

1. Thème : Nombres, arithmétique

1. (Sylvester)

Si on n'utilise pas la valeur faciale 17, on peut obtenir toute somme s'achevant par 0 ou 5. Si on utilise une vignette de valeur 17, on peut obtenir toute somme s'achevant par 2 ou 7 supérieure ou égale à 17, etc. La dernière hypothèse est l'utilisation de 4 vignettes de valeur 17, qui permet de réaliser toute somme s'achevant par 8 ou 3 supérieure ou égale à 68. 63 est donc la somme la plus grande à ne pas pouvoir être atteinte.

2. 9, 3 et les sept cubes

Les restes des cubes des entiers modulo 9 sont 1, -1 et 0 (on peut faire un tableau pour le vérifier). Si la somme des cubes de sept entiers est un multiple de 9, c'est qu'il y a parmi ces cubes autant congrus à 1 que congrus à -1. Autrement dit, il y a autant de nombres dont les restes modulo 9 sont 1, 4 ou 7 que de nombres dont les restes sont 2, 5 ou 8. Comme il y a sept nombres, il y en a au moins un dont le reste modulo 9 est 0, 3 ou 6 (ce qui fait 0 pour son cube) et donc dont le reste modulo 3 est 0. Les produit est donc multiple de 3.

3. Un irrationnel

Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

x satisfait à chacune des conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{aligned}x - \sqrt{2} &= \sqrt[3]{3} \\(x - \sqrt{2})^3 &= 3\end{aligned}$$

On développe en éliminant $\sqrt{2}$, ce qui conduit à la condition nécessaire :

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$$

Le nombre $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est donc racine du polynôme P défini par $P(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$

Si ce polynôme possède une racine rationnelle s'écrivant $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers premiers entre eux, comme on peut écrire $a^6 = b(a^4b + 6a^3b^2 + 12a^2b^3 - 36ab^4 + b^5)$, il s'ensuit que $b = 1$. En isolant b^6 et en factorisant par a , on obtient un résultat analogue, savoir que $a = 1$ ou $a = -1$.

Or, $P(1) = -34$ et $P(-1) = 48$

Donc le polynôme P ne possède pas de racine rationnelle donc le nombre proposé n'est pas rationnel.

4. Voisinage ne fait pas puissance

Considérons le nombre k et le produit n de k par ses deux voisins : $n = (k-1)k(k+1)$, qu'on peut aussi écrire $n = k(k^2 - 1)$. n est le produit de deux entiers premiers entre eux. S'il est une puissance, d'exposant b par exemple, alors tous les facteurs premiers qui apparaissent dans sa décomposition y apparaissent avec un exposant multiple de b . Et on ne trouve pas les mêmes facteurs premiers dans la décomposition de k que dans celle de $k^2 - 1$. Il existe donc des entiers p et q tels que $k = p^b$ et $k^2 - 1 = q^d$.

Il vient : $1 = p^{2b} - q^d$, ce qui nécessite que p^2 soit plus grand que q .

5. Un grand diviseur commun

D'après le petit théorème de Fermat, $k^{13} - k$ est un multiple de 13 pour tout k .

On peut aussi écrire, pour tout k : $k^{13} - k = k((k^2)^6 - 1)$, et l'un ou l'autre des deux facteurs de ce dernier produit est multiple de 7, si ce n'est pas le premier c'est le second, d'après le petit théorème de Fermat.

On peut également écrire, pour tout k : $k(k^{12} - 1) = k(k^4 - 1)(k^8 + k^4 + 1)$

Et aussi : $k(k^{12} - 1) = k(k^6 + 1)(k^3 + 1)(k^3 - 1)$

Et encore : $k(k^{12} - 1) = k(k^2 + 1)(k + 1)(k - 1)(k^8 + k^4 + 1)$

... qui prouvent la divisibilité par 5, 3 et 2. On aurait pu utiliser directement des congruences, mais les factorisations sont bien aussi.

Donc, tous les éléments de l'ensemble sont des multiples de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$, soit 2 730.

On calcule $2^{13} - 2 = 8 190 = 3 \times 2 730$

$3^{13} - 3 = 1 594 320$, qui n'est pas divisible par 9. 2 730 est donc le plus grand diviseur commun cherché

6. Problème de partage

Pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble A est constitué de 18 nombres entiers consécutifs.

