Éléments de solution

Thème : Nombres, arithmétique

A1 Faire un carré avec des dés

Si on appelle d le premier terme de la suite et a sa raison, le terme de rang n de la suite obtenue est $d + na$. Ce terme, un carré, est congru à d modulo a. Nous étudions donc les restes des carrés modulo a, dans le tableau ci-dessous ;

a \ x	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	1	4	4	1	0
6	0	1	4	3	4	1

Les cases sombres correspondent à des redondances.

On lit le tableau de la manière suivante : si a = 1, tout nombre est congru à 0 modulo a, et les nombres compris entre 1 et 6 aussi. Le premier carré de la suite est 1 si d = 1, 4 si d = 2 ou d = 3 ou d = 4, 9 si d = 5 ou d = 6.
Si a = 2, les carrés des nombres pairs sont congrus à 0, les carrés des impairs à 1. Tout choix de d conduit encore à des solutions. Le premier carré de la suite est 1 si d = 1, 4 si d = 2 ou d = 4, 9 si d = 3 ou d = 5, 16 si d = 6.
Si a = 3, seuls d = 1, d = 4 – congrus à 1 modulo 3 – et d = 3 et d = 6 – congrus à 0 modulo 3, peuvent donner des solutions. Le premier carré de la suite est 1 si d = 1, 4 si d = 4, 9 si d = 3 ou d = 6.
Si a = 4, les carrés des nombres pairs sont congrus à 0, les carrés des impairs à 1. Seuls d = 1, d = 5 – congrus à 1 modulo 4 – et d = 4 – congru à 0 modulo 4, peuvent donner des solutions. Le premier carré de la suite est 9 si d = 1 ou si d = 5, 4 si d = 4.
Si a = 5, seuls d = 5 – congru à 0 modulo 5 – et d =1 et d = 6 – congrus à 1 – et d = 4 – congru à 4 peuvent conduire à des solutions. Si d = 1, le premier carré de la suite est 1, c'est 4 si d = 4, 25 si d = 5 et 16 si d = 6.
Enfin, si a = 6, seuls 1, 3, 4 et 6 conduisent à des solutions. Les premiers carrés des suites correspondantes sont 1, 9, 4 et 36.

A2 Des entiers pratiques

Supposons que p et q soient des nombres pratiques. Soit k un entier naturel inférieur ou égal à pq.

Effectuons la division euclidienne de k par q. Il existe deux entiers a et b tels que :

$k = aq + b$ avec $0 \leq b < q$ et $0 \leq a \leq p$ ($0 \leq k \leq pq$ entraîne $0 \leq aq \leq pq$ d'où $0 \leq a \leq p$).

Puisque p et q sont des nombres pratiques, alors a et b peuvent respectivement s'écrire comme la somme de diviseurs de p et de q. Il existe donc m diviseurs de p notés $c_1, \ldots, c_m$ et n diviseurs de q notés $d_1, \ldots, d_n$ tels que:

$a = c_1 + \ldots + c_m$ et $b = d_1 + \ldots + d_n$.

D'où : $k = (c_1 + \ldots + c_m)q + (d_1 + \ldots + d_n)$ soit $k = c_1q + \ldots + c_mq + d_1 + \ldots + d_n$.

Chacun des nombres c_iq et dj avec $i \in \{1, \ldots m\}$et $j \in \{1, \ldots n\}$ sont des diviseurs de pq.

Puisque $dj < q \leq c_iq$ pout tout i, j, les nombres c_iq et d_j sont distincts, et il en découle que $\boxed{pq \text{ est un nombre pratique}}$.

A3 Un peu long, sur la fin

Parmi les cent nombres que l'on multiplie entre eux pour créer $100\,!$, il y a 50 nombres pairs, dont 25 multiples de 4, dont 12 multiples de 8, dont 6 multiples de 16, dont 3 multiples de 32, et 64. Donc $100\,! = 2^{97} \times P_2$ où P_2 est un entier impair (premier avec 2)

De la même façon, il y a 20 multiples de 5, dont 4 multiples de 25, donc : $100! = 2^{97} \times 5^{24} \times P_{(2,5)}$ où $P_{(2,5)}$ est un entier premier avec 2 et avec 5.

$\boxed{\text{L'écriture décimale de } 100\,! \text{ se termine donc par } \textbf{24 zéros}}$.

A4 **C'est presque $\frac{3}{7}$ en plus compliqué**

On cherche des entiers naturels p et q ($q < 100$) tels que $\left|\frac{p}{q}-\frac{3}{7}\right|$ soit minimal.

$\left|\frac{p}{q}-\frac{3}{7}\right|=\frac{|7p-3q|}{7q}$. Comme $\frac{p}{q}\neq\frac{3}{7}$, $\left|\frac{p}{q}-\frac{3}{7}\right|$ est minimale si $|7p-3q|=1$, q étant le plus grand possible (mais inférieur à 100).

Résolvons l'équation $|7p-3q|=1$ dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. Elle équivaut à : $7p-3q=c$ avec c $\in \{-1, 1\}$ **(E).**

Soit (p_0, q_0) une solution particulière de **(E).**

$7p-3q=c \Leftrightarrow 7p-3q=7p_0-3q_0 \Leftrightarrow 7(p-p_0)=3(q-q_0)$. Comme 3 et 7 sont premiers entre eux, il existe un entier k tel que $p-p_0=3k$ (théorème de Gauss) d'où l'ensemble S des couples (p,q) solutions de (E) :

$S=\{(p_0+3k, q_0+7k), k\in\mathbf{Z}\}$.

Si $c = 1$, une solution particulière de (E) est (1, 2). Les couples solutions de (E) sont les couples $(1+3k, 2+7k), k\in\mathbf{Z}$.

La plus grande valeur possible de q est 93 (pour $k = 13$). Le rationnel correspondant est $\frac{40}{93}$.

Dans ce cas, $\left|\frac{p}{q}-\frac{3}{7}\right|=\left|\frac{40}{93}-\frac{3}{7}\right|=\frac{1}{93\times 7}$.

Si $c = -1$, une solution particulière de (E) est (2, 5). Les couples solutions de (E) sont les couples $(2+3k, 5+7k), k\in\mathbf{Z}$. La plus grande valeur possible de q est 96 (pour $k = 13$). Le rationnel correspondant est $\frac{41}{96}$.

Dans ce cas, $\left|\frac{p}{q}-\frac{3}{7}\right|=\left|\frac{41}{96}-\frac{3}{7}\right|=\frac{1}{96\times 7}$.

Comme $0<\frac{1}{96\times 7}<\frac{1}{93\times 7}$, $\boxed{\text{le rationnel qui répond à la question est } \frac{41}{96}}$.

A5 Effectuons, tout d'abord, quelques calculs :

$a^2 = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{9} + \sqrt{8}$

$a^3 = a^2 \times a = 7 + 5\sqrt{2} = \sqrt{50} + \sqrt{49}$.

$a^4 = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} = \sqrt{289} + \sqrt{288}$

On observe que pour $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $a^n = A_n + B_n\sqrt{2} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{2B_n^2}$ avec A_n et B_n entiers naturels tels que $2B_n^2 - A_n^2 = (-1)^{n+1}$.

Par exemple :

pour $n = 3$, $a^3 = \sqrt{A_3^2} + \sqrt{2B_3^2}$ avec $A_3 = 7$, $B_3 = 5$ et $2B_3^2 - A_3^2 = 50 - 49 = 1$.

pour $n = 4$, $a^4 = \sqrt{A_4^2} + \sqrt{2B_4^2}$ avec $A_4 = 17$, $B_4 = 12$ et $2B_4^2 - A_4^2 = 288 - 289 = -1$.

Démontrons, alors, **par récurrence**, que, pour tout entier n ($n \in \mathbf{N}^*$) il existe deux entiers naturels A_n et B_n tels que :

$a^n = A_n + B_n\sqrt{2}$ avec $2B_n^2 - A_n^2 = (-1)^{n+1}$.

La propriété est vérifiée au rang 1 puisque $a^1 = A_1 + B_1\sqrt{2}$ avec $A_1 = 1$, $B_1 = 1$ et $2B_1^2 - A_1^2 = 1 = (-1)^2$.

Supposons que la propriété soit vérifiée au rang n.

Il existe donc deux entiers naturels A_n et B_n tels que : $a^n = A_n + B_n\sqrt{2}$ avec $2B_n^2 - A_n^2 = (-1)^{n+1}$.

Alors : $a^{n+1} = (A_n + B_n\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1) = (A_n + 2B_n) + (A_n + B_n)\sqrt{2}$

Posons $A_{n+1} = (A_n + 2B_n)$ et $B_{n+1} = (A_n + B_n)$.

Comme A_n et B_n sont des entiers naturels, A_{n+1} et B_{n+1} sont également des entiers naturels. En outre :

$2B_{n+1}^2 - A_{n+1}^2 = 2(A_n + B_n)^2 - (A_n + 2B_n)^2 = A_n^2 - 2B_n^2 = -(-1)^{n+1}$.

D'où $2B_{n+1}^2 - A_{n+1}^2 = (-1)^{n+2}$ et, finalement, la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

Conclusion Pour tout n ($n \in \mathbb{N}^*$), il existe deux entiers naturels A_n et B_n tels que

$a^n = A_n + B_n\sqrt{2} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{2B_n^2}$ avec $2B_n^2 - A_n^2 = (-1)^{n+1}$.

Par conséquent :

si n est pair, $a^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$ avec $k = A_n^2$ (en effet : $2B_n^2 - A_n^2 = (-1)^{n+1} = -1$, d'où $k - 1 = 2B_n^2$)

si n est impair, $a^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$ avec $k = 2B_n^2$ (en effet : $2B_n^2 - A_n^2 = (-1)^{n+1} = 1$, d'où $k - 1 = A_n^2$).

A6 Magnifique

1. La suite (21, 7, b) est superbe si, et seulement si, 21, 7 et b divisent $28 + b$.
Puisque b divise $28 + b$ et b, alors b divise $28 + b - b = 28$. Il existe un entier k_0 tel que $28 = bk_0$
Puisque 7 divise $28 + b$ et 28 alors 7 divise $28 + b - 28 = b$. Il existe donc un entier k_2 tel que $b = 7k_2$.
En remplaçant b par $7k_2$ dans l'égalité $28 = bk_0$, on obtient : $28 = 7k_2k_0$ d'où $k_2k_0 = 4$. Ce qui donne 3 couples (k_0, k_2) possibles : (1, 4), (2, 2) et (4, 1) et 3 valeurs possibles pour b, à savoir 7, 14, 28.
La seule de ces valeurs pour laquelle 21 divise $28 + b$ est $\boxed{b = 14}$.
On vérifie que le couple (21, 7, 14) est superbe.

2. ***a.*** <u>Suites superbes de longueur 2</u> Soit (a, b) une suite superbe de longueur 2. Alors a et b divisent $a + b$.
Donc a divise $a + b - a = b$ et b divise $a + b - b = a$. On en déduit que $a = b$ (a et b sont positifs).
Les suites superbes de longueur 2 sont donc les suites (a, a) où $a \in \mathbb{N}^*$.
<u>Suites superbes de longueur 3</u> Soit (a, b, c) une suite superbe de longueur 3.
La définition d'une suite superbe ne dépendant pas de l'ordre de ses termes, on peut supposer que $a \geq b \geq c$.
On a donc $3a \geq a + b + c \geq 3c$
Par définition d'une suite superbe, a, b et c divisent $a + b + c$. Il existe donc un entier k strictement positif tel que $a + b + c = k\,a$ et comme $3a \geq ka \geq 3c > 0$, on en déduit que $3 \geq k > 0$.

