académie Versailles

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES
ST-QUENTIN-EN-YVELINES

Stage « résolution de problèmes » proposé aux lycéens présentés au Concours général des lycées, les 17 et 18 février 2014

La Pépinière académique de mathématiques organise pour la huitième année, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Le fait d'être présenté au Concours général des lycées sanctionne généralement une scolarité exemplaire et brillante. Le concours peut toutefois laisser un mauvais souvenir : quelques élèves seulement figurent au palmarès, il n'y a pas de compte-rendu individuel pour évaluer le travail fourni pour plusieurs milliers d'élèves pourtant brillants. C'est pourquoi nous proposons aux candidats ces deux jours de travail « entre eux », dans une bonne ambiance.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Marie-Françoise BOURDEAU, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF, Éric SOROSINA

Les responsables des établissements d'accueil : Dominique BARTH (Directeur de l'UFR des sciences de l'UVSQ), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro),

Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILY SUR SEINE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Paul-Emile Victor, OSNY), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Line ORRÉ (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Laurent SERVIERES (Lycée Camille Saint-Saëns, DEUIL LA BARRE), Alexandra VIALE (Lycée de l'Essouriau, LES ULIS), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES), Joffrey ZOLNET (Lycée Léonard de Vinci, LEVALLOIS PERRET)
Karim ZAYANA, professeur de chaire supérieure au lycée Hoche de Versailles, qui devait participer à l'encadrement de ce stage, comme de nombreuses autres fois, a été nommé Inspecteur général de l'Education nationale.

Les professeurs accompagnant leurs élèves : Sébastien MOULIN (Lycée Emmanuel Mounier, CHATENAY MALABRY), Jean-Pierre QUELEVER (Lycée Blaise Pascal, ORSAY)

Emploi du temps

Pontoise	
Lundi 17 10 heures	**Nombres, arithmétique CH**
Lundi 17 12 heures	**Repas**
Lundi 17 13 heures	**Fonctions OD**
Lundi 17 15 heures	**Angles et distances RC**
Mardi 18 10 heures	*Calculs et ordre dans R AC/LS*
Mardi 18 11 h 45	*Repas*
Mardi 18 12 h 30	*Probabilités (exposé PM)*
Mardi 18 13 h 20	*Aires, volumes, pavages BB*
Mardi 18 15 h 10	*Équations Suites LS/AC*

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Versailles V1</th><th colspan="2">Versailles V2</th><th colspan="2">Versailles V3</th></tr>
<tr><td>Lundi 17 10 heures</td><td colspan="2">Nombres, arithmétique
NF/PJ</td><td colspan="2">Angles et distances
YE/CD</td><td colspan="2">Fonctions
AV</td></tr>
<tr><td>Lundi 17 11 h 45</td><td colspan="3">Repas</td><td colspan="3">Probabilités (exposé PM)</td></tr>
<tr><td>Lundi 17 12 h 30</td><td colspan="3">Probabilités (exposé PM)</td><td colspan="3">Repas</td></tr>
<tr><td>Lundi 17 13 h 15</td><td colspan="2">Fonctions
AV</td><td colspan="2">Nombres, arithmétique
NF/PJ</td><td colspan="2">Angles et distances
YE/CD</td></tr>
<tr><td>Lundi 17 14 h 50</td><td colspan="2">Angles et distances
YE/CD</td><td colspan="2">Fonctions
AV</td><td colspan="2">Nombres, arithmétique
NF/PJ</td></tr>
<tr><td>Mardi 18 10 heures</td><td colspan="2">Aires, volumes, pavages
LO/MS</td><td colspan="2">Équations Suites
JZ/CD</td><td colspan="2">Calculs et ordre dans R
PJ/CW</td></tr>
<tr><td>Mardi 18 11 h 50</td><td colspan="2">Repas</td><td colspan="2">Repas</td><td colspan="2">Repas</td></tr>
<tr><td>Mardi 18 12 h 40</td><td colspan="2">Calculs et ordre dans R
PJ/CW</td><td colspan="2">Aires, volumes, pavages
LO/MS</td><td colspan="2">Équations Suites
JZ/CD</td></tr>
<tr><td>Mardi 18 14 h 35</td><td colspan="2">Équations Suites
JZ/CD</td><td colspan="2">Calculs et ordre dans R
PJ/CW</td><td colspan="2">Aires, volumes, pavages
LO/MS</td></tr>
</table>