On raisonne par disjonction de cas.

- L'ensemble A contient un multiple de 19.

Dans ce cas, il est unique et l'un des produits considéré est un multiple de 19 tandis que l'autre ne l'est pas. Le partage en deux ensembles disjoints est donc impossible.

- L'ensemble A ne contient pas de multiple de 19.

On considère \bar{A} l'ensemble obtenu après réduction modulo 19 des éléments de A . On a donc

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, \dots, 17, 18\}$$

On note P le produit des éléments de A , on a ainsi

$$P = 18! = 6402373705728000$$

Ce produit est congru à 1 modulo 19. Le théorème de Wilson donne directement le résultat puisque 19 est un nombre premier.

On suppose à présent qu'il existe un partage vérifiant les conditions de l'énoncé. Le produit des deux produits égaux est un carré, un carré congru à -1 modulo 19. Il reste à vérifier qu'aucun carré n'est congru à 1 modulo 19.

7. Inspiré par Euclide

- Montrons que 2 est un élément de M .

Comme l'ensemble M contient au moins trois éléments, il contient forcément un nombre premier impair p .

On considère $A = \{p\}$. Comme 2 divise -1 , on en déduit que 2 est un élément de M .

- Montrons que 3 est un élément de M .

Soit p un élément de M distinct de 2. On va procéder par une disjonction de cas modulo 3.

Si $p \equiv 1 [3]$, alors $p - 1 \equiv 0 [3]$. Autrement dit, 3 divise $p - 1$ et 3 est un élément de M (on a encore pris $A = \{p\}$).

Si $p \equiv 2 [3]$, alors, 3 divise $2p - 1$ et 3 est un élément de M . (On a pris $A = \{2, p\}$).

Si $p \equiv 0 [3]$, alors p est multiple de 3 donc égal à 3 (On a pris $A = \{p\}$).

Dans tous les cas, 3 est un élément de M .

- Montrons que l'ensemble M est infini.

On raisonne par l'absurde en supposant que M est fini. On peut alors considérer le nombre P , produit des éléments de M .

Soit p un élément de M , par définition de P , il divise P , ainsi l'entier $\frac{P}{p}$ est le produit des éléments de M différents de p .

L'hypothèse faite sur l'ensemble M permet d'affirmer que le nombre $\frac{P}{p} - 1$ se décompose en produit d'éléments de l'ensemble M . Le nombre $\frac{P}{p} - 1$ est premier avec les éléments de M distincts de p , c'est donc une puissance de p .

On peut alors exploiter les cas précédents :

On a

$$P - 2 = 2^\alpha \quad P - 3 = 3^\beta$$

où α et β sont des nombres entiers.

Comme M admet au moins trois éléments, on peut affirmer que $P \geq 2 \times 3 \times 5$ i.e. $P \geq 30$. On en déduit que $\alpha \geq 4$ puis que $P \equiv 2 [16]$ soit $P \equiv 2 [8]$.

Cela entraîne que $3^\beta \equiv -1 [8]$, ce qui est absurde car 3^β est congru à 1 ou à 3 modulo 8 selon la parité de β ... ce qui est absurde.

Ainsi, l'ensemble M est infini.

- $M = P$.

On considère un nombre premier q et on ordonne l'ensemble M de manière croissante :

$$M = \{2; 3; \dots\}$$

Pour $1 \leq i \leq (q + 1)$, on pose

$$P_i = p_1 \times p_2 \dots p_i$$

où p_i désigne le $i^{\text{ème}}$ élément de l'ensemble M . Il y a ainsi $q + 1$ nombres P_i et q classes de congruence modulo q . D'après le principe des tiroirs, il existe $i < j$ tels que $P_i \equiv P_j [q]$, ce qui donne

$$p_1 p_2 \dots p_i (p_{i+1} \dots p_j - 1) \equiv 0 [q]$$

On est alors dans l'un des deux cas suivants :

$$q \text{ est égal à l'un des } p_k \text{ pour } 1 \leq k \leq i \quad \text{ou} \quad q \text{ divise } (p_{i+1} \dots p_j - 1).$$

Dans les deux cas, q appartient à M . Comme q étant un entier naturel quelconque, on en déduit que $M = P$.