- Si $\boxed{k = 1,}$ $a + b + c = a$ implique $b + c = 0$. Impossible puisque les entiers a, b, c sont strictement positifs.
- Si $\boxed{k = 2}$, $a + b + c = 2a$ implique $b + c = a$.
  Comme b divise $a + c$, on en déduit que b divise $(b + c) + c = b + 2c$ donc **b divise $2c$**. Il existe donc un entier k' ($k' > 0$) tel que **$2c = k'b$**. $b \geq c$ entraîne $2b \geq 2c$ entraîne $2b \geq k'b$. Donc $k' \leq 2$.
    - Si $k' = 1$, alors $b = 2c$ et $a =. b + c = 3c$. On vérifie que **la suite ($3c$, $2c$, c)** où $c \in$ **$\mathbb{N}^*$est superbe**.
    - Si $k' = 2$, alors $b = c$ et $a =. b + c = 2b$. On vérifie que **la suite ($2b$, b, b)** où $b \in$ **$\mathbb{N}^*$ est superbe**.
- Si $\boxed{k = 3}$, $b + c = 2a$ et comme $a \geq b \geq c$, on en déduit que $a = b = c$.
  On vérifie que **la suite (a, a, a)** où $a \in$ **$\mathbb{N}^*$ est superbe**.

Les suites superbes de longueur 3 sont les suites ($3c$, $2c$, c), ($2c$, c, c), (c, c, c) où $c \in \mathbb{N}^*$

b. <u>Suites superbes de longueur 4 dont la somme des termes vaut 2013</u>
La décomposition de 2013 en un produit de facteurs premiers nous donne : $2013 = 3 \times 11 \times 61$.
Notons D_{2013} l'ensemble des diviseurs positifs de 2013. $D_{2013} = \{1, 3, 11, 33, 61, 183 ; 671, 2013\}$.
Soit (a, b, c, d) une suite superbe de longueur 4 répondant à la question. On peut supposer que $a \geq b \geq c \geq d$.
Par définition d'une suite superbe, a, b, c et d appartiennent à D_{2013} et ont pour somme 2013.

Or $a \geq b \geq c \geq d$ entraîne $4a \geq a + b + c + d$ d'où $4a \geq 2013$. On en déduit que $a \geq \dfrac{2013}{4}$ soit $a \geq 503{,}25$.

Donc $a = 671$ ou $a = 2013$ (impossible car b, c et d sont non nuls).
Si $a = 671$, on a alors $b + c + d = 1\,342$ d'où $3b \geq 1\,342$, d'où $b \geq 448$. On en déduit que $b = 671$.
Mais alors $c + d = 671$. Impossible car c et d sont non nuls et deux quelconques des diviseurs de 2013 ne peuvent avoir pour somme 671.
En conclusion : Le problème n'a pas de solution.

3. ***a.*** On a vu que la suite ($3c$, $2c$, c) où $c \in \mathbb{N}^*$ était superbe.

En particulier pour $c = 1$, la suite (1, 2, 3) est superbe et tous ses termes sont distincts .

La suite (1, 2, 3, 1 + 2 + 3) a pour longueur 4. Elle est superbe et tous ses termes sont distincts.
En effet , notons T = 1 + 2 + 3. La somme des termes de la suite (1, 2, 3, T) est égale à 2 T. On a vu que 1, 2, 3 divisait T et d'autre part T divise 2T.

Raisonnons par récurrence pour démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.

La propriété est vérifiée aux rangs 3 et 4.

Soit n un entier naturel supérieur à 3. Supposons qu'il existe une suite superbe $(u_1, u_2, ..., u_n)$ dont les termes sont tous distincts. Posons $T_n = u_1 + u_1 + ... + u_n$ et considérons la suite $(u_1, u_2, ..., u_n, T_n)$. Cette suite a pour longueur $n + 1$. La somme de ses termes, tous distincts, est égale à $2T_n$. De plus $u_1, u_2, ..., u_n$ divisent $2T_n$ puisqu'ils divisent T_n et T_n divise $2T_n$. La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

En conséquence : Pour tout $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.

b. Soit $n \geqslant 2$, supposons qu'il existe une suite superbe $(p_1, p_2, ..., p_n)$ (on supposera que $p_1, p_2, ..., p_n$ sont rangés par ordre croissant) de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.. On en déduit que $p_1 + p_2 + ... + p_n$ est divisible par $p_1, p_2, ..., p_n$. $p_1 + p_2 + ... + p_n$ est donc divisible par $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ (conséquence du théorème de Gauss). D'où $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n \leq p_1 + p_2 + ... + p_n$. Or $2^{n-1} p_n < p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ et $p_1 + p_2 + ... + p_n < np_n$.
Donc $2^{n-1} p_n < np_n$, d'où $2^{n-1} < n$. Ce qui est faux (On peut démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $2^{n-1} \geq n$).

En conclusion : Il n'existe pas de suite superbe de longueur *n* dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.

4. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite arithmétique finie de raison r strictement positive. Supposons que cette suite soit superbe. Soit $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$. On a $S = n\dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

Soit d le pgcd de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Posons, pour tout i compris entre 1 et n, $b_i = \dfrac{a_i}{d}$. Alors $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des entiers premiers entre eux (il n'existe pas d'entier supérieur ou égal à 2 divisant tous les b_i).

Si la suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est superbe, la suite $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ l'est aussi. De plus, la somme de ses termes est $S' = \dfrac{S}{r}$. Et c'est une suite arithmétique de raison $r' = \dfrac{r}{d}$.

r' et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ne peuvent avoir de diviseur commun (distinct de 1) car ce diviseur commun serait commun aux b_i, ce qui est impossible puisque les b_i sont premiers entre eux.

b_n et $b_{n-1} = b_n - r'$ sont premiers entre eux, sinon ils auraient un diviseur commun δ ($\delta \geq 2$), qui serait alors diviseur commun de b_n et $r' = b_n - b_{n-1}$; mais $b_i = b_n - (n - i)r'$ et donc δ diviserait tous les b_i, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux.

Comme b_n et b_{n-1} divisent $S' = n\dfrac{b_1 + b_n}{2}$, alors $b_n \times b_{n-1}$ divise $n\dfrac{b_1 + b_n}{2}$ (conséquence du théorème de Gauss). D'où :
$2b_{n-1}b_n \leq n(b_1 + b_n)$. Puisque $b_1 \geq 1$, que les b_i sont distincts et que la suite (b_i) est strictement croissante, on a : $b_n \geq n$.

Il en résulte que $2b_{n-1} \leq b_1 + b_n$, sinon par produit membres à membres des inégalités $b_n \geq n$ et $2b_{n-1} > b_1 + b_n$, on arrive à une contradiction. Donc $2(b_1 + (n-2)r) \leq b_1 + b_1 + (n-1)r$ d'où $2n - 4 \leq n - 1$ soit $2n - 4 \leq n - 1$ soit $\boxed{n \leq 3}$.

Pour $n = 2$, on a vu (question 2a) que les seules suites superbes sont (a,a) qui ne sont pas arithmétiques de raison strictement positives.

La seule possibilité est donc *n* =3.

5. Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite magnifique avec $a_k < a_{k+1}$ pour tout $k \geq 2$.
Puisque (a_1, a_2) est superbe , on a $\boldsymbol{a_2 = a_1}$.
Puisque $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_3)$ est superbe, on a : $a_3 = a_1$ ou $a_3 = 2a_1$. Mais par hypothèse $a_1 < a_2 < a_3$, donc $\boldsymbol{a_3 = 2a_1}$.
$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_1, 2a_1, a_4)$ est superbe : la somme des termes de la suite étant $4a_1 + a_4$, $2a_1$ doit diviser a_4 et a_4 doit diviser $4a_1$. a_4 est donc un multiple de $2a_1$ qui divise $4a_1$, d'où $a_4 = 2a_1$ ou $a_4 = 4a_1$.
Mais $2a_1 = a_3$, et on doit avoir $a_3 < a_4$, donc la seule possibilité est $\boldsymbol{a_4 = 4a_1}$.
Réciproquement la suite $(a_1, a_1, 2a_1, 4a_1)$ est bien superbe.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier n ($n \geq 2$), on a $a_n = 2^{n-2}a_1$.
La propriété est vérifiée aux rangs 2, 3 et 4.
Supposons que pour un entier n ($n \geq 2$), on ait $a_k = 2^{k-2}a_1$ pour tout entier k compris entre 2 et n et montrons qu'alors $a_{n+1} = 2^{n+1-2}a_1$.
La suite $(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_1, 2a_1, ..., 2^{n-2}a_1, a_{n+1})$ doit être superbe (puisque la suite de départ est magnifique).

Or la somme de ses termes est $S=a_1\left(1+1+2^1+...+2^{n-2}\right)+a_{n+1}$ soit $S=a_1+a_1\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}+a_{n+1}=2^{n-1}a_1+a_{n+1}$.

Comme a_{n+1} divise S, il divise $2^{n-1}a_1=S-a_{n+1}$; mais $a_n=2^{n-2}a_1$ doit diviser aussi S, et comme $2^{n-2}a_1$ divise $2^{n-1}a_1$, $2^{n-2}a_1$ doit diviser $a_{n+1}=S-2^{n-1}a_1$. Il existe donc deux entiers naturels q et q' tels que :

$a_{n+1}=q2^{n-2}a_1$ et $2^{n-1}a_1=q'a_{n+1}$. On en déduit que $qq'=2$, ce qui donne $q = 1$ et alors $a_n=a_{n+1}$ ce qui est exclu ou $q=2$, et alors $a_{n+1}=2^{n-1}a_1$.

La suite ainsi obtenue ($a_1, a_2,..., a_n, a_{n+1}$) est superbe puisqu'elle a pour somme $2^{n-1}a_1+2^{n-1}a_1 = 2^n a_1$, divisible par a_1 et par tous ses autres termes $a_k = 2^{k-2} a_1$ pour $2 \le k \le n+1$.

Conclusion : Pour tout $n \ge 2$, $a_n = 2^{n-2}a_1$.

Les seules suites magnifiques $(a_k)_{k\ge 1}$ avec $a_k < a_{k+1}$ pour $k \ge 2$, sont celles où $a_k = 2^{k-2}a_1$ pour $k \ge 2$ et a_1 entier naturel non nul (alors, pour tout $n \ge 1$, $a_1 + a_2 +...+ a_n = a_{n+1}$).

6. Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit ($a_1, a_2,\ldots, a_n$) une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.

a. Pour tout entier n ($n \ge 2$), la suite ($a_1, a_2,..., a_n$) d'entiers strictement positifs tous distincts peut se prolonger en une suite superbe de longueur nM en lui rajoutant $M-1$ fois la séquence $a_1,a_2,...,a_n$, avec $M = \text{ppcm}(a_1,a_2,...,a_n)$.

En effet la somme des nM termes de cette suite est égale à M ($a_1 + a_2 +...+ a_n$), divisible par chaque terme, chaque terme divisant M.

b. Soit ($a_1, a_2,\ldots, a_n$) une suite de n entiers naturels non nuls et distincts ($n \ge 3$). On peut supposer que les termes sont rangés par ordre croissant. Soit $\boldsymbol{s = a_1 + a_2 +...+ a_n}$. **Comme n** ≥ 3, et les a_i tous distincts, on en déduit que $s \ge 3$.