Thème : Nombres, arithmétique

Exercice A1 Faire un carré avec des dés

On construit des suites arithmétiques de nombres entiers de la façon suivante :

1. On jette un dé usuel. Le nombre apparaissant sur a face supérieure de dé fournit le premier terme de la suite.

2. On jette de nouveau le dé, qui fournit la raison (entière) de la suite.

Combien, parmi les suites ainsi construites, ont au moins un terme qui soit un carré parfait ?

Exercice A2 Des entiers pratiques

Un entier positif n est dit **pratique** si tout entier inférieur ou égal à n peut s'écrire comme la somme de diviseurs distincts de n.

Par exemple, les diviseurs de 6 sont **1**, **2**, **3** et **6.** Puisque 1=**1**, 2=**2**, 3=**3**, 4=**1**+**3**, 5=**2**+ **3**, 6 = **6**, on voit que 6 est pratique.

Démontrer que le produit de deux nombres pratiques est également pratique.

Exercice A3 Un peu long, sur la fin

Par combien de 0 se termine 100 ! ?

Exercice A4 C'est presque $\frac{3}{7}$, en plus compliqué

Parmi les rationnels positifs de dénominateur inférieur à 99, quel est le plus proche de $\frac{3}{7}$ qui soit distinct de $\frac{3}{7}$?

Exercice A5

Soit $a = \sqrt{2} + 1$. Montrer qu'il existe pour chaque entier naturel n, un naturel $k \geqslant 1$ tel que : $a^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$

Exercice A5 Magnifique ! *Concours général 2013, problème 1*

On considère des suites finies $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs, où n est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes. Par exemple, la suite (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2) est superbe de longueur 8 car la somme des termes vaut 12 (1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 12), qui est divisible par 1 et par 2 ; la suite (3, 3, 6, 12) est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

1. Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21, 7, b)$ soit superbe.

2. ***a.*** Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.

b. Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.

3. ***a.*** Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.

b. Montrer que, si $n \geqslant 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.

4. Soit $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ une suite arithmétique finie de raison strictement positive. Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.

5. On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier $n \geqslant 2$, la suite finie $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ est superbe. Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant pour tout entier $k \geqslant 2$: $a_k < a_{k+1}$.

6. Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit $(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.

a. Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.

b. Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

Thème : Calculs et ordre dans R

Exercice CO1 Π comme « produit »

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$.

Exercice CO2 Joli dessin

Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) tels que : $2 \leqslant |x| + \big||y|-3\big| \leqslant 4$.

Exercice CO3

Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs a, b et c, $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c$ et déterminer les conditions pour lesquelles on a égalité.

Exercice CO4 Décomposition en somme d'inverses de carrés

1. Trouver trois nombres entiers naturels a, b, c, distincts ou non, tels que : $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

2. Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ naturels distincts ou non, vérifiant : $1=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+...+\dfrac{1}{x_n^2}$.

Exercice CO5 Estimation du nombre moyen de diviseurs d'un nombre

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante : « Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une valeur approchée à 1 près de la moyenne du nombre de diviseurs des entiers compris entre 2 et n est $\ln n$ ».

1. Vérifier cette propriété pour $n = 10$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Que représente le nombre $d(n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta(i,n)$, sachant que, pour tous entiers i et j non nuls, $\delta(i,j)=1$ si i divise j, et 0 sinon ?

3. Soit i un entier naturel non nul. Démontrer que $\displaystyle\sum_{j=i}^{n}\delta(i,j)=\left[\frac{n}{i}\right]$. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-1 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d(j) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)+1.$$

4. En utilisant l'encadrement (à justifier) $\ln n \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) \leqslant \ln n+1$, démontrer la propriété annoncée.

Exercice CO6 Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k$.

