]$.

- Si $a = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$, alors : $2-\left(1+\sqrt{a}\right)^2 = 2-(1+\sqrt{2}-1 = \underbrace{2-\sqrt{2}}_{\text{positif}}$.

  Dans ce cas, lorsque M (x ; y) décrit $\mathcal{H}_1$, $x^2 + y^2$ parcourt l'intervalle $\left[1-2a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)^2\right]$.

- Si $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 < a < \frac{1}{4}$, alors $M_a = (1-a)^2$.

  Dans ce cas, lorsque M (x ; y) décrit $\mathcal{H}_1$, $x^2 + y^2$ parcourt l'intervalle $\left[1-2a,\ (1-a)^2\right]$

Deuxième cas : $\boxed{\frac{1}{4} \le a < 1}$

Alors $2\left(1-\sqrt{a}\right) \le 1$ et g est décroissante sur l'intervalle $\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$.

Dans ce cas, lorsque M (x ; y) décrit $\mathcal{H}_1$,, $x^2 + y^2$ parcourt l'intervalle $\left[\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)^2, (1-a)^2\right]$.

4. Soit $\mathcal{C}_a$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}\left(1-\sqrt{a}\right)$. M $(x\,;y) \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2\left(1-\sqrt{a}\right)^2 \\ x\in[0,\ 1-a] \\ (1-x)(1-y)=a \end{cases}$.

Ce qui revient à résoudre l'équation $g(s)=g(s_0)$ avec $s_0=2\left(1-\sqrt{a}\right)$ (question 2).

g est la fonction définie sur l'intervalle $\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$ par $g(s) = (s-1)^2 - 2a$ (restriction à $\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$ d'une fonction trinôme du second degré).

L'équation $g(s)=g(s_0)$ a deux solutions (éventuellement confondues) qui sont $s=s_0$ et $s=2-s_0$ (on recherche les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $z=s_0$ avec la parabole d'équation $z=(s-1)^2-2a$ qui a pour axe de symétrie la droite d'équation $z = 1$).

$s=s_0 \Leftrightarrow s=2\left(1-\sqrt{a}\right)$ et, d'après la question 2 $s=2\left(1-\sqrt{a}\right)$ équivaut à $(x,y)=\left(1-\sqrt{a},1-\sqrt{a}\right)$, soit M = R.

$s=2-s_0 \Leftrightarrow s=2\sqrt{a}$. On doit donc examiner les valeurs de a pour lesquelles $2\sqrt{a}\in\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$.

$2\left(1-\sqrt{a}\right)-2\sqrt{a}=2\left(1-2\sqrt{a}\right)$ et l'on a vu que $1-2\sqrt{a}\geq 0 \Leftrightarrow 0<a\leq\dfrac{1}{4}$.

$1-a\leq 2\sqrt{a} \Leftrightarrow a+2\sqrt{a}-1\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+1\right)^2-2\geq 0 \Leftrightarrow a\geq\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ $\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2\approx 0{,}17\right)$

Si $\boxed{0<a<\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$, $2\sqrt{a}\notin\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$ et $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{H}_1 = \{\text{R}\}$.

Si a $a=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}$ alors $2\sqrt{a}=2(\sqrt{2}-1)=1-a$ et $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{H}_1 = \{\text{P, Q, R}\}$.

Si $\boxed{\left(\sqrt{2}-1\right)^2<a<\dfrac{1}{4}}$, alors $2\sqrt{a}\in\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$. $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{H}_1$ se coupent en trois points : R et les deux points de $\mathcal{H}_1$ de coordonnées (x, y) et (y, x) tels que $x+y=2\sqrt{a}$

Si $a=\dfrac{1}{4}$, $2\sqrt{a}=2\left(1-\sqrt{a}\right)=1$. Alors $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{H}_1 = \{\text{R}\}$.

Si $1>a>\dfrac{1}{4}$, $2\sqrt{a}\notin\left[1-a,\ 2\left(1-\sqrt{a}\right)\right]$ et $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{H}_1 = \{\text{R}\}$.

5. L'aire S du domaine limité par $\mathcal{H}_1$ et les axes de coordonnées est égale à $\displaystyle\int_0^{1-a}\left(\frac{a}{1-x}+1\right)\mathrm{d}x$.

$S = \left[-a\ln(1-x)+x\right]_0^{1-a}$ d'où $\boldsymbol{S = 1 - a + a\ln(a)}$.

Si $\boxed{\dfrac{1}{4}<a<1}$, on sait que : $(\forall M\in\mathcal{H}_1)$ OM $\geq\sqrt{2}\left(1-\sqrt{a}\right)$.Donc la courbe $\mathcal{H}_1$ est extérieure au cercle $\mathcal{C}_a$: Elle est donc au dessus du quart de cercle de centre O, de rayon $\sqrt{2}\left(1-\sqrt{a}\right)$ situé dans le premier quadrant.

Par conséquent l'aire du quart de disque de centre O et de rayon $\sqrt{2}\left(1-\sqrt{a}\right)$ est inférieure à S.

D'où $\boxed{\dfrac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)^2\leq 1-a+a\ln a}$. Posons $\Delta(a) = \dfrac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)^2-1+a-a\ln a$.

Nous savons que $\Delta(a)\leq 0$ pour $\dfrac{1}{4}\leq a<1$; $\Delta\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{9}{16}-1+\dfrac{1}{16}+\dfrac{\ln(16)}{16}\approx 0{,}12$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme Δ est continue sur]0 ; 1[,que $\Delta(a)\leq 0$ pour $\dfrac{1}{4}\leq a<1$,et $\Delta\left(\dfrac{1}{16}\right)>0$, il existe au moins un réel a de]0 ; 1[tel que $\Delta(a) = 0$.

L'équation $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)^2=1-a+a\ln a$ admet donc au moins une solution dans]0 ; 1[.

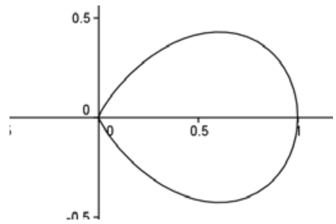
Fonctions

SF 1 Pour qu'un point de coordonnées (*x*, *y*) appartienne à cette courbe – qui nous appelons *C* – il est nécessaire que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0$. Les points de la courbe *C* ont donc des abscisses dans l'intervalle $]0,1]$. La courbe *C* est donc la réunion des courbes représentatives des deux fonctions définies sur $]0,1]$ par $f(x) = x\sqrt{-\ln(x)}$ et $g(x) = -x\sqrt{-\ln(x)}$, la seconde étant symétrique de la première par rapport à l'axe des abscisses.

La fonction *f* a pour limite 0 en 0 (en écrivant, pour tout *x* de $]0,1]$: $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{|x\ln(x)|}$ et en utilisant la limite connue) et prend la valeur 0 en 1.

Pour étudier la dérivabilité de *f* en 0, nous étudions la fonction τ définie par $\tau(x) = \frac{x\sqrt{-\ln(x)}}{x}$, dont la limite en 0 est $+\infty$. Tout se passe comme si la courbe admettait à l'origine une tangente verticale (mais l'origine n'appartient pas à la courbe…)

Sur $]0,1]$, la dérivée de f est définie par $f'(x) = \sqrt{-\ln(x)} - x\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{-\ln(x)}}$, qui s'écrit aussi : $f'(x) = \frac{-2\ln(x)-1}{2\sqrt{-\ln(x)}}$, qui change de signe en $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. On a $f\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$



Sur la figure ci-contre, réalisée avec un logiciel, la « tangente verticale en O, qui n'appartient pas à la courbe » n'est pas très évidente.

SF2 La fonction définie sur **R** par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - x - 10) - x$ admet pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$ (cela résulte des théorèmes de comparaison entre l'exponentielle et les fonctions puissances). Cette fonction étant continue, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur **R.**

On a, pour tout réel *x* : $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2x - 1 - x^2 + x + 10) - 1$, ou encore $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2 + 3x + 9) - 1$. La dérivée seconde de f est donnée par : $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(-2x + 3 + x^2 - 3x - 9)$. Ou encore $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 5x - 6)$. Ou encore $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x+1)(x-6)$. Cette fonction est positive sur $]-\infty,-1]$, négative sur $[-1,6]$, positive sur $[6,+\infty[$. La fonction f' est donc croissante sur $]-\infty,-1]$, décroissante sur $[-1,6]$, et croissante sur $[6,+\infty[$.

La fonction f' change de signe une fois sur $]-\infty,-1]$ (elle a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et vaut $5\mathrm{e}-1$ en -1). Elle change de signe une fois sur $[-1,6]$ (elle vaut $-1-9\mathrm{e}^{-6}$ en 6. Elle reste négative sur $[6,+\infty[$, puisque sa limite en $+\infty$ est -1.Appelons α et β les réels en lesquels f' change de signe. Un tableau de variation de *f* peut être dressé :

x		α		-1		β		**6**	
f''	**positive**			**0**	**négative**			**0**	**positive**
f'	**négative**		**positive**		**positive**		**négative**		**négative**
f	**décroissante**		**croissante**				**décroissante**		

Comme $f(0) = -10$, on peut affirmer qu'il existe un zéro de *f* sur $]-\infty,0]$ (le minimum de *f*, atteint en α, est négatif. Par ailleurs, le maximum relatif de *f*, atteint en β, est négatif, c'est ce qui résulter de l'étude faite sur $[0,3]$, qui suit. On montrera au préalable que $\beta \in [0,3]$.