Soit $b_i=v_i-v_{i-1}$ avec $v_i=\dfrac{s!}{(s-i-1)!}$. v_i divise s!. D'autre part, $b_i=s\times(s-1)\times...\times(s-i)-s\times(s-1)\times...\times(s-i+1)$

d'où $b_i=s\times(s-1)\times...\times(s-i+1)(s-i-1)$ qui est le produit de i+1 entiers, tous distincts et inférieurs à s.

Donc b_i divise s!. $b_1+b_2+...+b_k=v_k-v_0=\dfrac{s!}{(s-k-1)!}-s$

Pour $k = s-2$, cette somme est égale à $s!-s$. Ainsi la somme des $n+s-2$ termes de la suite ($a_1, a_2,\ldots, a_n, b_1, b_2,..., b_{s-2}$) est s!, qui est divisible par tous les a_i et tous les b_i : elle est donc superbe.

Vérifions que tous les termes sont distincts : pour cela on va montrer que $b_1 < b_2 <...< b_{s-2}$ et que b_1 est supérieur à tous les a_i.

- Pour $i \in \{1, 2, ..., s-3\}$, $\dfrac{b_{i+1}}{b_i}=\dfrac{s(s-1)\times...\times(s-i)\times(s-i-2)}{s(s-1)\times...\times(s-i+1)\times(s-i-1)}=\dfrac{(s-i)\times(s-i-2)}{s-i-1}=\dfrac{(s-i-1+1)\times(s-i-2)}{s-i-1}$

  soit $\boxed{\dfrac{b_{i+1}}{b_i}=(s-i-2)+\dfrac{s-i-2}{s-i-1}}$

  Comme $i \le s-3$ on a $(s-i-2)/(s-i-1) > 0$ et $s-i-2 \ge 1$; donc $\dfrac{b_{i+1}}{b_i}>1$ et la suite (b_i) est strictement croissante.
- $b_1= s(s-2)$. $b_1 \ge s$, puisque $s-2 \ge 1$ (car $s \ge 3$). Par ailleurs $a_1 + a_2 +...+ a_n = s!$ et, pour tout i, $0 < a_i < s$.

Finalement pour tout $n \ge 2$, la suite ($a_1, a_2,..., a_n$) d'entiers strictement positifs tous distincts peut se prolonger en une suite superbe de longueur $n + s - 2$ et à éléments tous distincts de somme $s!$, s étant la somme des a_i.

CO1 $\prod$ **comme produit**

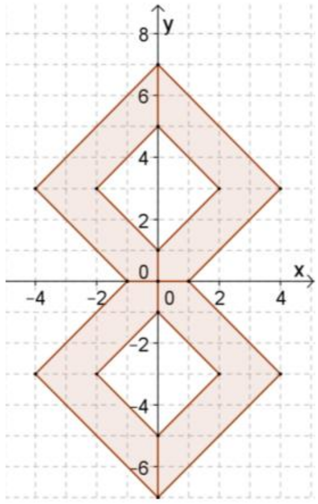
$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k}=\frac{2}{1}\times\frac{3^2}{2^2}\times\frac{4^3}{3^3}\times\ldots\times\frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{2}{1}\times\frac{3^2}{2^2}\times\frac{4^3}{3^3}\times\ldots\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\times\frac{(n+1)^n}{n^n} \text{ d'où } \boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

CO2 Joli dessin

Remarque préliminaire : Si le point de coordonnées (x, y) appartient à l'ensemble cherché, il en est de même des points $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. En repère orthonormé, l'ensemble à représenter est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et par conséquent par rapport à l'origine.

Il suffit donc de restreindre l'étude au premier quadrant puis de compléter par deux symétries successives.



L'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) du premier quadrant et tels que : $2 \le |x| + ||y| - 3| \le 4$ est la réunion des ensembles des points de coordonnées (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x\ge 0, y\ge 3 \\ 2\le x+y-3\le 4\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\ge 0, 0\le y\le 3 \\ 2\le x-y+3\le 4\end{cases}$$

qui équivaut à $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 3 \\ 5-x\le y\le 7-x\end{cases}$ ou $\begin{cases} x\ge 0 \\ 0\le y\le 3 \\ x-1\le y\le x+1\end{cases}$.

CO3 Pour tous nombres réels strictement positifs a, b et c, $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{1}{abc}\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

Or $a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}$. De plus, pour tous réels x et y, on a $\frac{x^2+y^2}{2}\ge xy$.

En remplaçant x et y successivement par a^2 et b^2, b^2 et c^2, c^2 et a^2, nous obtenons :

$$\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Or $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{2}+\frac{b^2\left(c^2+a^2\right)}{2}+\frac{c^2\left(a^2+b^2\right)}{2}$ et, utilisant à nouveau l'inégalité $\frac{x^2+y^2}{2}\ge xy$, on obtient : $\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{2}+\frac{b^2\left(c^2+a^2\right)}{2}+\frac{c^2\left(a^2+b^2\right)}{2}\ge a^2bc+ab^2c+abc^2$.

On a donc $\frac{1}{abc}\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\frac{1}{abc}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge\frac{1}{abc}\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)$.

En simplifiant le membre de droite par *abc*, on en déduit le résultat demandé soit $\boxed{\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}\geq a+b+c}$

On a égalité lorsque $a = b = c$.

CO4 Décomposition en somme d'inverses de carrés

1. On peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c > 0$ d'où $\dfrac{1}{c^2} < \underbrace{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}_{1/4} \leqslant \dfrac{3}{c^2}$ et donc $4 < c^2 \leqslant 12$. Par conséquent : $\boxed{c=3}$.

On en déduit que $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{5}{36}$. Comme $a \geqslant b$, on a $\dfrac{1}{b^2} < \underbrace{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}_{5/36} \leqslant \dfrac{2}{b^2}$. Donc $\dfrac{36}{5} < b^2 \leqslant \dfrac{72}{5}$.

D'où $b=3$ et $a=6$. $\boxed{\text{Il existe donc un triplet unique } (a,b,c) \text{ d'entiers naturels solution de (1), le triplet } (6,3,3)}$.

2. On suppose, par la suite, que les n nombres entiers naturels non nuls x_1, x_2,…, x_n sont rangés par ordre décroissant.

Pour $n = 1$ l'équation admet la solution $x_1 = 1$

Pour $n = 2$, $1=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$ et $\dfrac{1}{x_2^2} < \underbrace{\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}}_{1} \leqslant \dfrac{2}{x_2^2}$. D'où $1 < x_2^2 \leqslant 2$: Impossible.

Pour $n = 3$, $1=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}$ et $\dfrac{1}{x_3^2} < \underbrace{\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}}_{1} \leqslant \dfrac{3}{x_3^2}$ d'où $1 < x_3^2 \leqslant 3$: Impossible.

Pour $n = 4$, $1=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}+\dfrac{1}{x_4^2}$ et $\dfrac{1}{x_4^2} < \underbrace{\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}+\dfrac{1}{x_4^2}}_{1} \leqslant \dfrac{4}{x_4^2}$.

On vérifie que l'unique solution est le quadruplet (2, 2, 2, 2).

Pour $n = 5$, on vérifie que l'équation $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^2}$ n'a pas de solutions entières.

Pour $n \in \{6, 7, 8\}$, on vérifie les résultats suivants :

- l'équation $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{x_i^2}$ admet une solution unique $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(6,3,3,2,2,2)$.
- l'équation $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i^2}$ admet une solution unique $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=(4,4,4,4,2,2,2)$.
- l'équation $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{x_i^2}$ admet une solution unique $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)=(21,14,7,3,3,2,2,2)$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, l'équation $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$ admet un n-uplet d'entiers naturels non nuls solution.

Soit n un entier supérieur ou égal à 6. Supposons qu'il existe n entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ naturels distincts ou non, vérifiant : $1=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+...+\dfrac{1}{x_n^2}$. Considérons les $(n + 3)$ entiers $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 2x_n, 2x_n, 2x_n, 2x_n$.

Alors : $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{4x_n^2}+\frac{1}{4x_n^2}+\frac{1}{4x_n^2}+\frac{1}{4x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=1$. Donc, si la propriété est vérifiée au rang n, elle est vérifiée au rang n + 3 et comme elle est de plus vérifiée au rangs 6, 7 et 8, on en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, l'équation $1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$ admet un n-uplet d'entiers naturels non nuls solution.

CO5 Estimation du nombre moyen de diviseurs d'un nombre

1. 2, 3, 5, 7 ont chacun 2 diviseurs, 1 et eux-mêmes. 4 et 9 ont chacun 3 diviseurs, 6, 8 et 10 ont chacun 4 diviseurs : les entiers de 2 à 10 ont donc au total : 4× 2 + 2 × 3 + 3 × 4 = 26 diviseurs, soit une moyenne de $\frac{26}{9}$.

Le nombre moyen de diviseurs des entiers de 2 à 10 est donc égal à 2,7 à 0,1 près.

ln 10 ≈ 2,3 (à 0,1 près), ln 10 est donc une valeur approchée à 1 près du nombre moyen de diviseurs ($\left|\ln 10-\frac{24}{9}\right|<1$).

2. $d(n)=\sum_{i=1}^{n}\delta(i,n)$ est le nombre de diviseurs de n.

3. Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par i. On a $n = qi + r$ et $0 \leq r < i$.

$$\sum_{j=i}^{n}\delta(i,j)=\underbrace{\delta(i,i)}_{1}+\underbrace{\delta(i,i+1)}_{0}+...+\underbrace{\delta(i,2i)}_{1}+\underbrace{\delta(i,2i+1)}_{0}+...+\underbrace{\delta(i,qi)}_{1}+...+\underbrace{\delta(i,qi+r)}_{0}.$$

On en déduit que $\sum_{j=i}^{n}\delta(i,j)=q$ soit $\sum_{j=i}^{n}\delta(i,j)=\left[\frac{n}{i}\right]$.

$$\sum_{j=1}^{n}d(j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\delta(i,j)=\delta(1,1)+\delta(1,2)+\delta(2,2)+...+\sum_{i=1}^{n-1}\delta(i,n-1)+\sum_{i=1}^{n}\delta(i,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}d(j)=\sum_{j=1}^{n}\delta(1,j)+\sum_{j=2}^{n}\delta(2,j)+....+\sum_{j=i}^{n}\delta(i,j)+...+\sum_{j=n-1}^{n}\delta(n-1,j)+\delta(n,n)$$

$\sum_{j=1}^{n}d(j)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+...+\left[\frac{n}{i}\right]+...+\left[\frac{n}{n}\right]$. Or, pour tous entiers i et n non nul : $\frac{n}{i}-1<\left[\frac{n}{i}\right]\leq\frac{n}{i}$.

Donc $\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}-n<\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+...+\left[\frac{n}{i}\right]+...+\left[\frac{n}{n}\right]\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}$ et, par conséquent :

Pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-1\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d(j)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$.

4. En utilisant l'encadrement $\ln n\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\leq\ln n+1$, on obtient : $\ln n-1\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-1\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d(j)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq\ln n+1$.

La moyenne des diviseurs des entiers de 2 à n appartient donc à l'intervalle $[\ln n-1,\ln n+1]$ de centre ln n et de rayon 1.

CO6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x)=1+\sum_{k=1}^{n}x^k$.