1. Donner une expression réduite de $f(x)$ pour $x \neq 1$. Exprimer les sommes suivantes pour $x \neq 1$ en fonction de f et de ses dérivées première et seconde et en donner une expression réduite:

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\ ,\ \sum_{k=1}^{n}kx^{k}\ ,\ \sum_{k=0}^{n}(n-k)x^{k}\ ,\ \sum_{k=1}^{n}k^2x^{k}\ .$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{Min(i,j)}$.

Exercice CO7

Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes ($n \geq 2$). Déterminer une matrice carrée telle que le produit (à gauche ou à droite, selon les cas) de cette matrice avec A ait pour résultat :

1. d'échanger les lignes i et j de A.

2. d'échanger les colonnes i et j de A.

3. d'ajouter à la ligne i de A le produit par A de la ligne j.

4. d'ajouter à la colonne i de A le produit par A de la colonne j.

Thème : Fonctions

Exercice F1 Encore et toujours le second degré

Trouver tous les réels b pour lesquels la différence entre le maximum et le minimum sur l'intervalle [0,1]de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2bx - 1$ est égale à 1.

Exercice F2 Partie entière

> Soit x un réel. L'ensemble des entiers inférieurs à x est non vide et majoré (justifier). Il possède donc un plus grand élément n. L'entier n est appelé *partie entière* du réel x. On note $[x] = n$.
>
> Exemples : $[3{,}14] = 3$, $[-3{,}14] = -4$.
>
> Propriété immédiate : Pour tout réel x, on a $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
>
> Vocabulaire : La différence entre un réel et sa partie entière est appelée sa *mantisse.*

1. ***a.*** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n}[x_k] \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n}[x_k] + n - 1 \text{ où } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ sont } n \text{ réels.}$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $[x] = \left[\dfrac{[nx]}{n}\right]$.

2. ***a .***Soit x un réel. Démontrer que $[2x] = [x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$ (on pourra envisager deux cas, selon que la mantisse de x est inférieure ou supérieure à $\dfrac{1}{2}$).

b. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right]$.

Exercice F3 *Concours général 2007, exercice 1*

On appelle fonctions de type T_0 les fonctions « trinômes » sur [−1, 1], définies par :

$t : [-1,\ 1] \to \mathbf{R},\quad x \mapsto ax^2 + bx + c$

a, b, c étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle fonctions de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda\,|g|$, λ étant un réel quelconque et f, g des fonctions quelconques de type T_{n-1}.

1. Établir que la fonction φ, définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de [−1, 0] et $\varphi(x) = x$ pour tout x de [0, 1], est de type T_1.

2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction $f : [-1,\ 1] \to \mathbf{R}$ telle que pour tout réel x de [−1, 0[, $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de [0, 1], $f(x) = t_2(x)$.

Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N.

.

Exercice F4 Un marcheur parcourt 12 km en 1 heure. *Le trajet de ce marcheur est tout à fait quelconque : Il est possible qu'il ralentisse, accélère, s'arrête, revienne en arrière etc.…*

1. Démontrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

2. Hier, ce marcheur est parti du village A à midi pour se rendre en B, à 12 km de A, où il est arrivé à 13 heures. Aujourd'hui, il a fait le trajet en sens inverse en partant à midi du village B pour arriver à 13 heures au village A. Montrer qu'il existe-t-il un endroit du parcours où ce marcheur se trouvera à la même heure, hier et aujourd'hui.

Exercice F5 *Concours général 2009, exercice 1*

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur **R**, à valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a.

On rappelle que tout x de $[-1,1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0, \pi]$.

1. ***a.*** Vérifier que $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).

b. Montrer, pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$.

2. Soit f une fonction solution du problème On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$ avec θ_n dans $[0, \pi]$.

a. Montrer que f est continue en 0 et que $\lim\limits_{n \to \infty} \theta_n = 0$

b. Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n > N$ on ait $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

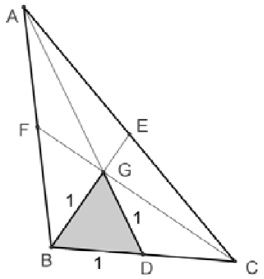
c. Établir que a est positif et que $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2a}\right)$.