Notons $t(x) = x^2 - x - 10$. On a $t(0) = -10$ et $t(3) = -4$. La fonction *t* étant négative dans l'intervalle limité par ses racines, on en déduit qu'elle est négative su [0, 3]. La fonction *f* est elle aussi négative sur cet intervalle (le produit de *t* par une exponentielle est négatif et on lui ajoute une fonction elle aussi négative).

SF 3 La fonction f cherchée ne prend pas la valeur 0, comme l'indique la condition donnée. Comme elle est continue, elle est de signe constant, et comme $f(0)=1$, elle est strictement positive. La condition initiale nous fournit la relation : pour tout x positif $f'(x)f''(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, ou encore $\left(f'(x)\right)^2 f''(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Des primitives des fonctions (en fait il n'y en a qu'une, qui est continue) apparaissant dans l'égalité précédente diffèrent d'une fonction constante. Il existe donc un réel k tel que, pour tout x positif : $\dfrac{1}{3}\left(f'(x)\right)^3=\ln\left(f(x)\right)+k$.

Cette égalité a pour conséquence $k = 1$ (prendre $x = 0$). D'où le résultat.

SF 4 Cherchons $f(0)$ en écrivant : $f(0+0)=f(0)+f(0)-2$. On trouve $f(0)=2$. On a, pour tout x et pour tout y non nul : $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\dfrac{f(y)-2}{y}$.

La fonction f étant dérivable, on a donc pour tout x : $f'(x)=f'(0)$. La fonction f est donc une fonction affine. Elle est entièrement déterminée par les images de 1 et 0. On a donc pour tout x : $f(x)=-3x+2$.

On définit, pour tout entier naturel n, la fonction g_n par $g_1=f$ et $g_{n+1}=f\circ g_n$. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x : $g_n(x)=(-3)^n x+2\dfrac{1-(-3)^n}{1-(-3)}$, ou encore :

$$g_n(x)=(-3)^n x+\frac{1-(-3)^n}{2}.$$

L'intégrale de g_n sur [0, 1] est : $I=(-3)^n\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-(-3)^n}{2}$, soit encore $I=\dfrac{1}{2}\cdot$

SF5 Considérons la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=4\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$. Cette fonction est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a pour tout x strictement supérieur à 1 : $f'(x)=\dfrac{4\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}}\cdot$

Étudions le signe de f'. C'est celui de la fonction défini sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=4\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\sqrt{x+1}$.

Résolvons l'inéquation $g(x)\geqslant 0$. Elle s'écrit successivement :

$$4\sqrt{x^2-1}\geqslant\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\sqrt{x+1}$$

$$16\left(x^2-1\right)\geqslant 2x^2+2x\sqrt{x^2-1}$$

$$7x^2-8\geqslant x\sqrt{x^2-1}$$

Cette dernière condition s'écrit : $x\geqslant\sqrt{\dfrac{8}{7}}$ et $48x^4-111x^2+64\geqslant 0$.

On est donc amené à comparer les racines supérieures à 1 de l'équation $48x^4-111x^2+64=0$ à $\sqrt{\dfrac{8}{7}}$. On prouve que : $\sqrt{\dfrac{111-\sqrt{33}}{96}}\leqslant\sqrt{\dfrac{8}{7}}\leqslant\sqrt{\dfrac{111+\sqrt{33}}{96}}$, et donc la fonction f est croissante pour $x\geqslant\sqrt{\dfrac{111+\sqrt{33}}{96}}$. Elle atteint son minimum en $\sqrt{\dfrac{111+\sqrt{33}}{96}}$.

SF6 On fait comme il est dit : $f(x)=\dfrac{\sqrt{{h_1}^2+x^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{{h_2}^2+(L-x)^2}}{v_2}$

La fonction f est dérivable sur $[0, L]$ et on a, pour tout x de cet intervalle : $f'(x) = \frac{2x}{2v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} + \frac{2(x-L)}{2v_2\sqrt{h_2^2 + (L-x)^2}}$.

Cette fonction dérivée prend la valeur 0 dans les conditions données dans l'énoncé (encore faudrait-il montrer l'existence et l'unicité, mais nous sommes soutenus par l'expérience). On retrouve la loi des sinus (ou des cosinus).

Équations et suites

E1 L'équation du second degré $3x^2 + mx - 2 = 0$ a pour discriminant $m^2 + 24 > 0$. Elle admet donc toujours deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2. On supposera $x_1 < x_2$. Comme $x_1 \times x_2 = -\frac{2}{3}$, on en déduit que $x_1 < 0 < x_2$.

Si l'équation admet une solution réelle supérieure ou égale à 1, cela se traduit par $1 \le x_2$. 1 est donc entre les deux racines. Or, pour tout $x \in [x_1, x_2]$, $3x^2 + mx - 2 \le 0$ en particulier pour $x = 1$.

On en déduit que $3 + m - 2 \le 0$ soit $m \le -1$.

E2 1. $\frac{na-1}{n} < \frac{[na]}{n} \le \frac{na}{n}$ soit $a - \frac{1}{n} < \frac{[na]}{n} \le a$.

En appliquant le théorème des « gendarmes », on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[na]}{n} = a$

2. Si pour tout entier naturel n non nul, $[a[na]] - [na] = n - 1$, alors $\frac{[a[na]] - [na]}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[na]}{n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[a[na]]}{n} = a^2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$. On en déduit que $a^2 - a - 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; Posons $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) alors $1 - \phi = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

<u>Réciproquement</u>

- Si $a = 1 - \phi$ et $n = 1$, $[na] = -1$, $[a[na]] = [-a] = 0$ donc $[a[na]] - [na] = -1$. Or $n - 1 = 0$. Cette valeur ne convient pas.
- Remarque préliminaire

  Puisque $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, on a $\phi^2 = \phi + 1 = 0$ et, en divisant les deux membres par ϕ : $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

  Donc, pour tout entier naturel n non nul: $[n\phi]\phi = [n\phi]\left(1 + \frac{1}{\phi}\right) = [n\phi] + \frac{[n\phi]}{\phi}$ d'où $\left[[n\phi]\phi\right] - [n\phi] = \left[\frac{[n\phi]}{\phi}\right]$.

  $\left[\frac{[n\phi]}{\phi}\right] = \left[n + \frac{[n\phi]}{\phi} - n\right] = \left[n + \frac{[n\phi] - n\phi}{\phi}\right] = n + \left[\frac{[n\phi] - n\phi}{\phi}\right]$.

  Or $[n\phi] < n\phi < [n\phi] + 1$ (les deux inégalités sont strictes car ϕ est irrationnel), d'où $-1 < [n\phi] - n\phi < 0$ et $\left[\frac{[n\phi] - n\phi}{\phi}\right] = -1$.

En conclusion, pour tout entier naturel *n* non nul, $\boxed{\left[[n\phi]\phi\right] - [n\phi] = n - 1}$

E3 *Préambule*

L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont trois réels donnés ($a \neq 0$) admet deux racines réelles ou complexes qui ont pour somme $-\frac{b}{a}$ et pour produit $\frac{c}{a}$

Remontons le processus et supposons qu'à une étape donnée n, on obtienne l'équation (E_n) : $x^2 + a_n x + b_n = 0$.

L'équation (E_{n-1}) ($x^2 + a_{n-1} x + b_{n-1} = 0$) a donc pour racines a_n et b_n avec $a_n < b_n$. La somme des racines de (E_{n-1}) est égale à $-a_{n-1}$ et le produit est égal à b_{n-1}.

On a donc : $a_{n-1} < b_{n-1}$ soit $-a_n - b_n < a_n b_n$.

A l'étape $n-2$, on a :

$a_{n-2} < b_{n-2}$ soit $-a_{n-1} - b_{n-1} < a_{n-1} b_{n-1}$ ou encore $a_n + b_n - a_n b_n < -(a_n + b_n) a_n b_n$ soit

$\boxed{b_n^2 a_n + b_n\left(a_n^2 - a_n + 1\right) + a_n < 0}$.

<u>Premier cas</u> : $0 < a_n < b_n$. Il faut que $\boxed{b_n^2 + b_n\left(a_n - 1 + \frac{1}{a_n}\right) + 1 < 0}$.

Or, $a_n + \frac{1}{a_n} - 1 > 1$ donc : $b_n^2 + b_n\left(a_n - 1 + \frac{1}{a_n}\right) + 1 > b_n^2 + b_n + 1 > 0$.

C'est impossible. On n'écrit que deux équations.

<u>Deuxième cas</u> : $a_n < 0$.

Si $b_n < -a_n$, à l'étape $n-1$, on obtient $a_{n-1} = -(a_n + b_n)$ donc $a_{n-1} > 0$ et on est ramené au cas précédent.

Si $b_n > -a_n$, alors $a_{n-1} < 0$. Comme $b_n > 0$, $a_n < 0$ et $b_{n-1} = a_n b_n$, on a $b_{n-1} < 0$.

Et à l'étape $n-2$, on a $a_{n-2} = -(a_{n-1} + b_{n-1})$ d'où $a_{n-2} > 0$: On se ramène au premier cas. On peut encore écrire deux équations (étapes $n-3$ et $n-4$).