1. Pour $x\neq 1$, $\boxed{f(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}}$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}}$,

$$\boxed{f''(x)=\frac{n(n-1)x^{n+1}-2(n+1)(n-1)x^n+n(n+1)x^{n-1}-2}{(x-1)^3}}$$

$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=f'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ $\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$	$\sum_{k=1}^{n}kx^k=x\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=xf'(x)=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$ $\sum_{k=1}^{n}kx^k=xf'(x)$ soit $\boxed{\sum_{k=1}^{n}kx^k=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}}$
$\sum_{k=0}^{n}(n-k)x^k=nf(x)-xf'(x)$ soit $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(n-k)x^k=\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}}$	Posons $h(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^k$. Alors $h'(x)=\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}$. D'où $\sum_{k=1}^{n}k^2x^k=xh'(x)$ Comme $h(x)=xf'(x)$, $h'(x)=xf''(x)+f'(x)$. Donc $\sum_{k=1}^{n}k^2x^k=x^2f''(x)+xf'(x)$

2. $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{\min(i,j)}=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}2^{\min(i,j)}+\sum_{j=i+1}^{n}2^{\min(i,j)}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}2^j+\sum_{j=i+1}^{n}2^i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}2^j+\sum_{j=i+1}^{n}2^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(2^{i+1}-1+(n-i)2^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(-1+(n-i+2)2^i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(-1+(n-i+2)2^i\right)=-(n+1)+(n+2)\sum_{i=0}^{n}2^i-\sum_{i=0}^{n}i2^i$$

$\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$ et pour $x\neq 1$, $\sum_{k=1}^{n}kx^k=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$, donc $\sum_{i=0}^{n}i2^i=\sum_{i=1}^{n}i2^i=n2^{n+2}-(n+1)2^{n+1}+2$.

Par conséquent : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{\min(i,j)}=-(n+1)+(n+2)\left(2^{n+1}-1\right)-\left(n2^{n+2}-(n+1)2^{n+1}+2\right)$ soit :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{\min(i,j)}=-5-2n+6n\times 2^n}$$

CO7

1. et **2.**

Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes ($n \geq 2$). Soit τ la fonction définie sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ par :

$\tau(k) = k$ pour tout k différent de i et j, $\tau(i) = j$ et $\tau(i) = j$. Soit $P = (p_{kl})$ la matrice n lignes, n colonnes telle que pour tous entiers k et l compris entre 1 et n : $p_{kl} = \delta_{k,\,\tau(l)}$ sachant que $\delta_{k,\,\tau(l)} = 1$ si $k = \tau(l)$ et $\delta_{k,\,\tau(l)} = 0$ sinon.

Alors : le produit PA échange les lignes i et j de A et le produit AP échange les colonnes i et j de A.

Thème : Fonctions

F1 Encore et toujours le second degré

Soit Δ la différence entre le maximum et le minimum sur l'intervalle [0,1]de la fonction f définie sur **R** par :

$$f(x) = x^2 - 2bx - 1.$$

Sur **R**, la fonction trinôme f admet un minimum en b, égal à $-\left(b^2+1\right)$.

Elle est décroissante sur $]-\infty, b]$, croissante sur $[b, +\infty[$. Le maximum de f dépend de la position de b par rapport à [0, 1].

Premier cas : $b < 0$

Puisque l'intervalle [0, 1] est inclus dans $[b, +\infty[$ et que f est croissante sur $[b, +\infty[$, on en déduit que, sur [0, 1], le minimum de f est atteint en 0 et son maximum en 1. $\Delta = f(1) - f(0) = -2b + 1$.

Δ ne peut pas être égale à 1 pour $b < 0$.

Deuxième cas : $b = 0$

$f(x) = x^2 - 1$. f étant croissante sur [0, 1], son minimum est $f(0) = -1$, son maximum $f(1) = 0$ et $\Delta = 1$.

Troisième cas : $b > 0$

- Si $\boxed{0 < b \leq 1}$, f est décroissante sur $[0, b]$, croissante sur $[b, 1]$. le minimum de f est atteint en b et vaut $-\left(b^2+1\right)$ et son maximum est le plus grand des deux réels $f(0) = -1$ et $f(1) = -2b$.
    - Si $0 < b \leq 0{,}5$, $\max(f(0), f(1)) = f(1) = -2b$.

      $\Delta = f(1) - f(b) = -2b + \left(b^2+1\right) = (b-1)^2$ qui ne peut pas être égal à 1.
    - Si $0{,}5 \leq b \leq 1$, $\max(f(0), f(1)) = f(0) = -1$. $\Delta = f(0) - f(b) = -1 + \left(b^2+1\right) = b^2$.

      Pour $0{,}5 \leq b \leq 1$, $\Delta = 1$ si, et seulement si $b = 1$.
- Si $\boxed{b > 1}$, f est décroissante sur [0, 1] donc $\Delta = f(0) - f(1) = -1 + 2b$ qui ne peut pas être égal à 1.

$$\boxed{\text{En résumé : } \Delta = 1 \text{ si, et seulement si } b = 0 \text{ ou } b = 1.}$$

F2 Fonction partie entière

1. (a) Pour tout réel x, on a : $x - 1 < [x] \leq x$. Avec $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, on obtient :

$\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 < \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] \leq \sum_{k=1}^{n} x_k$. Comme, pour tout k compris entre 1 et n, $[x_k] \leq x_k < [x_k] + 1$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} [x_k] \leq \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k < \sum_{k=1}^{n} [x_k] + n$. Par conséquent : $\sum_{k=1}^{n} [x_k] - 1 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k - 1 < \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] \leq \sum_{k=1}^{n} x_k < \sum_{k=1}^{n} [x_k] + n$.

D'où : $\sum_{k=1}^{n}[x_k]-1<\left[\sum_{k=1}^{n}x_k\right]<\sum_{k=1}^{n}[x_k]+n$. En tenant compte du fait que $\left[\sum_{k=1}^{n}x_k\right]$ est un entier ainsi que $\sum_{k=1}^{n}[x_k]-1$ et $\sum_{k=1}^{n}[x_k]+n$, on a donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}[x_k]\le\left[\sum_{k=1}^{n}x_k\right]\le\sum_{k=1}^{n}[x_k]+n-1}$

(b) Si $x_1=x_2=...=x_n=x$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n}[x]\le\left[\sum_{k=1}^{n}x\right]\le\sum_{k=1}^{n}[x]+n-1$ soit $n[x]\le[nx]\le n[x]+n-1$. D'où :

$[x]\le\dfrac{[nx]}{n}\le[x]+1-\dfrac{1}{n}<[x]+1$. En conséquence : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } [x]=\left[\dfrac{[nx]}{n}\right]}$.

3. **(a)** Pour tout x réel. $[x]\le x<[x]+1$. D'où $2[x]\le 2x<2[x]+2$. IL y a donc deux cas à envisager, selon que $2[x]\le 2x<2[x]+1$ ou $2[x]+1\le 2x<2[x]+2$.

Le premier cas équivaut à $0\le x-[x]<\dfrac{1}{2}$ (la mantisse de x est strictement inférieure à 0,5). On a alors $[2x]=2[x]=[x]+[x]$.

Si $0\le x-[x]<\dfrac{1}{2}$, on a : $[x]\le[x]+\dfrac{1}{2}\le x+\dfrac{1}{2}<[x]+1$. D'où $[x]=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$. Finalement, $[2x]=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$.

Dans deuxième cas, la mantisse de x est supérieure ou égale à 0,5 (et inférieure à 1).

On a : $[2x]=2[x]+1=[x]+([x]+1)$

Comme $[x]+\dfrac{1}{2}\le x<[x]+1$, on en déduit que $[x]+1\le x+\dfrac{1}{2}<[x]+\dfrac{3}{2}<[x]+2$ et, par conséquent : $[x]+1=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$.

Finalement : $\boxed{[2x]=[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]}$.

(b) $\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{2}\right]$. En remplaçant x par $\dfrac{x}{2^{k+1}}$ dans l'égalité établie précédemment, on obtient :

$\left[\dfrac{x}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{2^k}\right]-\left[\dfrac{x}{2^{k+1}}\right]$. D'où $\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x}{2^k}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x}{2^k}\right]-\sum_{k=2}^{n+1}\left[\dfrac{x}{2^k}\right]$. Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{x}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{2}\right]-\left[\dfrac{x}{2^{n+1}}\right]}$$

F3 Éléments de solution

1. Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \left|\frac{x}{2}\right|$. On a donc $\varphi(x) = f(x) + \lambda|g(x)|$ avec $\lambda = 1$, $f(x) = g(x) = \frac{x}{2}$.

φ est donc du type T_1

<u>Remarque</u> : La fonction ψ définie sur $[-1, 1]$ par $\psi(x) = \frac{x}{2} - \left|\frac{x}{2}\right|$ est aussi de type T_1 (avec $\lambda = -1$, $f(x) = g(x) = \frac{x}{2}$) ; pour x dans $[-1, 0]$, $\psi(x) = x$ et pour x dans $[0;1]$, $\psi(x) = 0$.

2. Soit a, b, c, a', b', c' six réels et, pour tout x de $[-1, 1]$, $t_1(x) = ax^2 + bx + c$ et $t_2(x) = a'x^2 + b'x + c'$. Puisque $t_1(0) = t_2(0)$, on a $c = c'$. Posons, pour tout x de $[-1, 1]$, $g(x) = \frac{t_2(x) - t_1(x)}{2}$.

Donc $g(x) = \frac{(a'-a)x^2 + (b'-b)x}{2}$.

Pour tout x de $[-1, 1]$, $|g(x)| \le \frac{|a'-a|x^2 + |b'-b| \times |x|}{2}$. Si $|x| \le 1$, alors $0 \le x^2 \le |x| \le 1$ d'où $|g(x)| \le k|x|$ avec $k = \frac{|a'-a| + |b'-b|}{2}$.

Posons alors, pour tout x de $[-1, 1]$, $h(x) = |g(x) + kx| - |kx|$.

Pour $x \le 0$, $|g(x)| \le -kx$, et donc $kx \le g(x) \le -kx$, ce qui donne $g(x) + kx \le 0$ et $h(x) = -g(x) - kx - (-kx) = -g(x)$.

Et si $x \ge 0$, $|g(x)| \le kx$, et donc $-kx \le g(x) \le kx$, ce qui donne $g(x) + kx \ge 0$ et $h(x) = g(x) + kx - (kx) = g(x)$.

$\boxed{\text{En résumé, si } x \le 0,\ h(x) = -g(x), \text{ et si } x \ge 0,\ h(x) = g(x).}$

Pour tout x de $[-1, 0[$, $\frac{t_2(x) + t_1(x)}{2} + h(x) = \frac{t_2(x) + t_1(x)}{2} - g(x) = t_1(x) = f(x)$;

Pour tout x de $[0;1]$, $\frac{t_2(x) + t_1(x)}{2} + h(x) = \frac{t_2(x) + t_1(x)}{2} + g(x) = t_2(x) = f(x)$

Finalement, pour tout x de $[-1; 1]$, on a :

$f(x) = \frac{t_1(x) + t_2(x)}{2} + h(x) = u(x) + |v(x)|$ avec $u(x) = \frac{t_1(x) + t_2(x)}{2} - |kx|$ et $v(x) = g(x) + kx$.

Montrons que u et v sont de type T_1 :

Les fonctions $x \mapsto \frac{t_1(x) + t_2(x)}{2}$ et $x \mapsto -kx$ définies sur l'intervalle $[-1; 1]$ sont de type T_0. Par suite, u est de type T_1 (avec $\lambda = -1$).

La fonction $x \mapsto g(x) + kx$ définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ est de type T_0. donc, $v : x \mapsto g(x) + kx$ est de type T_1

Donc *f* est de type T_2.

F4 Un marcheur parcourt 12 km en 1 heure.

1. Soit f la fonction qui associe le nombre de km parcourus au temps t écoulé à partir du village de départ A (en heures). f est définie et continue sur $[0;1]$.