8. Premier à Polytechnique ?

a. Pour tout entier n , $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$

Ce produit de facteurs n'est premier que si l'un des deux facteurs est 1 ou -1 . Une condition nécessaire est donc que n soit égal à 1 ou -1 (comme la condition porte sur n^4 , on pouvait se contenter de chercher les solutions positives pour les avoir toutes). Cette condition est suffisante, puisque 5 est un nombre premier.

b. Soit p un nombre premier impair.

On commence par remarquer que, p étant premier avec 2, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k \equiv 1 [p]$, puis que $4k^2 \equiv 1 [p]$. Si p divise $n^4 + 4$, alors $n^4 \equiv -4 [p]$, ce qui précède indique qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(kn^2)^2 \equiv -1 [p]$. Par conséquent :

$$\text{Si } p \text{ premier impair divise } n^4 + 4, \text{ alors il existe } x \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } x^2 \equiv -1 [p].$$

Montrons que cette propriété entraîne que $p \equiv 1 [p]$.

Soit $d \in \mathbb{Z}$. Etudions la congruence

$$x^2 \equiv d [p] \quad \text{avec} \quad 1 \leq x \leq p-1 \quad (1)$$

Lorsque la congruence (1) a des solutions, on dit que d est *résidu quadratique modulo* p .

Si (1) a pour solution x_0 , alors $\{x_0; p - x_0\}$ est l'ensemble des solutions de (1).

En effet, soient x et y deux éléments de $\{1; 2; \dots; p-1\}$ vérifiant $x^2 \equiv y^2 [p]$. On en déduit que p divise $x^2 - y^2$, comme c'est un nombre premier, cela est équivalent à p divise $x - y$ ou $x + y$. Ainsi, $y = x$ ou $y = p - x$.

On a donc

$$x_0(p - x_0) \equiv -d [p] \quad (2)$$

Le théorème de Gauss et de Bézout assurent, que pour $a \in \{1; 2; \dots; p-1\}$, il existe $b \in \{1; 2; \dots; p-1\}$ unique tel que

$$ab \equiv d [p] \quad (3)$$

Ainsi, les $(p-3)$ éléments de $\{1; 2; \dots; p-1\}$ distincts de x_0 et $p - x_0$ sont associés deux à deux par la relation (3).

En multipliant, membre à membre, les $\frac{p-3}{2}$ congruences (3) et la congruence (2), on obtient :

$$(p-1)! \equiv -d^{\frac{p-1}{2}} [p] \quad (4)$$

En particulier $d = 1$ est résidu quadratique modulo p , donc d'après (4) :

$$(p-1)! \equiv -1 [p] \quad (5)$$

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Wilson* (John Wilson (1741 - 1793), mathématicien britannique). Pour d résidu quadratique modulo p quelconque, on a d'après (4) et (5)

$$d^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \quad (6)$$

On sait que, si p divise $n^4 + 4$, alors -1 est résidu quadratique modulo p , donc, en utilisant (6), on a $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.

Pour p de la forme $4k + 3$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on a : $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

Ainsi tout diviseur impair de $n^4 + 4$ est de la forme $4k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

a. Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que (1) $x^2 - 2(a+b)x = a^2 + b^2$, cette égalité est équivalente à, (2) $(x - (a+b))^2 = 2(a^2 + ab + b^2)$.

Si $x = a+b$, on a d'après (1), $-(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Ce qui est absurde. On a donc nécessairement $x \neq a+b$. On peut alors poser :

$$u = \frac{a}{x - (a+b)} \quad \text{et} \quad v = \frac{b}{x - (a+b)}$$

Les nombres u et v sont deux nombres rationnels et la relation (2) se réécrit

$$u^2 + uv + v^2 = \frac{1}{2}$$

b. Raisonnement par l'absurde : on suppose qu'il existe deux nombres rationnels u et v tels que : $u^2 + uv + v^2 = \frac{1}{2}$. Soit γ un dénominateur commun de u et v . On note α et β les numérateurs respectifs correspondants. Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} u^2 + uv + v^2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} &= \frac{1}{2} \\ 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \gamma^2 \end{aligned}$$

Quitte à diviser par le PGCD de α, β, γ , on peut supposer que α, β et γ sont premiers entre eux *dans leur ensemble*.