En conclusion : On peut écrire au maximum quatre équations.

Exemple : Si $a_4 = -\frac{1}{2}$, $b_4 = 4$, on obtient $a_3 = -\frac{7}{2}$, $b_3 = -2$, $a_2 = \frac{11}{2}$, $b_2 = 7$, $a_1 = -\frac{25}{2}$, $b_1 = \frac{77}{2}$.

Soit, en remettant les équations dans l'ordre :

$x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{77}{2} = 0$, $x^2 + \frac{11}{2}x + 7 = 0$, $x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$, $x^2 - \frac{1}{2}x + 4 = 0$.

E4 Supposons qu'il existe deux entiers positifs, p et k, chacun inférieur à n, tels que $k(2n - k + 1) = p(2n - p + 1)$.

Donc : $2nk - k^2 + k = 2np - p^2 + p$

$p^2 - k^2 + 2nk - 2np + k - p = 0$

$(p - k)(p + k) + 2n(k - p) + (k - p) = 0$

$(p - k)(p + k - 2n - 1) = 0$.

Puisque p et k sont inférieurs à n, alors $p + k - 2n - 1 \neq 0$.

Donc $p = k$, ce qui démontre que $k(2n - k + 1)$ et $p(2n - p + 1)$ représentent le même terme de la suite de produits.

On ne peut donc pas avoir deux produits égaux.

E5 Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls n et m tels que $[m\alpha] = [n\beta]$ et posons $q = [m\alpha] = [n\beta]$.

Alors $q \in \mathbf{N}^*$ et $q < m\alpha < q + 1$ et $q < n\beta < q + 1$ (les inégalités sont **strictes** car α et β sont **irrationnels)**.

$\dfrac{m}{q+1}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{m}{q}$ et $\dfrac{n}{q+1}<\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{n}{q}$. En ajoutant membre à membre les termes de ces inégalités, on en déduit que :

$\dfrac{m+n}{q+1}<1<\dfrac{m+n}{q}$ (car $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$). D'où : $m+n<q+1$ et $q<m+n$. On en déduit que $q<m+n<q+1$.

Ce qui est impossible puisqu'il n'y a pas d'entier strictement compris entre les entiers consécutifs q et $q+1$.

Donc les deux suites (u_n) et (v_n) sont disjointes.

L'un des deux irrationnels α et β appartiennent à l'intervalle [1, 2].

En effet, si $2<\alpha$ et $2<\beta$, on a $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}<1$, si $0<\alpha<1$ et $0<\beta<1$, alors $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}>2$.

Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que l'intervalle $[q, q+1]$ ne contienne aucun terme de la suite (u_n) ni aucun terme de la suite (v_n). Il existe alors deux entiers m et n tels que :

$m\alpha<q<q+1<(m+1)\alpha$ et $n\beta<q<q+1<(n+1)\beta$. En effet l'ensemble des entiers naturels m tels que $m\alpha<q$ est non vide (il contient 1 puisque $\alpha<2\leq q$) et majoré par $\dfrac{q}{\alpha}$. Il contient donc un plus grand élément. Le raisonnement est analogue pour $n\beta$.

D'où : $\dfrac{m}{q}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{m+1}{q+1}$ et $\dfrac{n}{q}<\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{n+1}{q+1}$ et, en ajoutant membre à membre les termes de ces inégalités :

$\dfrac{m+n}{q}<\underbrace{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}}_{1}<\dfrac{m+n+2}{q+1}$. On en déduit que . $m+n<q<q+1<m+n+2$.

On aboutit à une contradiction car il n'y a pas deux entiers distincts compris strictement entre $m+n$ et $m+n+2$.

Conclusion : Pour tout entier naturel q non nul, il existe un entier naturel n non nul tel que $q=[n\alpha]$ ou $q=[n\beta]$.

E6 Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n=\dfrac{(2n-1)(n+1)}{(2n+1)(n-1)}$.

Donc $u_2u_3u_4...u_{99}u_{100}=\dfrac{3.3}{5.1}\times\dfrac{5.4}{7.2}\times\dfrac{7.5}{9.3}\times...\times\dfrac{197.100}{199.98}\times\dfrac{199.101}{201.99}$ soit :

$u_2u_3u_4...u_{99}u_{100}=\dfrac{3.5.7.9...197.199}{5.7.9.11...199.201}\times\dfrac{3..5.6...100.101}{1.2.3.4...98.99}=\dfrac{3}{201}\times\dfrac{100.101}{1.2}=\dfrac{5050}{67}$

E7 Soit n un entier naturel, x_n le nombre de chemins de longueur n allant de A à B, y_n le nombre de chemins de longueur n allant de A à C, z_n le nombre de chemins de longueur n allant de A à A.

Par symétrie, $x_n=y_n$. De plus :

$\begin{cases} x_{n+2}=y_{n+1}+z_{n+1} \\ y_{n+2}=x_{n+1}+z_{n+1} \\ z_{n+2}=x_{n+1}+y_{n+1} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{n+2}=x_{n+1}+z_{n+1} \\ z_{n+2}=2x_{n+1} \end{cases}$ d'où $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$.

On démontre ensuite par récurrence que $x_n=\dfrac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}$.

E8 ***Une suite majoritairement décroissante***

Remarque préliminaire

Posons $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Une partie de E_n contenant au moins la moitié des éléments de E_n contient au moins un élément supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. En effet le nombre d'éléments de E_n strictement inférieurs à $\frac{n-1}{2}$ est $\frac{n-1}{2}$ si n est impair et $\frac{n}{2}$, ce qui, dans les deux cas est strictement moins de la moitié des éléments de E_n.

Soit n un entier naturel et $P(n)$ la propriété : pour tout entier k compris entre 0 et n, $u_k \le \frac{2}{k+2}$.

Démontrons cette propriété par récurrence.

$P(0)$ est vraie. En effet, $u_0 \le \frac{2}{0+2}$.

Soit n un entier naturel donné. Supposons que pour tout entier k compris entre 0 et n, $u_k \le \frac{2}{k+2}$.

D'après les données de l'énoncé, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont supérieurs ou égaux à $2u_{n+1}$.

D'après la remarque préliminaire, il existe donc un entier k tel que $\frac{n-1}{2} \le k \le n$ vérifiant $2u_{n+1} \le u_k$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \le \frac{2}{k+2}$. D'où $u_{n+1} \le \frac{u_k}{2} \le \frac{2}{2k+4}$. Or $\frac{n-1}{2} \le k$ donc $n+3 \le 2k+4$.

D'où : $u_{n+1} \le \frac{2}{n+3}$ ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion : Pour tout entier naturel n, $0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{n+3}$. On en déduit la limite de la suite $(u_n)_{n \ge 0}$ par encadrement.

Arithmétique et raisonnement

A1 Comptons le nombre d'ouvertures pièce par pièce en affectant ces ouvertures d'un coefficient 1 une ouverture sur l'extérieur et $\frac{1}{2}$ pour une ouverture intérieure (car elle est comptée deux fois, une fois pour chacune des deux pièces qui communiquent). Avec cette convention le nombre d'ouvertures pondéré d'une pièce est de $2\times 1 + 2\times\frac{1}{2} = 3$.

Il y a donc 6 pièces.

A2 3 et 5 sont premiers entre eux de même que 2 et 5, de même que 2 et 9, donc :

$f(3).f(5) = f(15), f(15) < f(18), f(18) = f(2).f(9) = 2f(9)$ et $2f(9) < 2f(10)$ avec $2f(10) = 2.f(2).f(5) = 4f(5)$.

D'où : $f(3).f(5) < 4f(5)$ et, par conséquent $f(3) < 4$. Or $f(3) > f(2)$ $(= 2)$ d'où $f(3) = 3$.

A3 1. (a) a et b étant premiers entre eux, il en est de même pour a et $a+b$; il s'en suit que ka n'est divisible par $a+b$ que si $a+b$ divise k, et par conséquent les entiers r_k, $1 \le k \le a+b-1$, sont bien éléments de $[\![1, a+b-1]\!]$.

Il suffit donc de montrer que ces entiers sont distincts. Or $r_k = r_l$ si, et seulement si, $a+b$ divise $a(k-l)$, c'est à dire $a+b$ divise $(k-l)$, soit $k = l$ puisque $|k-l| < a+b$.

(b) La différence $r_{k+1} - r_k$ vaut a ou $-b$ selon que r_k est inférieur ou supérieur à b. Donc $U(r_k) = U(r_{k+1})$

D'après ce qui précède et une récurrence finie, U est constante égale à $U(a)$ sur $[\![1, a+b-1]\!]$.

Supposons $U(j)$ définie pour un entier $j \geq a+b$ donné.

Il existe q entier tel que $j = aq+r$ avec $1 \leq r \leq a$ donc $r \in [\![1, a+b-1]\!]$. Alors $U(j) = U(r) = U(a)$.

2. Posons $a = d\,a'$, $b = db'$ et soit i dans $[\![1, d]\!]$.

La suite qui à k associe $u_{i+(k-1)d}$ est définie pour $i + (k-1)d \leq a + b - d$ donc en particulier pour k appartenant à $[\![1, a'+b'-1]\!]$. Elle admet a' et b', qui sont premiers entre eux, pour période, donc, d'après la question précédente, elle est constante. C'est le résultat annoncé.