Posons $g(t) = f(t + 0{,}5) - f(t)$. g est définie, continue sur $[0; 0.5]$.

$g(0) + g(0{,}5) = f(0{,}5) - f(0) + f(1) - f(0{,}5) = f(1) - f(0) = 12$.

Si $g(0) = 6$, le problème est résolu car on a alors $f(0{,}5) - f(0) = 6$

Supposons que $g(0) < 6$. Alors $g(0{,}5) > 6$ (sinon, on aurait $g(0) + g(0{,}5) < 12$).

Selon le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue sur l'intervalle [0; 0.5], il existe un réel t_0 de cet intervalle tel que $g(t_0)=6$ soit $f(t_0+0{,}5)-f(t_0)=6$.

De même si $g(0)>6$, alors $g(0{,}5)<6$. Et ce cas se traite de façon similaire au précédent.

On en déduit qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel le marcheur parcourt exactement 6 km.

2. Soit h et k les fonctions qui associent au temps t écoulé à partir du village de départ, la distance entre le marcheur et la ville A, respectivement le premier et le second jour. Ces fonctions sont continues sur l'intervalle [12, 13].

On a : $h(12)=k(13)=0$. De plus $h(12)-k(12)<0$ et $h(13)-k(13)>0$.

Comme la fonction $h-k$ est continue sur l'intervalle [12, 13], il existe, selon le TVI, un réel t_0 de l'intervalle [12, 13] annulant la fonction $f-g$ d'où le résultat.

F5 Éléments de solution

1. (a) $1-\cos(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc $\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}$ soit $\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$.

Comme $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}=1$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}}$.

(b) Soit $h:\begin{cases}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}\\ \theta\mapsto\sin(\theta)-\frac{2\theta}{\pi}\end{cases}$. h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(\theta)=\cos(\theta)-\frac{2}{\pi}$.

Comme $0<\frac{2}{\pi}<1$, il existe un réel α unique sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha)=\frac{2}{\pi}$.

h est croissante sur $[0,\alpha]$ ($h'(\theta)\geq 0$), décroissante sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$ ($h'(\theta)\leq 0$). De plus, $h(0)=h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

On en déduit que, pour tout θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h(\theta)\geq 0$ soit $\boxed{\frac{2\theta}{\pi}\leq\sin(\theta)}$.

Par intégration sur $[0,\theta]$ ($\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$) de l'inégalité $\frac{2\theta}{\pi}\leq\sin(\theta)$, on obtient : $\frac{\theta^2}{\pi}\leq 1-\cos(\theta)$.

D'où $\boxed{\cos(\theta)\leq 1-\frac{\theta^2}{\pi}}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}=a$. Posons $k(x)=\frac{1-f(x)}{x^2}-a$.

On a $f(x)=1-x^2(k(x)+a)$ et $\lim\limits_{x\to 0}k(x)=0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, ce qui assure la continuité de f en 0 puisque $f(0)=1$.

On pose, pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\cos(\theta_n)$ avec θ_n dans $[0,\pi]$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\theta_n)=1$. Comme $\theta_n\in[0,\pi]$, on en déduit que pour n suffisamment grand,

$\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'où $\frac{\theta_n^2}{\pi} \leq 1 - \cos(\theta_n)$. D'où : $0 \leq \theta_n \leq \sqrt{\pi(1-\cos(\theta_n))}$. Cet encadrement permet de conclure, avec $\lim_{n\to\infty} \cos(\theta_n) = 1$ que $\boxed{\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0}$.

(b) En remplaçant x par $\frac{x}{2^{n+1}}$ dans la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, on obtient :

$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2\left(f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1$ d'où $\cos(\theta_n) = 2\cos^2(\theta_{n+1}) - 1$ soit $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1})$ et comme pour n suffisamment grand, θ_n et θ_{n+1} appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'égalité $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1})$ entraîne $\theta_n = 2\theta_{n+1}$ à partir d'un certain rang.

Il existe donc un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

(c) On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à N : $\theta_n = \frac{\theta_N}{2^{n-N}}$ et $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$.

Mais, $\lim_{x\to 0} \frac{1-f(x)}{x^2} = a$ et $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$, donc $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\theta_N}{2^{n-N}\frac{x}{2^n}}\right]^2 = 2a$, $a \geq 0$ et $\theta_N = \pm\frac{x}{2^N}\sqrt{2a}$.

D'où $f\left(\frac{x}{2^N}\right) = \cos\theta_N = \cos\left(\frac{x\sqrt{2a}}{2^N}\right)$, puis, par récurrence sur k ($k \leq N$), $f\left(\frac{x}{2^{N-k}}\right) = \cos\left(\frac{x\sqrt{2a}}{2^{N-k}}\right)$, ce qui donne le résultat pour $k = N$.

Thème : Équations - Suites

ES1 Les solutions réelles de l'équation (E) : $x\left(\sqrt{x}+3\right)=4$, si elles existent, appartiennent à $\mathbf{R}^+$.

Posons $y=\sqrt{x}$ **.** (E) devient : $y^3+3y^2-4=0$. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par : $f(y)=y^3+3y^2-4$.

Pour tout réel *y* positif, $f'(y)=3y(y+2)$. $y\geq 0 \Rightarrow 3y(y+2)>0$. *f* est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$ et comme *f*(1) = 0, on en déduit que l'équation $y^3+3y^2-4=0$ possède une solution unique *y* = 1 et que, par suite, l'équation (E) a, elle aussi, une solution unique, *x* = 1.

ES2 Les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ admettent chacune des solutions entières. On en déduit que : $p^2-4q\geq 0$ et $p^2+4q\geq 0$.

Les solutions de $x^2+px+q=0$ sont $x_1=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

Puisque les solutions sont entières, p^2-4q est un carré parfait. Il existe donc un entier positif *m* pour lequel : $p^2-4q=m^2$.

Les solutions de $x^2+px-q=0$ sont $x_3=\dfrac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ et $x_4=\dfrac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$

Puisque les solutions sont entières, p^2+4q est un carré parfait. Il existe donc un entier positif *n* pour lequel : $p^2+4q=n^2$. On a donc, par addition : $2p^2=m^2+n^2$. Or $n\geq m$, car $p^2+4q\geq p^2-4q$.

Donc $p^2=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}n^2=\left(\frac{n+m}{2}\right)^2+\left(\frac{n-m}{2}\right)^2$

Puisque $m^2=p^2-4q$ et $n^2=p^2+4q$, m^2 et n^2 ont la même parité que p^2.

En effet, on obtient m^2 en soustrayant un nombre pair du nombre p^2, tandis que l'on obtient n^2 en additionnant un nombre pair à p^2. Donc *m* et *n* ont la même parité.

On en déduit que $\dfrac{n+m}{2}$ et $\dfrac{n-m}{2}$ sont des entiers. On a donc $p^2=a^2+b^2$, où $a=\dfrac{n-m}{2}$ et $b=\dfrac{n+m}{2}$.

b) Puisque $a=\dfrac{n-m}{2}$ et $b=\dfrac{n+m}{2}$, on a : $n=a+b$ et $m=a-b$.

Or $4q=n^2-p^2=(a+b)^2-(a-b)^2$. D'où : $\boxed{q=\dfrac{ab}{2}}$.

ES3 Variations de *f* : $(\forall x\in\mathbf{R})\ f'(x)=3x(x+2)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ a trois solutions α, β, γ telles que $\alpha < -2 < \beta < 0 < \gamma$. Donc $f(f(x))=0 \Leftrightarrow f(x)=\alpha$ ou $f(x)=\beta$ ou $f(x)=\gamma$.

Toujours d'après les variations de *f*, l'équation $f(x)=\alpha$ a une unique solution (α < – 2). Pour déterminer le nombre de solutions de $f(x)=\beta$ et de $f(x)=\gamma$, il faut tout d'abord comparer β et – 1 ainsi que γ et 3.

$f(-1)=-1+3-1=1$ et $f(3)=27+27-1=53$

x	-2		-1	β		0		γ		3
f	3	↘		0	↘	-1	↗	0	↗	53

. On a donc – 1 < β < 0 < γ <3.

L'équation $f(x)=\beta$ a 3 solutions et l'équation $f(x)=\gamma$ également.

L'équation $f(f(x))=0$ a donc 7 solutions.

ES4 Notons u_k le nombre de médailles distribuées le *k*ième jour ($k \geq 1$).

$u_1=1+\dfrac{m-1}{7}$, $u_2=2+\dfrac{m-u_1-2}{7}$, $u_3=3+\dfrac{m-u_1-u_2-3}{7}$,…, $u_k=k+\dfrac{m-u_1-u_2-...-u_{k-1}-k}{7}$ et

$u_{k+1}=k+1+\dfrac{m-u_1-u_2-...-u_{k-1}-u_k-k-1}{7}$. On a donc : $u_{k+1}-u_k=1+\dfrac{-u_k-1}{7}$, d'où $u_{k+1}=\dfrac{6}{7}(u_k+1)$.

Ramenons l'étude à celle d'une suite géométrique en calculant le réel *c* tel que $c=\dfrac{6}{7}(c+1)$. On trouve *c* = 6 et, en posant, pour tout entier naturel *k*, $v_k=u_k-6$, on obtient, en remplaçant u_k par v_k+6 dans l'égalité $u_{k+1}=\dfrac{6}{7}(u_k+1)$:

$v_{k+1}+6=\dfrac{6}{7}(v_k+7)$ soit $v_{k+1}=\dfrac{6}{7}v_k$. $(v_k)_{k\,\in\,\mathbf{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{6}{7}$.

Pour tout entier naturel *k*, $v_k=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{k-1}v_1$ et $\boxed{u_k=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{k-1}v_1+6}$

Soit $m=u_1+u_2+...+u_n$. On a donc $m=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\dfrac{6}{7}\right)^{k-1}v_1+6\right)=v_1\dfrac{1-\left(\dfrac{6}{7}\right)^n}{1-\dfrac{6}{7}}+6n$ soit $m=7v_1\left(1-\left(\dfrac{6}{7}\right)^n\right)+6n$ (1).

Or, par hypothèse, $u_n=n$ soit $\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}v_1+6=n$. D'où $v_1=\dfrac{n-6}{\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}}$ En remplaçant v_1 par $\dfrac{n-6}{\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}}$ dans l'égalité (1), on obtient : $m=7(n-6)\left(\dfrac{7^{n-1}}{6^{n-1}}-\dfrac{6}{7}\right)+6n$ soit $m=\dfrac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36$. *m* étant un entier, 6^{n-1} doit diviser $(n-6)\times 7^n$ et, puisque 6^{n-1} et 7^n sont premiers entre eux, et 6^{n-1} doit diviser $(n-6)$ d'après le théorème de Gauss.

Voyons si 6^{n-1} peut diviser n-6 :

si *n* = 1 oui , mais cette solution est exclue d'après les hypothèses.

Si *n* > 1, on vérifie (récurrence) que $0 \leq |n-6| < 6^{n-1}$ et donc 6^{n-1} divise $n-6$ si, et seulement si $n-6=0$ ce qui donne

$\boxed{n = 6 \text{ et } m = 36}$.

E5 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}8&8\\8&8\end{pmatrix}$... On démontre par récurrence que $\boxed{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}}$

ES6 (a). Une suite (2; 2) satisfait aux conditions suivantes :

Si x_i = A (resp B), alors x_{i+2} = B (resp A), et si x_i = B (resp A), alors x_{i+2} = A (resp B).