De ce qui précède, on peut affirmer que 2 divise γ^2 , autrement dit que γ est pair. Soit $\delta \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = 2\delta$. On a donc la relation :

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2\delta^2 \quad (3)$$

On sait que γ est pair et que le PGCD de α, β, γ est égal à 1. On peut donc affirmer que α ou β est un nombre impair. Sans perte de généralité, on peut supposer que α est un nombre impair.

Une analyse par disjonction de cas, en fonction de la parité de β montre que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ est un nombre impair. Ce qui contredit (3).

On a donc montré qu'il n'existe aucun couple de nombres rationnels $(u; v)$ vérifiant :

$$u^2 + uv + v^2 = \frac{1}{2}$$

D'après a., on peut donc conclure qu'il n'existe aucun nombre rationnel x vérifiant :

$$x^2 - 2(a+b)x = a^2 + b^2$$

10. Somme des inverses des premiers cubes

Le nombre p étant un nombre (premier) impair, le nombre $\frac{p-1}{2}$ est un nombre entier et on peut réorganiser la somme de la manière suivante (le premier terme de la somme avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier etc) :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{(p-k)^3}$$

On a ainsi :

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{(p-k)^3} \right)$$

Pour tout $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$, on a :

$$\frac{1}{k^3} + \frac{1}{(p-k)^3} = \frac{p(p^2 - 3pk + 3k^2)}{k^3(p-k)^3} = \frac{p c_k}{d_k}$$

Où $c_k = p^2 - 3pk + 3k^2$ et $d_k = k^3(p-k)^3$.

On a alors

$$\frac{a}{b} = p \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{c_k}{d_k} \quad (1)$$

Comme p est un nombre premier et k est un nombre entier strictement inférieur, les nombres p et d_k sont premiers entre eux. Ainsi, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{c_k}{d_k} = \frac{C}{D} \quad (2)$$

Avec C et D deux nombres entiers naturels et D premier avec p .

De (1) et (2), on déduit l'égalité $aD = pCb$, donc p divise aD , comme D et p sont premiers entre eux, p divise nécessairement a .

Remarque :

L'ensemble des nombres premiers étant infini, on peut faire tendre p vers $+\infty$ dans la somme $\sum_{k=1}^{p-1} 1/k^3$. On montre que cette somme définit un nombre, appelé *constante d'Apéry*, du nom du mathématicien français Roger Apéry (1916 - 1994) qui a montré en 1977 que ce nombre était irrationnel ... et c'est à peu près la seule chose que l'on sait de ce nombre encore aujourd'hui.

2. Thème : Équations, inéquations, suites

1. Équation

On commence par quelques remarques sur l'équation proposée. Elle peut s'écrire :

$\frac{4x^2+15x+17}{x^2+4x+12} = \frac{4x^2+15x+17+x^2+x+1}{x^2+4x+12+x^2+x+1}$, ou encore $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+h(x)}{g(x)+h(x)}$, avec les définitions qui conviennent. Les dénominateurs sont strictement positifs.

Il s'ensuit que ou bien $h(x) = 0$, ou bien $f(x) = g(x)$.

2. Nombres k -tangents

Procédons par conditions nécessaires. Prenons la tangente de chacun des membres de l'égalité :

$\frac{1}{k} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{xy}}$. Cette égalité conduit à $\frac{1}{k} = \frac{x+y}{xy-1}$, ou encore à $(2015-x)(2015-y) = 1 + 2015^2$.

On sait (!) que $1 + 2015^2 = 2 \times 97 \times 20929$. L'identification des facteurs du premier membre aux diviseurs associés (positifs ou négatifs) du second donne les solutions envisageables.