3. (a) Puisque b est au moins égal à 2, on a $r_1 = a$ donc $r_1 < a+b-1$. L'entier m tel que $r_m = a+b-1$ est donc au moins égal à 2.

Par ailleurs $r_{a+b-1} = b$ donc $r_{a+b-1} < a+b-1$, donc m est au plus égal à $a+b-2$.

Prenons A = $\{r_1 = a, r_2,..., r_{m-1} = b-1\}$ et B = $\{r_{m+1} = a-1, r_{m+2},..., r_{a+b-1} = b\}$. A et B sont non vides et la suite V n'est pas constante.

<u>Montrons que V est de période a</u>

Soit i un entier au plus égal à $a+b-2-a = b-2$. On a donc $i = r_k$ avec k 6= $m-1$ et k 6= $a+b-1$ donc si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i + a = r_{k+1}$.

<u>Montrons que V est de période b</u>

Soit i un entier au plus égal à $a+b-2-b = a-2$. On a donc, pour un certain k, $i = r_k$, reste de la division de r_{k-1+a} par $a + b$. On constate de même que si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i + b = r_{k-1}$.

(b) La décomposition est unique à l'échange près de A et B car les propriétés de périodicité font que si par exemple

$a = r_1 \in$ A, alors $r_2,\ldots, r_{m-1}$ sont dans A.

La suite $\left(V(a+b-1-k)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ possède les mêmes propriétés que V. Par unicité, elle est égale à V :

***V* est un palindrome**.

A4 D'après l'énoncé :

$(10a + c) + (10b + a) + (10c + d) + (10d + a) + (10d + b) + (10d + c) = 100c + 10a + b$, ce qui donne après réduction : $2a + 10b + 31d = 88c$.

Comme $2a + 10b$ est pair, ainsi que $88c$, on en déduit que $31d$ est pair, donc d est pair et, comme d est compris entre 1 et 9, il appartient à l'ensemble $\{2, 4, 6, 8\}$ d'où $2a + 10b + 31d \leq 2a + 10b + 248$. Or $2a + 10b < 18 + 90$ (inégalité stricte car, a et b étant distincts, ils ne peuvent être tous deux égaux à 9). D'où $2a + 10b + 31d < 356$ soit $88c < 356$.

On en déduit que $c \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Si $c = 4$, on a $2a + 10b + 31d = 352$. Or $d \leq 8$, on a $2a + 10b + 31d \leq 2a + 10b + 248$ soit $352 \leq 2a + 10b + 248$ d'où $2a + 10b \geq 104$. On vérifie que la seule solution possible est $d = 8$; $b = 9$ et $a = 7$.

Si $c = 3$:

- pour $d = 8$, $2a+10b = 16$ donc $b = 1$ et $a = 3 = c$: impossible ;
- pour $d = 6$, $2a+10b = 78$ alors $b = 7$ et $a = 4$ ou $b = 6 = d$ et $a = 9$: impossible ;
- pour $d = 4$: $2a+10b = 140$: impossible.

Si $c = 2$:

- pour d >4, $2a+10b < 0$ impossible ;
- pour $d = 4$, $2a+10b = 52$ donc $b = 5$ et $a = 2 = c$ impossible ou $b = 4 = d$ et $a = 6$: impossible ;
- pour $d = 2$, $2a+10b = 114$: impossible.

Si $c = 1$:

pour $d >2$, $2a+10b < 0$ impossible ;

pour $d = 2$, $2a+10b = 26$ donc $b =2 = d$ et $a = 3$ impossible ou $b=1=c$ et $a=8$: impossible.

On n'a donc que 2 possibilités: $(a, b, c, d) = (7, 9, 4, 8)$ ou $(a, b, c, d) = (4, 7, 3, 6)$.

$7948 = 4 \times 1987$ et 1987 est premier : 7948 ne peut donc se décomposer en un produit de deux nombres de deux chiffres.

$4736 = 2^7 \times 37$. Le seul produit de deux nombres de deux chiffres égal à $2^7 \times 37$ qui convient est 64×74 soit $\overline{ba} = 74, \overline{da} = 64$. On a donc $\overline{ac} = 43$, $\overline{ba} = 74$, $\overline{cd} = 36$, $\overline{da} = 64$, $\overline{db}=67$ et $\overline{dc} = 63$.

De plus $\overline{ac} + \overline{ba} + \overline{cd} + \overline{da} + \overline{db}+\overline{dc} = 43 + 74 + 36 + 64 + 67 + 63 = 347 = \overline{cab}$

$\boxed{\text{La réponse est donc } (a, b, c, d) = (4, 7, 3, 6)}$.

A5 Le nombre de 6 chiffres $\overline{abcdef}$ est le carré de la somme $\overline{abc} + \overline{def}$. Quel est-il ?

Posons $x = \overline{abc}$, $s = \overline{abc} + \overline{def}$. Par hypothèses : $s^2 = \overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1000x + \overline{def}$. Or $\overline{def} = s - x$.

Par suite, $s^2 = 999x + s$ d'où $\boxed{999x = s(s-1)}$. Or $999 = 3^3 \times 37$.

Comme s et $s - 1$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent être tous les deux multiples de 3 donc l'un des deux est divisible par 27.

<u>Premier cas</u> : l'un des deux entiers s ou $s - 1$ est divisible par 27 et par 37, donc par 999.

Le carré de s ayant 6 chiffres, le seul cas où s ou $s - 1$ peut être multiple de 999 est $s = 999$, $s - 1 = 998 = x$ qui fournit la solution $999^2 = 998001$, avec $\overline{abc} = 998$ et $\overline{def} = 001$

<u>Deuxième cas</u> : s est divisible par 27 et $s - 1$ est divisible par 37. Il existe alors deux entiers p et q tels que :

$s = 27p$, $s - 1 = 37q$; on en déduit que $27p - 37q = 1$ et $x = pq$.

Comme le carré de s a 6 chiffres, on vérifie que $317 \leq s \leq 999$ d'où $317 \times 318 \leq s(s-1) \leq 999 \times 998$.

Or $999x = s(s-1)$. Donc $100 \leq x \leq 998$.

Une solution (p, q) de l'équation $27p - 37q = 1$ est $(p, q) = (11, 8)$ et les couples solutions sont les couples d'entiers $(p, q) = (11+37k, 8 + 27k)$ où k est un entier quelconque. On vérifie que pour $k = 0$, $pq = 88$ et pour $k \geq 1$, $pq \geq 1680$.

Il n'y a donc pas de solution

<u>Troisième cas</u> : s est divisible par 37 et $s - 1$ est divisible par 27. Il existe alors deux entiers p et q tels que :

$s = 37p$, $s - 1 = 27q$; on en déduit que $37p - 27q = 1$ et $x = pq$.

Une solution (p, q) de l'équation $37p - 27q = 1$ est $(p, q) = (19, 26)$ et les couples solutions sont les couples d'entiers $(p, q) = (19+27k, 26 + 37k)$ où k est un entier quelconque.

On vérifie que pour $k = 0$, $pq = 494$ et pour $k \geq 1$, $pq \geq 2898$.

Il n'y a donc qu'une solution qui est $703^2 = 494209$ et le nombre 494209 est le carré de la somme 494 + 209.

A6 1. $50^n < 7^p < 50^{n+1} \Leftrightarrow n\ln(50) < p\ln 7 < (n+1)\ln(50) \Leftrightarrow n < p\dfrac{\ln 7}{\ln 50} < n+1$.

Comme $\dfrac{\ln 7}{\ln 50} < \dfrac{1}{2}$ (car $7^2 < 50$) et $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\ln 7}{\ln 50}$ (car $7^3 > 50$), on a donc $I_n \le 3$.

Posons $\alpha = \dfrac{\ln 50}{\ln 7}$. $n\ln(50) < p\ln 7 < (n+1)\ln(50) \Leftrightarrow n\alpha < p < (n+1)\alpha$

I_n est donc le nombre d'entiers de l'intervalle $]n\alpha\,;\,(n+1)\alpha[$.

Or, le nombre d'entiers dans un intervalle $]a\,;\,b[$ de $\mathbf{R}$ il y a $[E(b) - E(a)]$ entiers si b n'est pas entier et $[E(b) - E(a) - 1]$ entiers si b est entier.

Ici $(n+1)\alpha$ ne peut être entier p car on aurait alors $7^p = 50^{n+1}$, ce qui est absurde puisque 50 n'est pas divisible par 7. On en déduit que $I_n = E((n+1)\alpha) - E(n\alpha)$.

Or : $n\alpha - 1 < E(n\alpha) \le n\alpha$ et $(n+1)\alpha - 1 < E((n+1)\alpha) \le (n+1)\alpha$.

D'où $(n+1)\alpha - 1 - n\alpha < I_n < (n+1)\alpha - n\alpha$ soit $\alpha - 1 < I_n < \alpha + 1$.

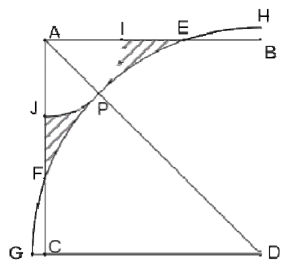
Comme $2{,}01 < \dfrac{\ln 50}{\ln 7} < 2{,}02$, on en déduit que $I_n = 2$ ou $I_n = 3$. On vérifie que $I_{96} = 3$.