Si x_1 = A (resp B), alors x_3 = B (resp A), x_5 = A (resp B), x_7 = B(resp A), x_9 = A (resp B), etc.

On établit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel k, $x_{4k+1} = \text{A}$ (resp B), et $x_{4k+3} = \text{B}$ (resp A) et la valeur de x_1 détermine tous les termes de rangs impairs de la suite.

De même, si, dans une suite (2; 2), on a x_2 = A (resp B), alors x_4 = B (resp A),, x_6 = A (resp B),, x_8 = B (resp A),… Donc, la valeur de x_2 détermine tous les termes de rangs pairs de la suite.

Finalement, x_1 peut prendre deux valeurs (A et B) et il en est de même pour x_2. Il y a donc 4 suites possibles. Ce sont les suites : AABBAABBAA… ABBAABBAAB… BAABBAABBA… BBAABBAABB…

(b). Une suite (1; 2), si elle existe, doit satisfaire aux conditions suivantes :

Si xi = A, alors x_{i+1} = B et si x_i = B, alors x_{i+2} = A.

- Supposons qu'il existe une suite (1; 2) avec x_1 = A.

Alors x_2 = B, x_4 = A et x_5 = B. Les premiers termes de la suite (x_n) sont donc A;B; x_3; A;B.

Déterminons x_3 : Si x_3 = B, alors x_5 = A. Impossible. Si x_3 = A, alors x_4 = B. Impossible.

Puisque x_3 ne peut prendre aucune des valeurs A ou B, la suite (1; 2) ne peut commencer par A.

- Supposons qu'il existe une suite (1; 2) avec x_1 = B. Alors x_3 = A et x_4 = B.

Les premiers termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ sont donc B; x_2; A;B. De façon analogue à ce qui précède, on établit que x_3 ne peut prendre aucune des valeurs A ou B, la suite (1; 2) ne peut commencer par B.

En conséquence, il n'existe aucune suite (1; 2).

(c). Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite (m; n).

On considère la suite $(y_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = x_1$; et, pour tout entier q strictement positif :

$$y_{(q-1)r+1} = y_{(q-1)r+2} = \ldots = y_{qr} = x_q$$

Exemple : Considérons la suite (2; 2) ABBAABBAABBA…

Si r = 3, on obtient la suite : AAABBBBBBAAAAAABBBBBBAAAAAABBBBBBAAA … qui est une suite (6; 6).

Démontrons que la suite $(y_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une suite (rm; rn).

Soit i un entier tel que : $(q-1)r + 1 \le i \le qr$. Alors $y_i = x_q$.

On doit démontrer que si y_i = A, alors y_{i+rm} = B et que si y_i =B, alors y_{i+rm} = A.

Si $y_i = x_q$ = A, alors x_{q+m} = B puisque la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une suite (m; n).

On considère y_{i+rm}. Puisque $(q-1)r + 1 \le i \le qr$, alors $(q-1)r + 1 + rm \le i + rm \le qr + rm$,

ou $(q + m - 1)r + 1 \le i + rm \le (q + m)r$.

Par hypothèse, $y_{i+rm} = x_{q+m}$. Puisque x_{q+m} = B, alors y_{i+rm} = B.

Si $yi = xq$ = B, alors $xq + n$ = A puisque les x forment une suite (m; n).

On considère $yi + r\,n$.

Puisque $(q-1)r + 1 \le i \le qr$, alors $(q-1)r + 1 + r\,n \le i + r\,n \le q\,r + r\,n$ ou $(q + n - 1)r + 1 \le i + r\,n \le (q + n)r$.

Par définition, $yi + r\,n = xq + n$. Puisque $xq + n$ = A, alors $yi + r\,n$ = A, ce qu'il fallait démontrer.

Donc, la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ est une suite $(rm; rn)$.

Donc : s'il existe une suite $(m; n)$, alors il existe une suite $(rm; rn)$.

(d) Tout entier naturel non nul se décompose de façon unique en un produit d'une puissance de 2 par un entier naturel impair (conséquence de la décomposition en produit de facteurs premiers). Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Il existe donc quatre entiers naturels non nuls p, q, c et d (avec c et d impairs) tels que $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$. Avec les notations utilisées précédemment, démontrons qu'il existe une suite $(m; n)$ si et seulement si $p = q$.

Premier cas : $p = q = 0$. Alors $m =$ c et $n = d$, entiers naturels impairs.

On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ dans laquelle chaque terme de rang impair est A et chaque terme dont le rang pair est B. Il s'agit donc de la suite ABABAB …Démontrons qu'il s'agit d'une suite $(c; d)$.

Supposons que $x_i =$ A. Alors i doit être impair, puisque seuls les termes qui ont un rang impair égalent A.

Puisque i est impair et que c est impair, alors $i + c$ est pair. Donc $x_{i+c} =$ B. On sait donc que si $x_i =$ A, alors $x_{i+c} =$ B.

Supposons que $x_i =$ B. Alors i doit être pair, puisque seuls les termes de rang pair sont égaux à B.

Puisque i est pair et que d est impair, alors $i + d$ est impair. Donc $x_{i+d} =$ A.

On sait donc que si $x_i =$ B, alors $x_{i+d} =$ A. Donc, ABABAB : : : est une suite $(c; d)$.

Il existe donc une suite $(c; d)$ lorsque c et d sont tous deux des entiers positifs impairs.

Deuxième cas : $p = q$. Soit $m = 2^p c$ et $n = 2^p d$

On sait que c et d sont des entiers naturels impairs et que $p \in \mathbf{N}$.

D'après le premier cas étudié, on sait qu'il existe une suite $(c; d)$. D'après (c), en posant $r = 2^p$, on sait que, s'il existe une suite $(c; d)$, alors il existe une suite $(rc; rd)$. On applique cette propriété avec $r = 2^p$.

Il existe donc une suite $(m; n)$ (on prend $m = 2^p c$ et $n = 2^p d$).

Démontrons maintenant que si $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$ avec $p \in \mathbf{N}^*$, $q \in \mathbf{N}^*$ et $p \neq q$, c et d étant des entiers naturels impairs alors il n'existe aucune suite (m, n).

- (1) S'il existe une suite (rm, rn), alors il existe aussi une suite (m, n).

  Soit $(y_1, y_2, y_3,\ldots)$ une suite (rm, rn). Alors , la suite $(x_1, x_2, x_3,\ldots)$ où $x_i = y_{ri}$ (il s'agit de la suite $y_r, y_{2r}, y_{3r}, \ldots$) est une suite (m, n). En effet : si $xi =$ A, alors $y_{ri} =$ A, d'où $y_{ri+rm} =$ B.

  Or $ri + rm = r(i + m)$, d'où $x_{i+m} = y_{ri+rm} =$ B.

  De façon analogue : si $xi =$ B, alors $y_{ri} =$ B, d'où $y_{ri+rm} =$ A d'où $x_{i+m} = y_{ri+rm} =$ A.

- (2) S'il existe une suite (m, n), il existe aussi une suite (n, m). En effet : soit $(x_1, x_2, x_3,\ldots)$ une suite (m, n). Considérons la suite $(y_1, y_2, y_3,\ldots)$ telle que par $y_i =$ B si $x_i =$ A et $y_i =$ A si $x_i =$ B. La suite $(y_1, y_2, y_3,\ldots)$ est une suite (n, m). En effet : **Si $y_i =$ A** alors $x_i =$ B (si on avait $x_i =$ A, on aurait $y_i =$ B) donc $x_{i+n} =$ A, d'où **$y_{i+n} =$ B**.

  Si $y_i =$ B, alors $x_i =$ A, donc $x_{i+m} =$ B, d'où **$y_{i+m} =$ A.**

  Donc s'il existe une suite (m, n), alors il existe une suite (n, m).

  Ceci démontre aussi que s'il n'existe aucune suite (n, m), alors il n'existe aucune suite $(m; n)$.

- (3) Une propriété des suites (m, n) :

  Soit $(x_1, x_2, x_3,\ldots)$ une suite (m, n). Si $x_i =$ B, alors $x_{i+n} =$ A. Si $x_i =$ A, alors $x_{i+m} =$ B et $x_{i+m+n} =$ A

  Déterminons x_{i+n} :

  Supposons que x_i soit égal à A. Si x_{i+n} était égal à A, on aurait $x_{i+m+n} =$ B, ce qui n'est pas le cas.

  Donc si $x_i =$ A, alors $x_{i+n} =$ B.

  De même, on peut démontrer que si $x_i =$ B, alors $x_{i+m} =$ A.

  Donc dans une suite (m, n), on sait que si $x_i =$ A, alors $x_{i+m} =$ B et $x_{i+n} =$ B et si$x_i =$ B, alors $x_{i+n} =$ A et $x_{i+m} =$ A.

- **(4)** Si m est impair et n est pair, alors il n'existe pas de suite (m, n).

  Soit $(x_1, x_2, x_3,\ldots)$ une suite (m, n). Supposons que $x_1 = A$, alors , $x_{1+m} = B, x_{1+2m} = A, x_{1+3m} = B \ldots$

On établit (récurrence immédiate) que $x_{1+nm} = A$ si n est pair. D'autre part, d'après (3) : Si $x_1 = A$, alors $x_{1+n} = B$, $x_{1+2n} = A$, $x_{1+3n} = B$ etc…On établit alors que si m est impair $x_{1+nm} = B$. Ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu précédemment. On ne peut pas avoir $x_1 = A$. Par un raisonnement analogue, on établit qu'il est impossible d'avoir $x_1 = B$.

- En conséquence, si m est impair et n est pair, il n'existe pas de suite (m; n). IL en résulte, d'après (2) c que si m est pair et n est impair, il n'existe pas de suite (m; n).
- (5) Si $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$ avec $p \neq q$, alors il n'existe aucune suite (m; n).

  Supposons que $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$ avec $p \in$ N*, $q \in$ N* et $p \neq q$, c et d étant des entiers naturels impairs. On peut supposer que $p < q$.

  D'après (1), s'il existe une suite (rm, rn) alors il existe une suite (m, n). Donc : s'il existe une suite ($2^p c$; $2^q d$), alors il existe une suite (c; $2^{q-p} d$) (avec $r = 2^p$).

  Or c est impair et $2^{q-p}\, d$ est pair. D'après (4), il n'existe aucune suite (m; n).

Si $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$ avec $p \in$ N*, $q \in$ N* et $p \neq q$, c et d étant des entiers naturels impairs, alors il n'existe aucune suite (m; n).

On en conclut qu'il existe une suite (m; n) si et seulement si m et n sont divisibles par les mêmes puissances de 2.

ES7 Éléments de solution

1. On raisonne par l'absurde. Supposons que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in N}$ soient strictement supérieurs à a, et considérons la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par :

$v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ si v_n est pair, et $v_{n+1} = \frac{a+v_n}{2}$ si v_n est impair

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel p tel que $v_n = u_p$ (autrement dit, la suite $(v_n)_{n\in N}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in N}$).

La propriété est vérifiée au rang 0. Supposons qu'elle le soit au rang n. Il existe donc un entier p tel que $v_n = u_p$.

Si v_n est pair, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_p = u_{p+1}$;

Si v_n est impair, $v_{n+1} = \frac{a+v_n}{2}$. Or $u_{p+1} = u_p + a$ et, comme $u_p + a$ est pair, $u_{p+2} = \frac{1}{2}u_{p+1} = \frac{u_p + a}{2}$.

Donc Si v_n est impair, $v_{n+1} = u_{p+2}$.

En conclusion : la suite $(v_n)_{n\in N}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

Comme on a supposé que tous les termes de la suite de la suite $(u_n)_{n\in N}$, étaient strictement supérieurs à a, il en est de même pour les termes de la suite $(v_n)_{n\in N}$.