Thème : Calculs d'angles et de distances

Exercice AD1 Triangle dissimulé

Un point P est situé à l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, de telle sorte que AP = 5, BP = 7, CP = 8. Quelle est la longueur du côté du triangle ABC ?

Exercice AD 2 Encore un triangle équilatéral

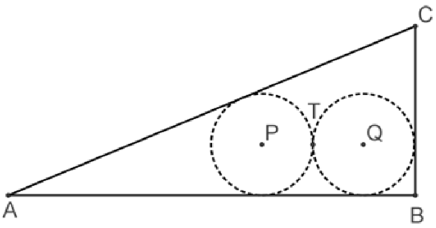


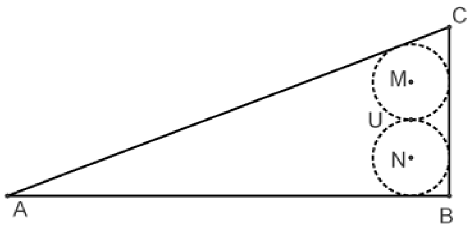
Le triangle ABC est tel que le triangle GBD, dont le sommet G est le centre de gravité de ABC et le sommet D le milieu de [BC], est équilatéral de côté 1. Quelles sont les mesures des côtés du triangle ABC ?

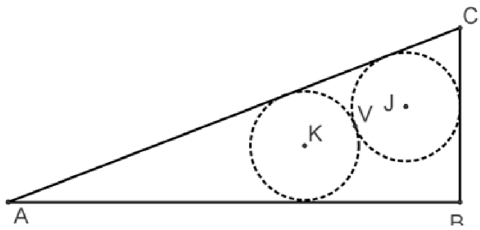
Exercice AD 3 Un sangaku

Deux cercles de même rayon sont tangents entre eux, tangents tous les deux à un des côtés du triangle rectangle ABC, et chacun tangent à un autre côté.

Le triangle ABC est le triangle rectangle de côtés 5, 12, 13. Quel est le rayon de ces cercles (on distinguera les trois cas illustrés ci-dessous).



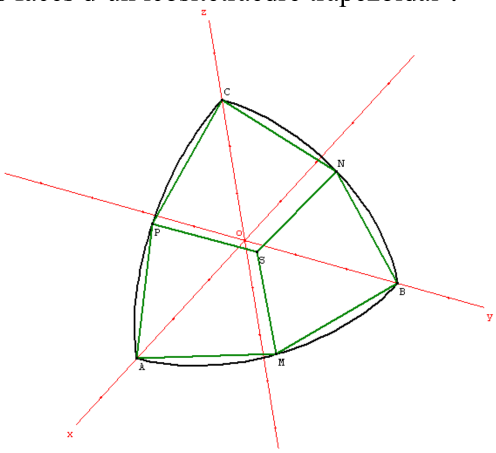




Exercice AD 4 Icositétraèdre trapézoïdal (deltoidal icositetrahedron)

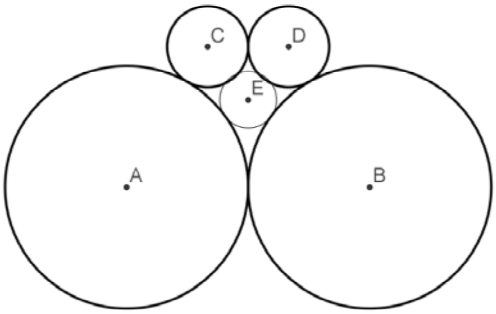
Les cristaux de leucite (silicate d'aluminium et de potassium de formule $KAlSi_2O_6$) prennent (idéalement) la forme d'icositétraèdres trapézoïdaux. Le nom « icositétraèdre » accole les racines « icosi » et « tétra » pour faire « vingt-quatre ». Vingt-quatre faces toutes identiques, non en forme de trapèze, comme la dénomination erronée le suggère, mais de « cerf-volant ». Les 16 sommets communs à 4 faces appartiennent à une sphère, les 8 sommets communs à trois faces et pas à quatre sont les sommets d'un cube. Pour faciliter les calculs, on prendra le rayon de la grande sphère pour unité. Combien mesurent les côtés et les angles des faces d'un icositétraèdre trapézoïdal ?