3. Pas la moyenne

On pose $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $(n-1)x_i \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} x_k$ s'écrit : $(n-1)x_i \leq n\bar{x} - x_i$ soit $x_i \leq \bar{x}$

Or, on a : $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) = n\bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$

Comme les n termes de cette somme sont positifs, on obtient : pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ $\bar{x} = x_i$

Donc tous les x_i sont égaux (à leur moyenne \bar{x}). Le système d'inégalités est alors facilement vérifié (il y a égalité partout). Par conséquent, l'ensemble des solutions est l'ensemble des n -uplets de la forme $(\lambda, \dots, \lambda)$ où λ est un entier.

4. Somme des carrés des écarts

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \sum_{j=1}^n (x - u_j)^2$

On a : $\sum_{j=1}^n m - u_j = nm - \sum_{j=1}^n u_j = nm - nm = 0$

Ce qui conduit à :

$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \sum_{j=1}^n [(x-m)^2 + 2(x-m)(m-u_j) + (m-u_j)^2] = n(x-m)^2 + 0 + \omega = n(x-m)^2 + \omega$

Puisque on a par définition de la fonction f : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket f(u_i) = \sum_{j=1}^n (u_i - u_j)^2$, on obtient :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket f(u_i) = n(u_i - m)^2 + \omega$

On a d'une part : $\sum_{i=1}^n f(u_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (u_i - u_j)^2 \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (u_i - u_j)^2$

Et d'autre part : $\sum_{i=1}^n f(u_i) = n \sum_{i=1}^n (u_i - m)^2 + n\omega = 2n\omega$

On en déduit donc que : $w = \frac{1}{2n} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (u_i - u_j)^2$

$i = j$ entraîne que $u_i - u_j = 0$. On peut donc restreindre la somme précédente aux couples (i,j) tels que $i \neq j$.

De plus : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on a : $(u_i - u_j)^2 + (u_j - u_i)^2 = 2(u_h - u_k)^2$ où $h = \min(i,j)$ et $k = \max(i,j)$

Par conséquent : $w = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i - u_j)^2$

On a : $\omega \geq 0$ comme somme de carrés de nombres réels et $\omega = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, n\}, u_i = m \Leftrightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_n$

L'égalité encadrée ci-dessus permet de retrouver ce résultat :

$$\omega \geq 0 \text{ comme somme de carrés de nombres réels et } \omega = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, n\}^2, u_i - u_j = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_n$$

Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une suite de nombres réels de moyenne arithmétique $m = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$.

On pose $\omega = (u_1 - m)^2 + (u_2 - m)^2 + \dots + (u_n - m)^2$.

Exprimer ω en fonction des différences $(u_i - u_j)$ où le couple (i, j) décrit $\llbracket (1, n) \rrbracket^2$.

Même problème pour les couples (i, j) vérifiant de plus $i < j$.

Quelles sont les suites telles que $\omega = 0$?

5. Drôle d'équation

Soient α_n et β_n respectivement les nombres : $a^{\frac{1}{2^n}}$ et $b^{\frac{1}{2^n}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } (\alpha_n + \beta_n)^2 = \alpha_{n-1} + 2\alpha_n\beta_n + \beta_{n-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \alpha_n\beta_n \in \mathbb{Q}$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \alpha_n\beta_n = (\alpha_n\beta_n)^{2^{n-1}}$

Ecrivons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n\beta_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{p_1}{q_1} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{2^{n-1}}$ donc $p_1 = (p_n)^{2^{n-1}}$ et $q_1 = (q_n)^{2^{n-1}}$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2^{n-1}} = +\infty$ donc il existe un nombre entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, 2^{2^{n-1}} > p_1$ et $2^{2^{n-1}} > q_1$

Par conséquent : $\forall n \geq n_0, p_n = q_n = 1$ donc $\alpha_n\beta_n = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \alpha_n\beta_n = 1$

Notons r_n le rationnel $\alpha_n + \beta_n$

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } r_n^2 = r_{n-1} + 2$

Ecrivons $r_n = \frac{u_n}{v_n}$ où u_n et v_n sont deux entiers naturels premiers entre eux.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } r_n^2 = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{v_{n-1}}$ et $\text{PGCD}(u_{n-1} + 2v_{n-1}, v_{n-1}) = \text{PGCD}(u_{n-1}, v_{n-1}) = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } v_n^2 = v_{n-1}$ et par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_n^{2^n} = v_0$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_0^{\frac{1}{2^n}} = 1$

Comme v_n est un nombre entier, à partir d'un certain rang, $v_n = 1$

Donc $v_0 = 1$ et par suite, pour tout entier naturel n , $v_n = 1$

Il en résulte que pour tout entier naturel n , $r_n \in \mathbb{N}$

Remarquons encore que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{2^n}} + b^{\frac{1}{2^n}}) = 2$

Il existe donc un rang n_0 pour lequel : $\forall n > n_0, \alpha_n + \beta_n = 2$ puisque $r_n = \alpha_n + \beta_n$ est un entier.