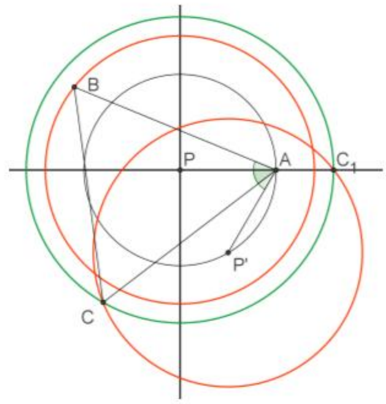
De plus, la suite $(v_n)_{n\in N}$ est strictement décroissante. En effet :

$\frac{1}{2}v_n < v_n$ et $a < \frac{a+v_n}{2} < v_n$ soit, dans les deux cas : $v_{n+1} < v_n$

Or il est impossible d'avoir une suite strictement décroissante d'éléments de N. L'hypothèse faite au départ est donc absurde et tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in N}$ ne sont pas strictement supérieurs à a.

2. D'après la question 1, il existe un élément u_{n_1} de la suite $(u_n)_{n\in N}$ qui est inférieur ou égal à a. On peut réappliquer le même argument à la suite commençant par u_{n_1+1} pour justifier qu'il existe un élément u_{n_2} de la suite u qui est inférieur ou égal à a, avec $n_1 < n_2$.

Exercice AD1 Triangle dissimulé



Considérons un repère du plan complexe d'origine P, dans lequel l'affixe a de A soit 5. Désignons par b et c les affixes de B et C. Leurs modules sont respectivement 7 et 8.

Appelons P' l'image de P par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}\cdot$

Le point C appartient au cercle de centre P' et de rayon 7. Les parties réelle x et imaginaire y de c satisfont donc les relations :

$$\begin{cases} x^2+y^2=64 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=49 \end{cases}, \text{ qui se ramènent à } \begin{cases} x^2+y^2=64 \\ y\sqrt{3}-x=-8 \end{cases}.$$

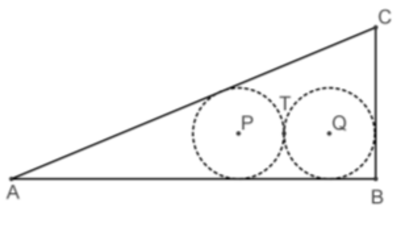
On trouve deux valeurs possibles pour c : $c=8$ et $c=-4-4i\sqrt{3}$. La première est éliminée, car A se trouve entre P et C_1.

La distance AC est le module de $c-a$. $|c-a|^2=\left(5-(-4)\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2$. Finalement le côté du triangle est $\sqrt{129}$.

Exercice AD2 Encore un triangle équilatéral

Le côté [BC] mesure 2. Il s'ensuit que le triangle BGC est rectangle en G (inscrit dans un demi-cercle de centre G). La médiane [CF] a donc pour mesure $\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot$ Les médianes [AD] et [BE] ont respectivement pour longueurs 3 et $\frac{3}{2}\cdot$ Le théorème de la médiane permet de déterminer les longueurs BF et CE (les angles $\widehat{DBG}$ et $\widehat{BCG}$ ont respectivement pour cosinus $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$). On obtient $BF=\frac{\sqrt{7}}{2}$, donc $AB=\sqrt{7}$, puis $CE=\frac{\sqrt{13}}{2}$, donc $AC=\sqrt{13}$.

Exercice AD3 Un sangaku



Traitement du premier cas envisagé par la géométrie analytique.

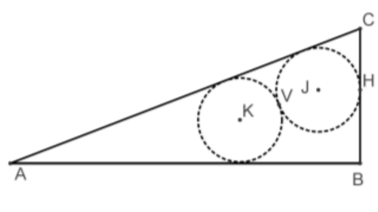
Dans le repère orthonormal d'origine B dont les axes sont portés par les droites (AB) et (BC), la droite (AC) a pour équation $y=\frac{5}{12}x+5$. Si on appelle a le rayon inconnu des deux cercles, les coordonnées du point P sont $-3a$ et a.

Sa distance à la droite (AC) doit également être égale à a. a est donc solution de l'équation : $\frac{|-15a-12a+60|}{\sqrt{25+144}}=a$.

Cette équation a pour solution $\frac{3}{2}\cdot$

Le second cas peut se traiter de la même manière, à ceci près que les coordonnées de M sont $-a$ et $3a$.

Traitement « trigonométrique » du troisième cas. L'angle $\widehat{BAC}$ a pour cosinus $\frac{12}{13}$ et pour sinus $\frac{5}{13}\cdot$ L'angle moitié, que nous notons α, a pour cosinus $\frac{5}{\sqrt{26}}$ et pour sinus $\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot$ C'est un résultat des formules de duplication (en tenant compte

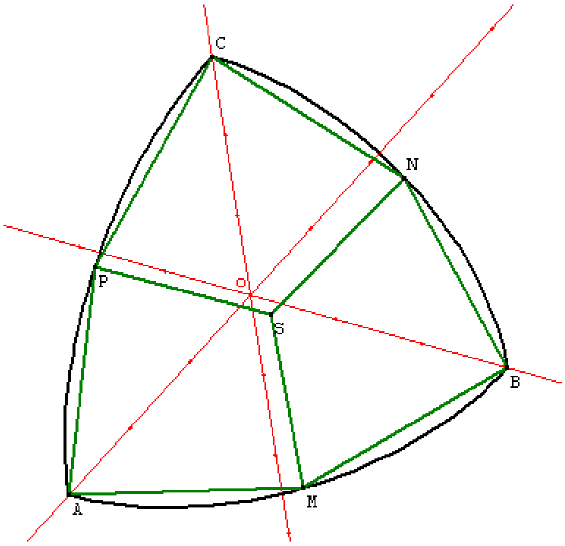


qu'il s'agit d'un angle aigu). Projetons [AK], [KJ] et [JH] sur (AB). On appelle toujours a le rayon inconnu. Il vient : $a\cot a\cot\alpha+2a\cos\widehat{\mathrm{BAC}}+a=12$. D'où vient la solution $\frac{26}{17}$.

Exercice AD 4 Icositétraèdre trapézoïdal

Trois arcs de grands cercles de la sphère passant par les sommets « d'ordre 4 » du polyèdre contiennent les sommets A, B, C, M, N et P du polyèdre. Les coordonnées de ces points sont :

	abscisse	ordonnée	cote
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1
M	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
N	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
P	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$



La distance AM est donc $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

On obtient une équation du plan (AMP) par exemple en écrivant qu'il passe par ces trois points : $x+\left(\sqrt{2}-1\right)y+\left(\sqrt{2}-1\right)z-1=0$. On cherche ensuite les coordonnées du point S, point « triple » du polyèdre, point qui, pour des raisons de symétrie, appartient à la droite d'équations $x=y=z$, et bien sûr aussi au plan (AMP).. Les coordonnées du point S sont toutes égales, toutes égales à son abscisse solution de l'équation $x\left(1+2\sqrt{2}-2\right)-1=0$, qui donne la solution $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$. Reste à déterminer la distance SM :

$$\mathrm{SM}^2=2\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{7}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{7}\right)^2$$

$$\mathrm{SM}^2=\left(\frac{\sqrt{2}-3}{7}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{7}\right)^2$$

Finalement $\mathrm{SM}=\frac{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}{7}$. Nous noterons b par la suite.

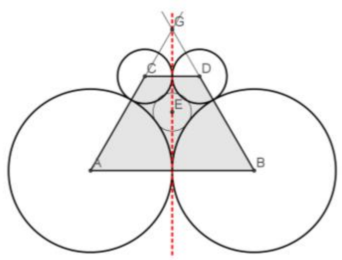
En remarquant que PM = 1, on peut déterminer les angles au sommet des triangles isocèles SPM et APM. On a :

$\cos\mathrm{PAM}=\frac{2a^2-1}{2a^2}$ qui conduit à $\cos\mathrm{PAM}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

$\cos\mathrm{PSM}=\frac{2b^2-1}{2b^2}$ qui conduit à $\cos\mathrm{PAM}=-\frac{2+\sqrt{2}}{8}$.

En degrés décimaux, $\mathrm{PAM}\approx 81,58$ et $\mathrm{PSM}\approx 115,26$, valeurs arrondies au centième.

Exercice AD5 Pétanque



Le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle de bases 6 et 2. Le triangle ABG est un triangle équilatéral (les triangles GCD et GAB sont en situation de Thalès). On a donc $\mathrm{GH}=\sqrt{3}$ et $\mathrm{GH'}=3\sqrt{3}$. Par conséquent $\mathrm{HH'}=2\sqrt{3}$. En posant $\mathrm{HE}=x$, on peut calculer les distances EB et ED par application du théorème de Pythagore dans les triangles EDH et EBH' :

$$\mathrm{ED}^2 = x^2 + 1$$

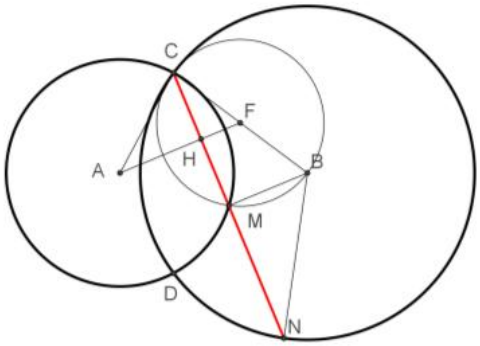
$$\mathrm{EB}^2 = \left(2\sqrt{3} - x\right)^2 + 9$$

Or, $\mathrm{EB} - \mathrm{ED} = 2$, donc $\mathrm{EB} + \mathrm{ED} = \dfrac{\mathrm{EB}^2 - \mathrm{ED}^2}{2} = 10 - 2\sqrt{3}x$. Donc $\mathrm{EB} = 6 - \sqrt{3}x$ et $\mathrm{ED} = 4 - \sqrt{3}x$.

De $\left(4 - \sqrt{3}x\right)^2 = x^2 + 1$, on tire la solution acceptable $x = 2\sqrt{3} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Des relations EB = 3 + R et ED = 1 + R, où R est le rayon cherché, on tire $R = 3 - \sqrt{3}x$. Finalement : $R = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

Exercice AD 6 Où est le milieu ?

Si le point M est le milieu de [CN], le triangle BCN est isocèle et (BM) est on axe de symétrie. Il s'ensuit que M appartient au cercle de diamètre [BC]. Il se trouve donc être le second point d'intersection de ce cercle avec le cercle de centre A.



Soit F le milieu de [BC]. La droite (AF) coupe (CN) en H. H est le pied de la hauteur abaissée de C dans le triangle ACF. On a également CN = 4 CH.

Dans le triangle ACF, on a : $\cos \widehat{\mathrm{ACF}} = \dfrac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\,\mathrm{CA}\,.\mathrm{CB}}$.

On trouve $\cos \mathrm{ACF} = \dfrac{13}{85}$.

L'aire de ACF peut être calculée comme $\mathcal{A}\left(\mathrm{ACF}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA.CF}\sin \mathrm{ACF}$,

ce qui donne $\mathcal{A}\left(\mathrm{ACF}\right) = \dfrac{1}{2}17.\dfrac{25}{2}\dfrac{84}{85} = 105$. Elle peut l'être aussi comme le demi-produit de AF par CH.. On calcule AF, qui est la médiane du triangle ABC relative à [BC]. On trouve $\mathrm{AF} = \dfrac{39}{2}$. Finalement $\mathrm{CH} = \dfrac{140}{13}$ et $\mathrm{CN} = \dfrac{560}{13}$.