Image publiée par le site « Mathcurve »



Un huitième du polyèdre

Exercice AD 5 Pétanque



Les cercles de centres A et B ont pour rayon 3. Ils sont tangents extérieurement. Les cercles de centres C et D ont pour rayon 1. Ils sont tangents extérieurement entre eux et tangents extérieurement respectivement au cercle de centre A et au cercle de centre B.

Le cercle de centre E est tangent extérieurement aux quatre autres.

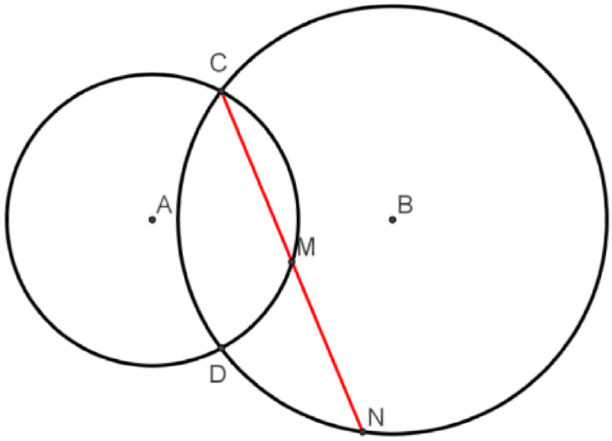
Quel est son rayon ?

Exercice AD 6 Où est le milieu ?

Le cercle de centre A a pour rayon 17, le cercle de centre B a pour rayon 25. Les points A et B sont distants de 28.

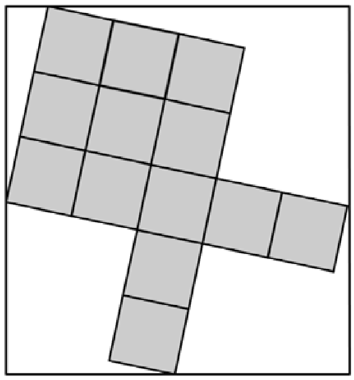
Une sécante passant par un des points d'intersection des deux cercles, le point C, coupe le cercle de centre A en M et le cercle de centre B en N.

Si M est le milieu de [CN], quelle est la longueur de [CN] ?



Thème : Aires, volumes, pavages

Exercice AVP1 Carrelage



Le sol d'une pièce rectangulaire de dimensions 5,2 m et 5,6 m est orné d'une mosaïque décomposée en 13 carrés identiques, comme sur la figure ci-contre (à gauche). Quelle est la longueur du côté des carrés ?

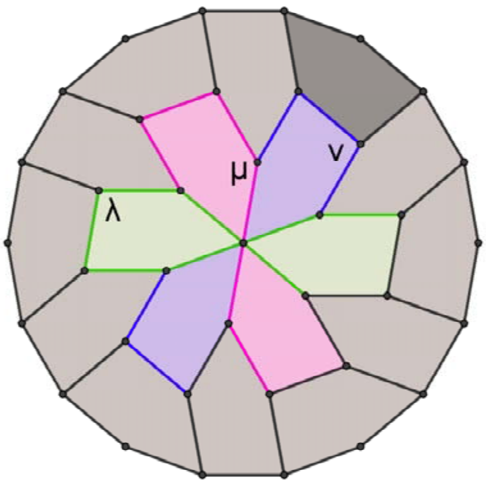
Exercice AVP 2 Un peu d'aire après le calcul

On donne un nombre réel m et on considère l'équation d'inconnue le complexe z :

$$m^4z^4+\left(10m^6-2m^2\right)z^2-16m^5z+\left(9m^8+10m^4+1\right)=0$$

Les points ayant pour affixes les racines de cette équation déterminent dans le plan complexe un quadrilatère convexe. Montrer que l'aire de ce quadrilatère est indépendante du paramètre m.