2. D'après 1, on sait qu'il existe au moins un entier n_0 tel que $I_{n_0} = 3$ ($n_0 = 96$). Il existe donc un entier p tel que :

$50^{n_0} < 7^p < 7^{p+1} < 7^{p+2} < 50^{n_0+1}$. D'où $50^{2n_0} < 7^{2p} < 7^{2p+1} < 7^{2p+2} < 7^{2p+3} < 7^{2p+4} < 50^{2n_0+2}$.

Ce qui implique que $I_{2n_0} + I_{2n_0+1} = 5$ d'où $I_{2n_0} = 3$ ou $I_{2n_0+1} = 3$. Soit n_1 celui des deux entiers $2n_0$ ou $2n_0 + 1$ pour lequel $I_{n_1} = 3$. On peut réitérer le processus et l'on construit ainsi une infinité d'entiers n_k tels que $I_{n_k} = 3$.

Géométrie



G1 Puisque ABCD est un carré de côté $2\sqrt{2}$, ses diagonales ont pour mesure $2\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 4$.

AP = 1 donc DP = 3. Soit α la mesure en radians de l'angle $\widehat{FDG}$.

Calculons l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle mixtiligne GCF :

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ – Aire (CFD) où $\mathcal{A}_2$ est l'aire du secteur angulaire GFD.

Aire (CFD) $= \dfrac{CD\times CF}{2} = \dfrac{CD\times CF}{2}$ Or $CF = \sqrt{DF^2 - CD^2} = \sqrt{DP^2 - CD^2}$. D'où :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\alpha}{2\pi}\times\pi\times 3^2 - \frac{\sqrt{3^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2}\times 2\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}\alpha - \sqrt{2}\ .$$

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère mixtiligne PFCD :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_1$ où $\mathcal{A}_3$ est l'aire du secteur angulaire DGP.

$\mathcal{A}_3 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{4}\times 3^2 = \dfrac{9\pi}{8}$. $\mathcal{A} = \dfrac{9\pi}{8} - \dfrac{9}{2}\alpha + \sqrt{2}$.

Soit $\mathcal{A}'$ l'aire du triangle mixtiligne JPF.

$\mathcal{A}'$ = aire (ACD) – $\mathcal{A}$ – $\mathcal{A}_4$ où $\mathcal{A}_4$ est l'aire du secteur angulaire GFD.

$$\mathcal{A}' = \boxed{4 - \left(\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{2}\alpha + \sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{8} = 4 - \sqrt{2} - \frac{5\pi}{4} + \frac{9}{2}\alpha.}$$

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite (AD), on en déduit que aire du triangle mixtiligne IPE est égal à $\mathcal{A}'$.

L’aire hachurée est donc égale à $\mathcal{A}'$ soit $\boxed{8-2\sqrt{2}-\frac{5\pi}{2}+9\alpha}$.

Déterminons α : Dans le triangle CFD rectangle en C, $\cos\alpha = \frac{CD}{FD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

α est l’unique réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\alpha \approx 0{,}38$ (arrondi au centième).

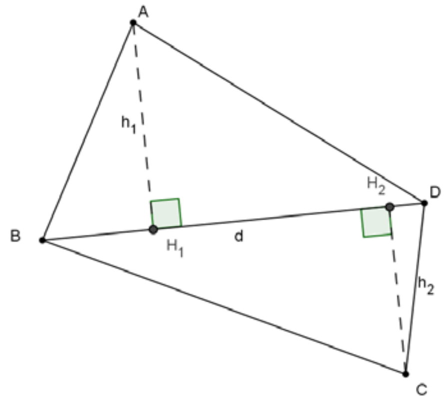
G2 Soit ABCD un quadrilatère vérifiant les conditions de l’énoncé. On suppose que l’on cherche la longueur AC et on pose $d = BC$, $h_1 = AH_1$, $h_2 = CH_2$. D’après l’énoncé :

$$\frac{d\left(h_1+h_2\right)}{2} = 32 \text{ et } d + AB + CD = 16 .$$

On montre facilement que, pour tous nombres a et b, $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

Cela donne ici :

$\sqrt{d\left(h_1+h_2\right)} \leqslant \frac{d+h_1+h_2}{2}$. Or $h_1 \leqslant AB$ et $h_2 \leqslant CD$.



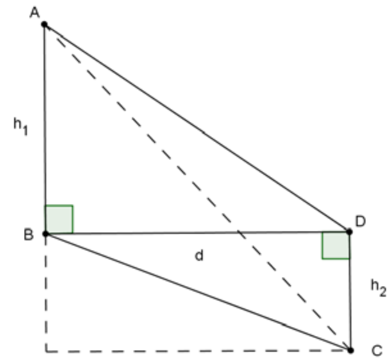
On a donc $8 \leqslant \sqrt{d\left(h_1+h_2\right)} \leqslant \frac{d+h_1+h_2}{2} \leqslant \frac{d+AB+CD}{2} = 8$.

Ceci n’est possible que s’il y a égalité partout :

$d = h_1 + h_2$, $h_1 = AB$ et $h_2 = CD$.

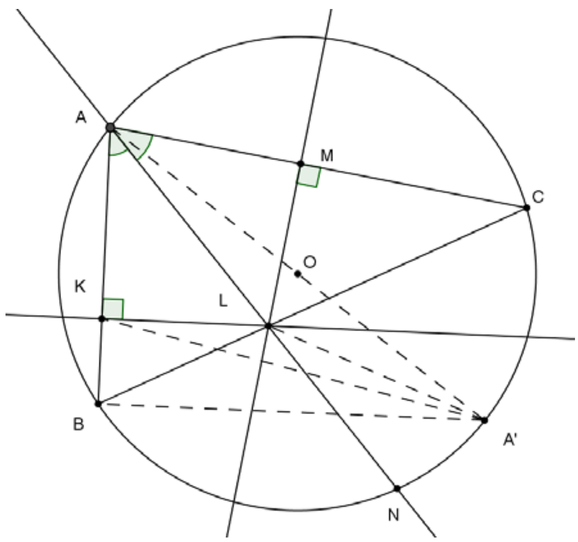
Ainsi $d = 8$ et $AC^2 = d^2 + \left(h_1 + h_2\right)^2 = 8^2 + 8^2$

D’où $AC = 8\sqrt{2}$.



G3

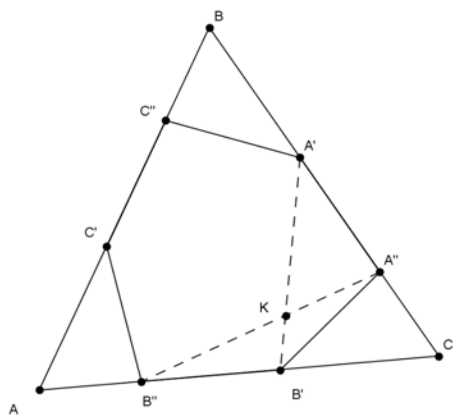
Soit A’ le point diamétralement opposé à A sur le cercle circoı
au triangle ABC. La droite (AB) est perpendiculaire aux droite
(A’B) et (KL) qui sont donc parallèles entre elles.
Les triangles BKL et A’KL ont donc même aire.
On montre de même que les triangles CLM et A’LM ont mêm
On a donc :
$\mathcal{A}$(AKA’M) = $\mathcal{A}$(AKLM) + $\mathcal{A}$(A’KL) + $\mathcal{A}$(A’LM)
Soit :
$\mathcal{A}$(AKA’M) = $\mathcal{A}$(AKLM) + $\mathcal{A}$(BKL) + $\mathcal{A}$(CLM) = $\mathcal{A}$(ABC)
Il ne reste plus qu’à montrer que $\mathcal{A}$(AKA’M) = $\mathcal{A}$(AKNM) c’e
dire que $\mathcal{A}$(KMN) = $\mathcal{A}$(KMA’) ce qui s’obtient en vérifiant qu
droites ‘=(NA’) et (KM) sont perpendiculaires à la droite (AN
la deuxième, on peut considérer la symétrie orthogonale par rapp
la droite (AN)).



Les droites (KM) et (NA’) sont donc parallèles et on a bien $\mathcal{A}$(KMN) = $\mathcal{A}$(KMA’).

G4 L’idée est de démontrer que les droites $\left(A'B''\right)$, $\left(B'C''\right)$ et $\left(C'A''\right)$ sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$.

Notons :



- K le point d'intersection des droites $(\mathrm{A'B'})$ et $(\mathrm{A''B''})$,
- $x = \widehat{\mathrm{A''A'B'}}$ et $y = \widehat{\mathrm{B'B''A''}}$

Comme $\mathrm{A'A''} = \mathrm{A''B'}$, nous avons aussi $x = \widehat{\mathrm{A''B'A'}}$. D'où $\widehat{\mathrm{CA''B'}} = 180 - \widehat{\mathrm{A'A''B'}} = 180 - (180 - 2x) = 2x$

De même $\widehat{\mathrm{B'A''B''}} = y$ et $\widehat{\mathrm{CB'A''}} = 2y$

En raisonnant dans le triangle $\mathrm{CA''B'}$, nous en déduisons que $x + y = 60$

puis que $\widehat{\mathrm{KA''C}} + \widehat{\mathrm{KB'C}} = (y + 2x) + (x + 2y) = 180$

$\widehat{\mathrm{KA''C}} + \widehat{\mathrm{KB'C}} = (y + 2x) + (x + 2y) = 180$.