Exercice AVP 1 Carrelage

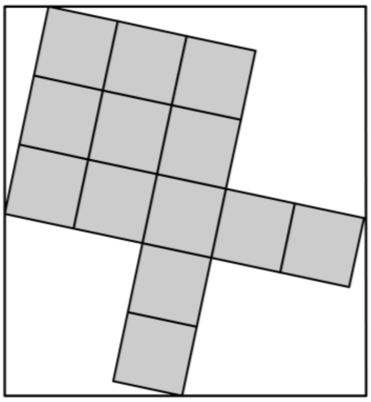
Comme le montre la figure, chacun des carrés élémentaires peut être découpé, faisant apparaître quatre triangles rectangles de cathètes *a* et *b*.

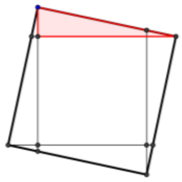
L'étude « en largeur » donne : $5a+b=5,2$

Et l'étude « en hauteur » donne : $5a+3b=5,6$

On en déduit que $a=1$ et $b=0,2$.

Le carré de l'hypoténuse d'un des triangles rectangles et donc 1,04. Le carré élémentaire a pour côté $2\sqrt{\dfrac{13}{5}}$.





Un des carrés élémentaires, découpé en quatre triangles rectangles de côtés a et b

Exercice AVP 2 Un peu d'aire après le calcul

La première tâche consiste à factoriser le premier membre de l'équation

$$m^4z^4+\left(10m^6-2m^2\right)z^2-16m^5z+\left(9m^8+10m^4+1\right)=0$$

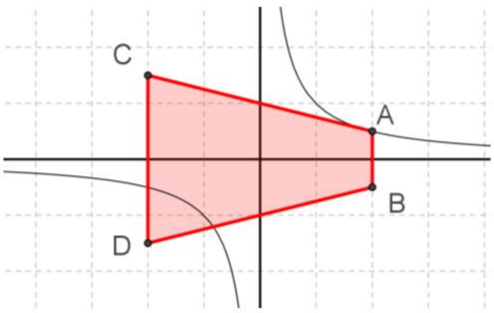
On commence par l'écrire $\left(m^2z^2+5m^4+1\right)^2-4m^2z^2-16m^8-16m^5z=0,$

puis $\left(m^2z^2+5m^4+1\right)^2-4m^2\left(z^2+4m^3z+4m^6\right)=0,$

ou encore $\left(m^2z^2+5m^4+1\right)^2-4m^2\left(z+2m^3\right)^2=0.$

Il reste deux équations du second degré : $m^2z^2-2m\left(z+2m^3\right)+5m^4+1=0$ et : $m^2z^2+2m\left(z+2m^3\right)+5m^4+1=0$, qu'on peut écrire : $(mz-1)^2+m^4=0$ et $(mz+1)^2+9m^4=0$. Les solutions sont donc

$$z_1=\frac{1}{m}+\mathrm{i}m,\ \overline{z_1}=\frac{1}{m}-\mathrm{i}m,\ z_2=-\frac{1}{m}+3\mathrm{i}m,\ \overline{z_2}=-\frac{1}{m}-3\mathrm{i}m.$$

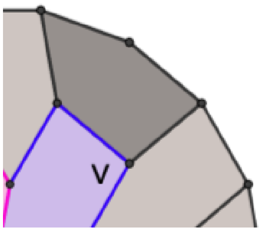


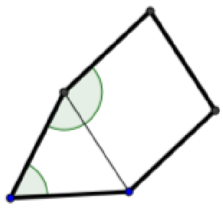
Le quadrilatère obtenu est un trapèze, d'aire $(2m+6m)\times\left(\frac{1}{m}-\left(-\frac{1}{m}\right)\right)\times\frac{1}{2}=8$

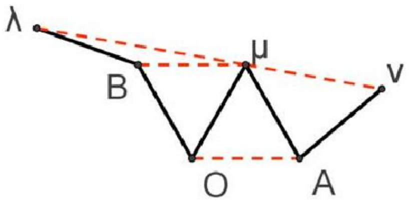
Exercice AVP 3 Pavage par des pentagones

L'angle entre deux côtés adjacents de l'octadécagone régulier est 160° (la somme des angles d'un polygone convexe à *n* côtés est $180(n-2)$).

Six pentagones ont pour sommet le centre du cercle circonscrit à l'octadécagone, leur angle au sommet, si on peut dire, est donc 60°. Le pentagone élémentaire est donc constitué d'un triangle équilatéral complété par un losange (tous les côtés ont la même longueur). Les angles du losange mesurent 100° et 80°.

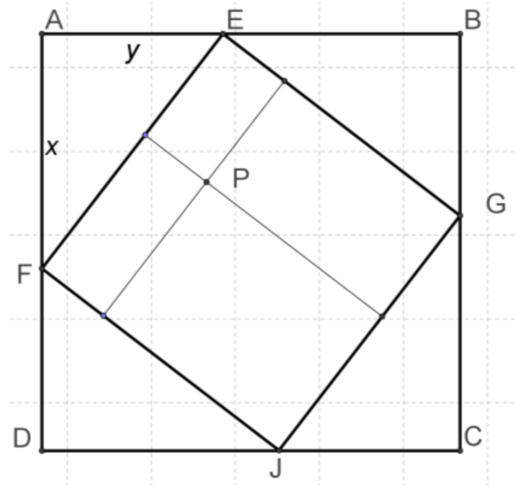






La figure ci-contre reproduit une partie du schéma complet du pavage. Le triangle λBμ est isocèle de sommet principal B. Ses angles à la base mesurent 10°. Le triangle Aμν est isocèle de sommet principal A. Ses angles à la base mesurent 50°. Les angles $A\mu O$ et $O\mu B$ mesurent 60°. L'angle $\lambda\mu\nu$ a donc pour mesure 180°. Les points sont alignés.

Exercice AVP 4 Sous les pavés… les pavés



On vérifie d'abord que le carré de côté 353 peut « tenir » dans le carré de côté 497. Il s'agit de savoir s'il existe deux entiers *x* et *y* dont la somme soit 497 et la somme des carrés 353^2. Les entiers *x* et *y* sont solutions du système $\begin{cases} xy = 61200 \\ x + y = 497 \end{cases}$ et donc sont les racines de l'équation $T^2 - 497T + 61200 = 0$, c'est-à-dire 225 et 272.

Considérons un point P situé en un nœud du réseau « oblique ». Le vecteur $\overrightarrow{FP}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs $\frac{1}{353}\overrightarrow{FE}$ et $\frac{1}{353}\overrightarrow{EG}$. Ces coefficients sont compris entre 0 et 353.

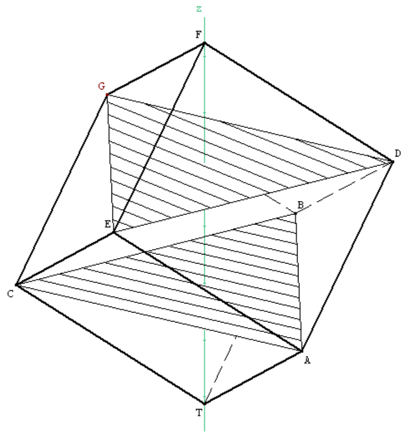
Il existe des entiers *k* et *l* tels que les coordonnées *x* et *y* de P dans le repère (lié au réseau « droit ») d'origine D soient :

$\begin{cases} x = \dfrac{225k + 272l}{353} \\ y = 225 + \dfrac{272k - 225l}{353} \end{cases}$. Pour que le point P soit aussi un nœud du réseau « droit », il faut et il suffit que ces coordonnées soient entières. Le système précédent s'écrit comme un système de congruences : $\begin{cases} 225k + 272l \equiv 0 [\bmod 353] \\ 272k - 225l \equiv 0 [\bmod 353] \end{cases}$. L'algorithme d'Euclide permet de constater que 272 et 353 sont premiers entre eux. En « remontant » cet algorithme, on peut trouver l'égalité $61 \times 272 - 47 \times 353 = 1$. En multipliant son premier terme par 61, la première équation de congruence peut donc être écrite $311k + l \equiv 0 [\bmod 353]$ ou encore $l \equiv 42k [\bmod 353]$.

On vérifie que, si le couple (k, l) est tel que $l \equiv 42k [\bmod 353]$, il satisfait à la seconde condition.

Les couples cherchés ont pour première projection *k* un entier compris entre 0 et 353 et pour seconde projection le reste de la division euclidienne de 42*k* par 353. Les couples (0, 353) et (353, 353) donnent deux points supplémentaires (sommets J et G du carré, oubliés dans la discussion). Il y a donc 356 coins de pavés superposés.

Exercice AVP 5 Jerrycan academy



Le cube posé sur un sommet peut être décomposé en trois solides : deux pyramides à base triangulaire (les côtés de la base sont des diagonales de trois faces du cube ayant un sommet en commun, leur longueur est $\sqrt{2}$, et les arêtes sont les trois arêtes du cube ayant ce sommet en commun, leur longueur est 1), et un antiprisme dont les bases sont des triangles équilatéraux (celles des pyramides) et les faces des triangles rectangles isocèles de base $\sqrt{2}$ et de côté 1 (les arêtes restantes du cube) .

Les pyramides ont pour volume $\frac{1}{6}$ (si on considère qu'elles ont pour base un triangle rectangle isocèle de côté 1 et une hauteur égale à 1). On en déduit que leur hauteur (perpendiculaire au triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$) est $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Une pyramide de même sommet de hauteur *h* est une réduction de la pyramide initiale de rapport $h\sqrt{3}$. Elle a donc pour volume $V(h) = \left(h\sqrt{3}\right)^3 \times \frac{1}{6}$, soit $V(h) = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Une fois parvenu à hauteur de la première base, le liquide commence à remplir l'antiprisme.

Les sections de l'antiprisme par des plans parallèles à ses bases sont des hexagones (non réguliers, sauf pour la section exactement à mi-hauteur) dont les côtés ont pour longueur, en alternance, x et $\sqrt{2}-x$ $(0 \leq x \leq \sqrt{2})$ et sont deux à deux parallèles.

On montre que l'aire de cet hexagone est $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+x\sqrt{2}-x^2\right)$, et que, si z est la hauteur correspondante dans l'antiprisme, alors $x = z\sqrt{6}$.

On en déduit l'aire de la section à la cote z (dans l'antiprisme), c'est-à-dire l'aire de la surface du liquide : $S(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+2\sqrt{3}z-6z^2\right)$.

Si h est la hauteur de liquide dans l'antiprisme, alors le volume de liquide dans l'antiprisme est :

$$\int_0^h S(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^h \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+2\sqrt{3}z-6z^2\right)\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h+\sqrt{3}h^2-2h^3\right).$$

Enfin, la deuxième pyramide se remplit comme la première, à ceci près qu'au lieu que le volume occupé pour une hauteur h de liquide dans la pyramide soit $h^3\frac{\sqrt{3}}{2}$, il est $\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-h\right)^3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, si h est la hauteur totale de liquide dans le cube dont une diagonale est verticale et $V(h)$ le volume de liquide :

- si $0 \leq h \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $V(h) = \frac{h^3\sqrt{3}}{2}$
- si $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq h \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$, alors $V(h) = \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}h+\frac{9}{2}h^2-\sqrt{3}h^3$
- si $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq h \leq \sqrt{3}$, alors $V(h) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-h\right)^3$

Ci-contre, la courbe.