Pour tout entier naturel $n > n_0$, $\begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 2 \\ \alpha_n\beta_n = 1 \end{cases}$

Ce qui équivaut à : Pour tout entier naturel $n > n_0$, α_n et β_n sont les racines du trinôme

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

Donc, pour tout entier naturel $n > n_0$, $\alpha_n = \beta_n = 1$

D'où : $a = \alpha_n^{2^n} = 1$ et $b = \beta_n^{2^n} = 1$ (où n est un entier naturel supérieur à n_0).

6. Approximations du nombre π

PARTIE A.

a. Soit $\theta \in [0; \pi[$. On a : $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

Comme $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$, on obtient : $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$

Par ailleurs, on a : $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

Comme $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$, on obtient : $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$

Des égalités précédemment obtenues, on déduit que : $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$

b. **On démontre ce résultat par récurrence :**

Pour $n = 0$ le résultat est vrai

Supposons que le résultat est vrai au rang n (où n entier naturel). Montrons -le au rang $n+1$:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2c_n} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right) \text{ d'après la question a. puisque } 0 \leq \frac{\pi}{6 \times 2^n} < \pi$$

c. On calcule $\cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ de proche en proche à l'aide de la formule de récurrence. On obtient successivement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.866025 \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.965926 \quad \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \approx 0.99445$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{48}\right) \approx 0.997859 \quad \cos\left(\frac{\pi}{96}\right) \approx 0.999465$$

d. Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\sin \frac{\pi}{6 \times 2^n} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n-1}}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2c_{n-1}}$$

$$\text{Et } \tan \frac{\pi}{6 \times 2^n} = \sqrt{\frac{1 - c_{n-1}}{1 + c_{n-1}}}$$

PARTIE B. Méthode d'Archimède.

a. On considère la fonction α définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\alpha(x) = x - \sin x$

C'est une fonction croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\alpha(0) = 0$

$$\text{Donc : } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \leq x$$

On considère la fonction β définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\alpha(x) = \tan x - x$

C'est une fonction croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\beta(0) = 0$

$$\text{Donc : } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x \leq \tan x$$

b. On applique la double inégalité à $x = \frac{\pi}{6 \cdot 2^n}$

c. On considère Γ_n un polygone régulier à $6 \cdot 2^n$ côtés inscrit dans le cercle Γ de rayon 1.

Chaque côté de Γ_n est sous-tendu par un angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{6 \cdot 2^n}$ et a donc pour longueur

$$2 \sin\left(\frac{1}{2} \frac{2\pi}{6 \cdot 2^n}\right)$$

Ainsi, la première inégalité de (A_n) exprime que le demi-périmètre de Γ_n est inférieur ou égal à la demi-circconférence de Γ .

On montre de même que la seconde inégalité de (A_n) exprime que la demi-circconférence de Γ est inférieure ou égale au demi-périmètre d'un polygone régulier à $6 \cdot 2^n$ côtés circonscrit à Γ .

$$d. (A_4): 48 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \leq \pi \leq 48 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$$

L'encadrement fourni par (A_4) a une amplitude de $3.143 - 3.141 = 0.002$

Une valeur approchée de π à 0.001 près est 3.142

e. Les fonctions sin et tan étant dérivables en 0, de nombre dérivé 1, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

En remarquant que pour tout entier n , on a : $6 \cdot 2^n \sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right)}{\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}} \times \pi$

$$\text{On obtient : } \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot 2^n \sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) = \pi$$

$$\text{De même : } \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot 2^n \tan\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) = \pi$$

Les inégalités (A_n) permettent donc de calculer π avec une précision arbitraire.