Les points $\mathrm{K}, \mathrm{A''}, \mathrm{C}, \mathrm{B'}$ sont donc cocycliques et $\widehat{\mathrm{KCA''}} = \widehat{\mathrm{KB'A''}} = x$.

Le triangle $\mathrm{KA'C}$ est donc isocèle en K et $\mathrm{KA'} = \mathrm{KC}$. De même $\mathrm{KB''} = \mathrm{KC}$ donc le triangle $\mathrm{A'KB''}$ est isocèle en K. Son angle au sommet a pour mesure $180 - (x + y) = 120$ donc $\widehat{\mathrm{B''A'B'}} = 30$.

Nous pourrions de même montrer que $\widehat{\mathrm{B''A'C'}} = 30$ et en déduire que la droite $(\mathrm{A'B''})$ est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{B'A'C'}}$.

Les droites $(\mathrm{A'B''})$, $(\mathrm{B'C''})$ et $(\mathrm{C'A''})$ sont bien des bissectrices du triangle $\mathrm{A'B'C'}$.

G5 On suppose que le triangle ABC est direct comme sur les figures ci-dessous. Cela signifie que les carrés ABED, BCGF et ACHI construits à l'extérieur du triangle ABC sont tels que les angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AI}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BE}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CG}}\right)$ ont pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radians .

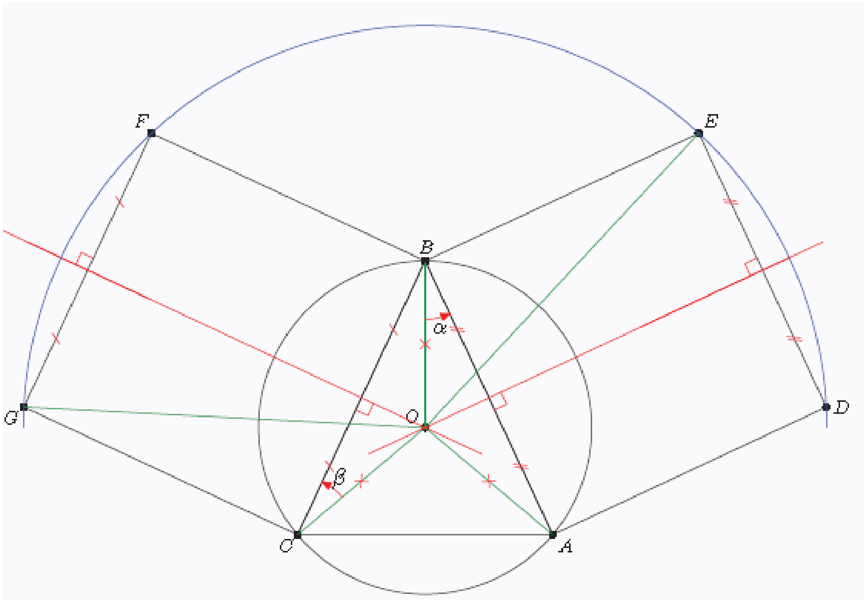
Supposons que les quatre points D, E, F, G sont cocycliques. Alors le centre du cercle sur lequel ils sont situés est à le point d'intersection des médiatrices de [DE] et [FG] qui sont également médiatrices de [AB] et [BC]. Ce centre O est donc aussi le centre du cercle circonscrit à ABC, dont nous désignerons le rayon par *r*.

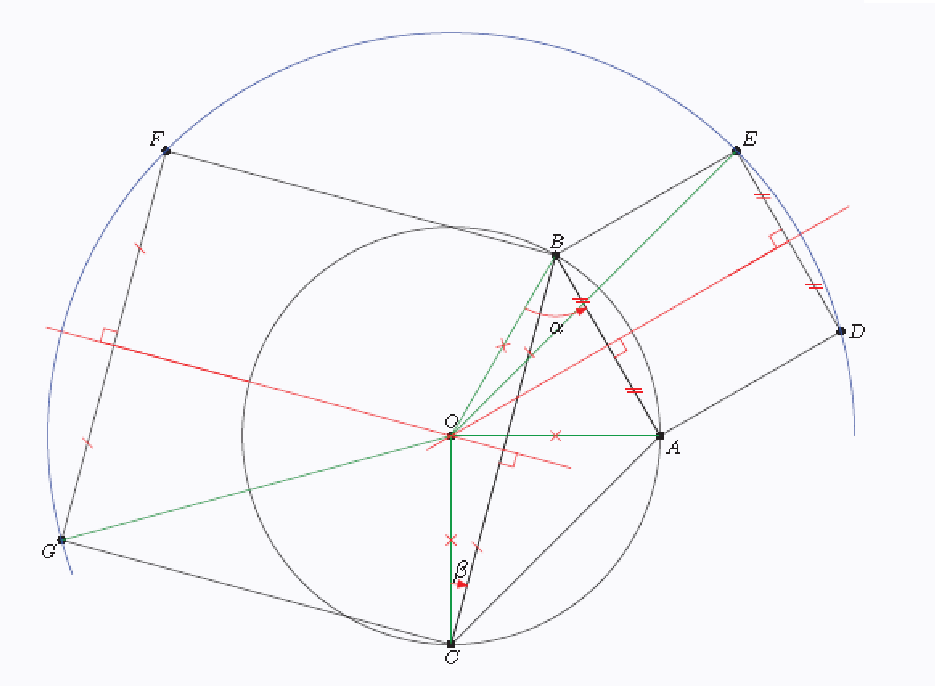
Nous allons donc chercher une condition pour avoir l'égalité OE = OG, par symétrie par rapport aux médiatrices mentionnées ci-dessus, on aura : OD = OE = OF = OG.

Posons $\left(\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) = \alpha$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{CO}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \beta$. On choisit ces mesures comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, ce qui est toujours possible car ce sont des mesures d'angles de triangles rectangles dont l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à ABC. Nous avons donc :

$$\mathrm{OE}^2 = \mathrm{BO}^2 + \mathrm{BE}^2 - 2\mathrm{BO} \times \mathrm{BE} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BE}}\right) \quad \text{soit} \quad \mathrm{OE}^2 = r^2 + 4r^2\cos^2\alpha - 4r^2\cos\alpha\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{OE}^2 = r^2\left(1 + 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha\right) = r^2\left(3 + 2\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\right) \quad \text{soit} \quad \mathrm{OE}^2 = r^2\left(3 + 2\sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$





En menant les mêmes calculs pour OG, quel que soit le cas de figure et en prenant la précaution d'exprimer α et β comme mesure d'angles orientés comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

Dans le cas de la deuxième figure β est négatif, dans le cas de la première figure β est positif, mais dans les deux cas,

$$\mathrm{OG}^2 = r^2\left(3+2\sqrt{2}\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Pour avoir l'égalité OE = OG, il est donc nécessaire et suffisant d'avoir $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

Ce qui se traduit puisque α et β sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, il n'y a que deux possibilités :

$2\alpha-\frac{\pi}{4}=2\beta-\frac{\pi}{4}$ ou $2\alpha-\frac{\pi}{4}=-2\beta+\frac{\pi}{4}$ car les valeurs considérées sont comprises entre $-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Il est donc nécessaire et suffisant d'avoir $\alpha=\beta$ ou $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

Comme le triangle OBC est isocèle, $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CO}},\overrightarrow{\mathrm{CB}}}\right)=\beta=\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BO}}}\right)$. Les deux seules possibilités se ramènent donc à l'une des conditions suivantes :

- La droite (BO) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ car $\alpha = \beta$.

  Le triangle ABC est alors isocèle en B car on a $BC = BA = 2r\cos\alpha$.

  La bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$ est alors un axe de symétrie du triangle, il devient évident que cette condition suffit pour obtenir OD = OE = OF = OG.

- ABC doit être tel que son angle de sommet B ait pour mesure $\frac{\pi}{4}$ comme sur la deuxième figure car

  D'après les calculs qui précèdent, cette condition suffit pour obtenir $OE^2 = OG^2$.

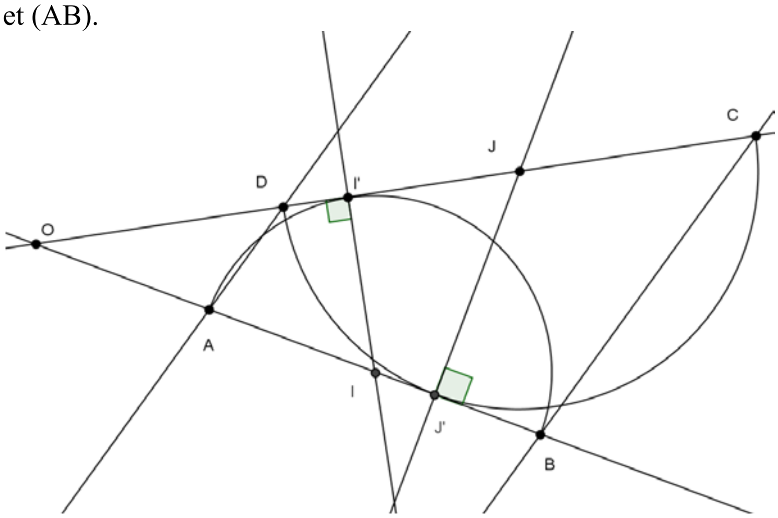
  Pour que les six sommets D, E, F, G, H et I de nos carrés soient cocycliques, on exprime les mêmes conditions en

  Comme il est impossible d'avoir les trois angles de notre triangle mesurant $\frac{\pi}{4}$, il est impossible qu'il ne soit isocèle en aucun sommet, il nous reste donc deux possibilités :

- ABC est isocèle en deux sommets, cela implique qu'il est équilatéral ;
- ABC est isocèle en un seul sommet, en conséquence, les deux autres points sont les sommets d'angles dont la mesure est $\frac{\pi}{4}$, il est alors rectangle isocèle.