Exercice AVP 3 Pavage par des pentagones

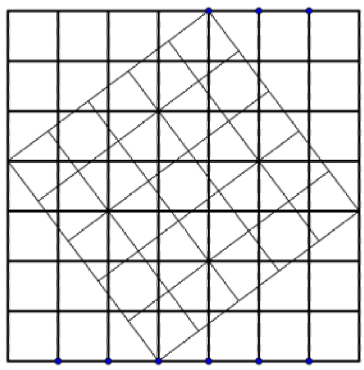


Un polygone régulier à dix-huit côtés a été pavé par des pentagones tous identiques, et dont tous les côtés ont la même longueur.

1. Déterminer les angles du pentagone « modèle ».

2. Montrer que les points λ, μ et ν sont alignés.

Exercice AVP 4 Sous les pavés…les pavés



Sous les 49 dalles carrées d'une pièce carrée sont apparues 25 dalles carrées de même taille que les précédentes assemblées en un carré dont les sommets appartiennent aux côtés de la grande pièce. On constate que 8 des sommets des 25 carrés coïncident avec des sommets des 49 carrés.

Combien y aurait-il de coïncidences si la grande pièce était pavée de 247 009 dalles (un carré de côté 497) et si le carré découvert en comptait 124 609 (un carré de côté 353) ?

Exercice AVP 5 Jerrycan academy

Un réservoir a la forme d'un cube, qu'on prendra d'arête 1. Il est posé sur un de ses sommets, la diagonale dont ce sommet est une extrémité est verticale, et on le remplit par un orifice ménagé à l'extrémité la plus haute de cette diagonale.

On demande de jauger ce récipient, c'est-à-dire de graduer la diagonale, les graduations représentant le volume de liquide contenu en fonction de la hauteur. On pourra pour cela représenter graphiquement la fonction correspondante.

Thème : Équations - Suites

Exercice ES1

Résoudre dans **R** l'équation : $x\left(\sqrt{x}+3\right)=4$

Exercice ES2

Les équations $x^2 + 5x + 6 = 0$ et $x^2 + 5x - 6 = 0$ ont ***chacune*** des solutions entières, tandis qu'une seule des équations $x^2 + 4x + 5 = 0$ et $x^2 + 4x - 5 = 0$ admet des solutions entières.

1. Démontrer que si les équations $x^2 + px + q = 0$ et $x^2 + px - q = 0$ ont ***chacune*** des solutions entières, alors il existe des entiers a et b pour lesquels $p^2 = a^2 + b^2$. (C.-à-d. que (a, b, p) est un triplet pythagoricien.)

2. Déterminer q en fonction de a et de b.

Exercice ES3 Combien de solutions ?

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$. Combien l'équation $f\left(f\left(x\right)\right) = 0$ a-t-elle de solutions ?

Exercice ES4

Dans une compétition sportive qui a duré n jours ($n > 1$), m médailles ont été distribuées. Le premier jour on a distribué une médaille, plus 1/7 des $m - 1$ médailles restantes. Le deuxième jour, on a distribué 2 médailles plus 1/7 du nouveau reste et ainsi de suite de telle manière que le nième jour on a distribué exactement les n médailles qui restaient. Déterminer m et n.

Exercice ES5

Soit n un entier naturel. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Exercice ES6

Étant donné deux entiers strictement positifs, m et n, une suite $(m; n)$ est une suite (x_n) de lettres A et B telle que :

- si $x_i = A$, i étant un entier strictement positif, alors $x_{i+m} = B$
- si $x_i = B$, i étant un entier strictement positif, alors $x_{i+n} = A$. Par exemple, ABABAB : : : est une suite (1; 1).

(a) Déterminer toutes les suites (2; 2).

(b) Démontrer qu'il n'existe aucune suite (1; 2).

(c) Pour tout entier strictement positif r, démontrer que s'il existe une suite $(m; n)$, alors il existe une suite $(rm; rn)$.

(d) Déterminer tous les couples $(m; n)$ pour lesquels il existe une suite $(m; n)$.

Exercice ES7

Soit a un entier naturel impair et b un entier strictement positif.

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in N}$ ainsi définie :

$$u_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} \text{si } u_n \text{ est un entier pair, alors } & u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \\ \text{sinon} & u_{n+1} = a + u_n \end{cases}$$

1. Démontrer qu'on peut trouver un entier naturel n tel que : $u_n \leq a$

2. Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.