  Ceci termine notre démonstration, car d'après les calculs qui précèdent, n'importe laquelle de ces deux conditions suffit pour obtenir D, E, F, G, H et I cocycliques.

G6 Premier cas **:** AB) est parallèle à (CD)
Alors le cercle de diamètre [CD] est tangent à (AB) si et seulement si AB = CD c'est-à-dire (puisque le quadrilatère est convexe) ABCD est un parallélogramme c'est-à-dire (BC) est parallèle à (CD).
Deuxième cas : (AB) est sécante à (CD) en un point O. Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] et soit I' et J' les projetés orthogonaux respectifs de I et J sur (CD) et (AB).



Les triangles OII' et OJJ' sont rectangles respectivement en I' et J' et ont l'angle $\widehat{AOD}$ en commun, donc :

$\cos\widehat{AOD} = \frac{II'}{OI} = \frac{JJ'}{OJ}$.

Alors $\frac{OA}{OB} = \frac{OI - IA}{OI + IA} = \frac{OI - II'}{OI + II'} = \frac{OJ - JJ'}{OJ + JJ'}$

D'autre part $\frac{OD}{OC} = \frac{OJ - JC}{OJ + JC}$

Les droites (AD) et (BC) sont parallèles si et seulement si $\frac{OD}{OC} = \frac{OA}{OB}$

c'est-à-dire JJ' = JC.
Ceci signifie que la droite (AB) est tangente au cercle de diamètre [CD].

Probabilités

P1 Notons $G(p, f)$ la somme remportée par Tic si son score est $S - p$ alors que le score de Tac est $S - f$.
On admet que les 2 joueurs se sont réparti la somme en fonction de leur probabilité de gain.
A l'étape précédente, les scores sont soit $(p - 1, f)$ soit $(p, f - 1)$ et comme ils sont équiprobables, on a donc :

$\boxed{G(p,f) = \frac{1}{2}\big(G(p-1,f) + G(p,f-1)\big)}$.

Si $p = 0$, le score de Tic est S alors que le score de Tac est $S - f$ ($f \geq 1$), son gain est de 102,40.
Donc $\boxed{G(0,f) = 102{,}40}$.
Si $f = 0$, le score de Tac est S, alors que le score de Tac est $S - p$ ($p \geq 1$), Donc $\boxed{G(0,f) = 0}$ (puisque c'est Tac qui remporte la somme).
Comme à l'interruption du jeu, $G(0,f) = 102{,}40$
De proche en proche, on établit le tableau suivant :

f \ p	0	1	2	3	4	5	6
0		0	0	0	0	0	0
1	102,4	51,2	25,6	12,8	6,4	3,2	1,6
2	102,4	76,8	51,2	32	19,2	11,2	6,4
3	102,4	89,6	70,4	51,2	35,2	23,2	14,8
4	102,4	96	83,2	67,2	51,2	37,2	26
5	102,4	99,2	91,2	79,2	65,2	51,2	38,6
6	102,4	100,8	96	87,6	76,4	63,8	51,2
7	102,4	101,6	98,8	93,2	84,8	74,3	62,75
8	102,4	102	100,4	96,8	90,8	82,55	72,65

D'après le tableau, ci-dessus, G(6, 8) = 72,5 ce qui correspond à des scores respectivement égaux à S – 6 et S – 8.
Comme ils se sont arrêtés à 16 lancers, on a : (S – 6) + (S – 8) = 16 d'où S = 15.
Donc p=6 et S=15.

Montrons qu'il n'y a pas d'autre solution avec deux points d'écart.
Remarques préliminaires : D'après la définition de G, on a $G(n,k) = 102{,}40 - G(k,n)$, en particulier, pour tout $n \geq 1$,
$G(n,n) = \dfrac{102{,}40}{2} = 51{,}20$.
D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$, $G(n+1,k) < G(n,k)$
(car $G(n+1,k)$ est le gain de Tic pour un score $S - n - 1$ et il est inférieur au gain correspondant au score $S - n$).
On démontre par récurrence que la suite $\big(G(n,n+2)\big)$ est strictement décroissante.
La seule solution du problème est donc p=6 et S=15.

P2 Soit $P(x)$ la probabilité que le programme génère un nombre y plus petit que x ($0 < y < x$). La probabilité que le programme génère un nombre z supérieur ou égal à x ($x \leq z < 1$) est égale à $1 - P(x)$. Comme cette dernière probabilité est identique à celle que le nombre soit plus petit que $1 - x$, on obtient donc que $P(x) + P(1 - x) = 1$.
D'après l'énoncé : $P(x) = 3P\left(\dfrac{x}{4}\right)$. On en déduit que :

$$P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - P\left(\frac{20}{21}\right) \;;\; P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - 3P\left(\frac{5}{21}\right) \;;\; P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - 3\left[1 - P\left(\frac{16}{21}\right)\right] \;;\; P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - 3\left[1 - P\left(\frac{4}{21}\right)\right] \;;$$

$$P\left(\frac{1}{21}\right) = 1 - 3\left[1 - 3 \times 3P\left(\frac{1}{21}\right)\right] = 1 - 3 + 27P\left(\frac{1}{21}\right). \text{ D'où : } 26P\left(\frac{1}{21}\right) = 2 \text{ et } P\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{1}{13}$$

P3 1. Ne rien marquer revient à ne faire apparaitre quatre faces deux à deux distinctes. L'équiprobabilité est assurée par l'énoncé. Le nombre total de possibilités est 20^4 . Le nombre de cas « favorables » est $20 \times 19 \times 18 \times 17$. La probabilité cherchée est $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{20^4} = \dfrac{2907}{4000} \approx 0{,}727$.

2. On a ici la loi binomiale de paramètres $n = 4$, $p = \dfrac{1}{20}$. Soit N_a le nombre de fois où le nombre a est obtenu.
N_a prend les valeurs, 0, 1, 2, 3 et 4.

$$p(N_a = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{4-k} .$$

3. X_a prend les valeurs 0 et 1. $p(X_a = 0) = p(N_a = 0) + p(N_a = 1) = \dfrac{157\,757}{160\,000}$ et
$p(X_a = 1) = 1 - p(X_a = 0) = \dfrac{2\,243}{160\,000}$. Pour chaque valeur de a, le gain est nul si X_a prend la valeur 0 et le gain vaut a si X_a prend la valeur 1. Le gain total est donc $G = \displaystyle\sum_{a=1}^{a=20} a\,X_a$.

Le nombre de points que je peux espérer en moyenne gagner est par linéarité de l'espérance : $E(G)=\sum_{a=1}^{a=20} a\,E(X_a)$. Or, pour tout a compris entre 1 et 20, $E(X_a)=0\times p(X_a=0)+1\times p(X_a=1)=\frac{2243}{160000}$ donc

$$E(G)=\frac{2\ 243}{160\ 000}\sum_{a=1}^{a=20} a\ =\frac{2\ 243}{160\ 000}\times\frac{20\times 21}{2}=\frac{47\ 103}{16\ 000}\ .$$

En moyenne, on peut espérer un gain d'environ 2,94 points.

4. On cherche les différentes façons d'obtenir un gain égal à 8 :

- 2 fois la face 8 et pas d'autre double : 6 possibilités pour les « faces 8 » et $19\times 18=342$ possibilités pour le choix des autres faces, soit au total dans ce cas, $6\times 342=2052$ possibilités ;
- 3 fois la face 8 et la quatrième face autre que 8 : 4 possibilités pour les « faces 8 » et 19 possibilités pour le choix de l'autre face soit au total dans ce cas, $4\times 19=76$ possibilités ;
- 4 fois la face 8 : une seule possibilité ;
- 2 fois la face 1 et 2 fois la face 7 : 6 possibilités ;
- 2 fois la face 2 et 2 fois la face 6 : 6 possibilités ;
- 2 fois la face 3 et 2 fois la face 5 : 6 possibilités ;

Au total 2 147 possibilités et une probabilité égal à $\frac{2\ 147}{169\ 000}\approx 0,013$

5. Le gain pour 11 – 7 – 2 – 2 est 2.

<u>1er cas :</u> je relance les 4 dés. L'espérance de gain est celle calculée au 3, soit $E(G_1)=\frac{47\ 103}{16\ 000}\approx 2,94$.

<u>2ème cas :</u> je conserve le 11 et on relance 3 dés. Le nombre de possibilités est alors $20^3=8000$.

En reprenant N_a le nombre de fois où le nombre a est obtenu, l'espérance de gain est $E(G_2)=\sum_{a=1}^{20} a\times p(N_a\geq 2)$.

On remplace 11 par x et on distingue deux sous cas : a est égal à 11 ou différent de 11.

Si a = 11, alors puisque le 11 est conservé, N_{11} peut prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4 et on cherche $p(N_{11}\geq 2)$.

Or $p(N_{11}\geq 2)=1-p(N_{11}=1)=1-\frac{19^3}{20^3}=\frac{1141}{8000}$.

Si $a\neq 11$, alors la variable N_a peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3 puisqu'on conserve le 11 et on cherche $p(N_a\geq 2)$.

$$p(N_a\geq 2)=1-p(N_a=0)-p(N_a=1)=1-\frac{19^3}{20^3}-\frac{3\times 19^2}{20^3}=\frac{58}{8000}$$

D'où $E(G_2)=\sum_{\substack{a=1\\a\neq 11}}^{20} a\times p(N_a\geq 2)+11\times p(N_{11}\geq 2)=\sum_{a=1}^{20} a\times\frac{58}{8000}-11\times\frac{58}{8000}+11\times\frac{1141}{8000}$.

Soit $E(G_2)=\frac{58}{8000}\times\frac{20\times 21}{2}+\frac{11913}{8000}=\frac{24093}{8000}\approx 3,012$

<u>3ème cas :</u> je conserve les deux 2 et je relance deux dés :

- On obtient deux faces distinctes (l'une d'elles pouvant être un 2) ou un double 2 et le gain est de 2 points avec 400 – 19 possibilités dans ce cas ;
- On obtient un double a ($a\neq 2$) : le gain sera alors de $2+a$ points

En relançant deux dés, il y a au total 400 possibilités.

L'espérance de gain est alors

$$E(G_3)=\frac{1}{400}\left((400-19)\times 2+\sum_{\substack{a=1\\a\neq 2}}^{20}(2+a)\right)=\frac{1}{400}\left(400\times 2-2\times 19+2\times 19+(1+3+...+19+20)\right)$$

$$E(G_3)=\frac{1}{400}\left(800+(1+2+3+...20)-2\right)=...=\frac{63}{25}\approx 2,52$$

C'est le deuxième cas qui est donc le plus intéressant.

6. Dans la situation $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, on ne marque aucun point.

1^er cas : je relance les quatre dés et l'espérance de gain est $E(G_1) = \frac{47\,103}{16\,000} \approx 2{,}94$

2^ème cas : je conserve un dé et je relance trois dés. En reprenant N_a le nombre de fois où le nombre a est obtenu, l'espérance de gain est $E(G_2) = \sum_{a=1}^{20} a \times p(N_a \geq 2)$. On remplace 11 par et on obtient

$$E(G_2) = \sum_{\substack{a=1\\a\neq 11}}^{20} a \times p(N_a \geq 2) + x \times p(N_{11} \geq 2) = \sum_{\substack{a=1\\a\neq 11}}^{20} a \times \frac{58}{8000} + x \times \frac{1141}{8000} = \sum_{a=1}^{20} a \times \frac{58}{8000} + x \times \left(\frac{1141}{8000} - \frac{58}{8000}\right) = \frac{1083}{8000}x + \frac{12180}{8000}$$

.L'espérance de gain s'exprime donc comme une fonction affine de la valeur du dé conservé. Si $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, alors $E(G_2) \geq \frac{1}{8000}(1083 \times 4 + 12180)$ soit $E(G_2) \geq 2{,}64$ et le gain moyen est d'autant plus élevé que x l'est. On a donc intérêt à conserver a_1 avec $E(G_2) = \frac{1}{8000}(1083 \times a_1 + 12180)$.

3^ème cas : je conserve deux dés et je relance deux dés. Le nombre de points obtenu sera alors non nul si on obtient un ou deux double et il sera d'autant plus élevé que les valeurs conservées seront les plus grandes. On conserve donc a_1 et a_2 . Les situations favorables sont :

- On obtient a_1 mais pas a_2 et on marque a_1 points : on a alors 2 possibilités pour a_1, 19 possibilités pour le deuxième dé mais en comptant deux fois le résultat a_1-a_1. Au total, on a donc dans ce cas 37 possibilités ;
- On obtient a_2 mais pas a_1 et on marque a_2 points : au total, on a encore dans ce cas 37 possibilités ;
- On obtient a_1 et a_2 et on marque $a_1 + a_2$ points : cela correspond aux deux résultats a_1-a_2 et a_2-a_1 ;
- On obtient un double a ($a \neq a_1$ et $a \neq a_2$) et on marque a points : il y a alors 18 possibilités.

L'espérance de gain est $E(G_3) = \frac{1}{400}\left(37(a_1 + a_2) + 2(a_1 + a_2) + \sum_{\substack{a=1\\a\neq a_1\\a\neq a_2}}^{20} a\right) = \frac{1}{400}\left(38(a_1 + a_2) + 210\right)$

Soit $E(G_3) = \frac{1}{200}(19a_1 + 19a_2 + 105)$

4^ème cas : je conserve trois dés et je relance un seul dé. Les situations favorables sont celles ou l'une des trois faces conservées apparait une deuxième fois. On a donc intérêt à conserver les trois faces les plus élevées (a_1, a_2 et a_3) et on relance le dé correspondant à a_4.

Si a_1 (respectivement a_2, a_3) sort, on gagne a_1 (respectivement a_2, a_3) points avec une probabilité égale à $\frac{1}{20}$ et dans les autres situations, on ne marque rien avec une probabilité égale à $\frac{17}{20}$.

L'espérance de gain est donc $E(G_4) = \frac{1}{20}(a_1 + a_2 + a_3)$

Il s'agit maintenant de comparer les différentes espérances obtenues.

- $E(G_4) \geq E(G_1)$ équivaut à $\frac{1}{20}(a_1 + a_2 + a_3) \geq \frac{47\,103}{16\,000}$ soit $a_1 + a_2 + a_3 \geq 20 \times \frac{47\,103}{16\,000}$ avec

$20 \times \frac{47\,103}{16\,000} \approx 58{,}88$

Or $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ donc $a_1 + a_2 + a_3 \leq 18 + 19 + 20$ soit $a_1 + a_2 + a_3 \leq 57$.

On a donc toujours $\boldsymbol{E(G_4) < E(G_1)}$

- $E(G_2) \geq E(G_1)$ équivant à $\dfrac{1}{8\,000}(1083 \times a_1 + 12180) \geq \dfrac{47\,103}{16\,000}$ soit $a_1 \geq 10,5$

Donc $\boldsymbol{E(G_2) \geq E(G_1) \Leftrightarrow a_1 \geq 11}$

- $E(G_2) - E(G_3) = \dfrac{1}{8\,000}(1083 \times a_1 + 12180) - \dfrac{1}{200}(19a_1 + 19a_2 + 105)$

Soit $E(G_2) - E(G_3) = \dfrac{1}{8\,000}(323(a_1 - a_2) - 437a_2 + 7\,980)$

Comme $a_1 > a_2$ la différence $E(G_2) - E(G_3)$ sera minimale pour $a_1 - a_2 = 1$ et $a_2 = 19$.

Alors $E(G_2) - E(G_3) = \dfrac{1}{8\,000}(323 - 437 \times 19 + 7\,980) = 0$. On a donc toujours $\boldsymbol{E(G_2) \geq E(G_3)}$

Conclusion :

Si $a_1 \leq 10$, on a $E(G_3) < E(G_2) < E(G_4)$ et $E(G_4) < E(G_1)$ donc G_1 a la plus forte espérance : on a intérêt à relancer les quatre dés.

Si $a_1 \geq 11$, on a $E(G_4) < E(G_1) \leq E(G_2)$ et $E(G_3) \leq E(G_2)$ donc G_2 a la plus forte espérance : on a intérêt à conserver le dé correspondant à a_1 et à relancer les trois autres.

P4 h est la fonction définie sur [0, 1] par : $h(0) = 0$ et, pour tout x de]0, 1], $h(x) = -\dfrac{x\ln(x)}{\ln(2)}$.

On admet que h est continue sur [0, 1].

On définit également la fonction h_1 sur [0, 1] par $h_1(x) = h(x) + h(1-x)$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On appelle incertitude moyenne de X la quantité $h_1(p)$.

Donner la valeur de p pour laquelle $h_1(p)$ est maximum. Commenter ce résultat.

$h_1(p) = -\dfrac{1}{\ln(2)}\left(p\ln(p) + (1-p)\ln(1-p)\right)$.

h_1 est deux fois dérivable sur dérivable sur $]0,1[$: $h_1'(p) = -\dfrac{1}{\ln 2}(\ln(p) - \ln(1-p))$.

$h_1''(p) = -\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{1-p}\right) = -\dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{1}{p(1-p)}$.

Pour tout $p \in]0,1[$, $h_1''(p) < 0$. h'_1 est donc strictement décroissante sur $]0,1[$ et comme $h_1'(0,5) = 0$, on en déduit que : Pour tout $p \in]0;0,5[, h_1'(p) > 0$ et, pour tout $p \in]0,5;1[, h_1'(p) < 0$.

h_1 présente donc un maximum en 0,5 égal à 1.