PARTIE C. méthode de Snellius.

a. On considère la fonction $g : x \mapsto x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ Cette fonction est croissante sur $[0; \pi]$

b. D'après le résultat précédent et $g(0)=0$, on obtient l'inégalité voulue.

c. On définit sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $\alpha : x \mapsto \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x - x$

Elle est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (car : $0 \leq \sin \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}$ et $x^2 \leq \tan^2 x$) et

$\alpha(0) = 0$. On obtient alors l'inégalité demandée.

d. On applique les inégalités des questions b. et c. à $x = \frac{\pi}{6 \cdot 2^n}$

Puis, on applique le résultat de la question d. de la partie A.

e. (S_4) s'écrit donc : $\frac{288 \sqrt{2 - 2c_3}}{4 + \sqrt{2 + 2c_3}} \leq \pi \leq 32 \left(\sqrt{2 - 2c_3} + \sqrt{\frac{2 - 2c_3}{2 + 2c_3}} \right)$

On utilise la question c. de la partie A.

On obtient : $3.14159263 \leq \pi \leq 3.14159285$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = 0.5$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta(x)}{x^5} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{18}$

g. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \cdot \frac{\delta(n)}{d(n)} = \frac{\pi^2}{36} \left(\frac{1}{18} : \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{18} \right)^2$

h. Pour n suffisamment grand, on peut donc considérer que $d(n)$ est $\left(\frac{9 \cdot 2^{n+1}}{\pi}\right)^2$ fois plus grand que $\delta(n)$. La

méthode de Snellius améliore donc celle d'Archimède d'un facteur $\left(\frac{9 \cdot 2^{n+1}}{\pi}\right)^2$ pour n suffisamment grand.

3. Thème : Calculs et ordre dans R

1. Une majoration

On peut factoriser successivement l'expression donnée de la façon suivante :

$$P = ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = ab(a-b)(a+b) + c(b^3 - bc^2 + ac^2 - a^3)$$

$$\text{Soit } P = (a-b)ab(a+b) + c(b-a)(b^2 + ab + a^2) + c^2(a-b) = (a-b)[ab(a+b) - c(b^2 + ab + a^2) + c^2]$$

$$\text{Soit } P = (a-b)[ab(a+b) + c^2 - cb^2 - ca(a+b)] = (a-b)[a(a+b)(b-c) + c(c^2 - b^2)]$$

$$\text{Soit } P = (a-b)(b-c)[a(a+b) - c(b+c)] = (a-b)(b-c)[a^2 + ab - bc - c^2] = (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$$

On pose alors $x = b - c$, $y = c - a$, $z = a - b$ et $s = a + b + c$ (ce qui redonne $a = \frac{s - y + z}{3}$, $b = \frac{s - z + x}{3}$ et $c = \frac{s - x + y}{3}$).

On peut alors remarquer que $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ et on est ramené à trouver le plus petit nombre M tel que $|sxyz| \leq \frac{M}{9}(s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2$ lorsque la somme des trois nombres x , y et z est nulle.

Le problème est symétrique en (x, y, z) et il est inchangé si on remplace (x, y, z) par $(-x, -y, -z)$. On peut donc se contenter de traiter le problème en supposant x positifs et y, z négatifs.

On a alors $|yz| = yz$. Or on vérifie rapidement que $yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$.

Alors $|xyzs| \leq \frac{x^3|s|}{4}$. D'autre part on vérifie rapidement que $y^2 + z^2 \geq \frac{(y+z)^2}{2}$ soit $y^2 + z^2 \geq \frac{x^2}{2}$.

On a donc $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq s^2 + x^2 + \frac{x^2}{2}$ soit $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq s^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$.

En utilisant le fait que la moyenne arithmétique de plusieurs nombre majore la moyenne géométrique de ces nombres,

on en tire $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\sqrt{s^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^3}$ d'où $(s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 16\sqrt{\frac{s^2 x^6}{8}}$ soit

$(s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 4\sqrt{2}|s|x^3 \geq 4\sqrt{2} \times 4|xyzs|$. On a donc $(s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 16\sqrt{2}|xyzs|$ et on peut prendre $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

C'est bien la plus petite valeur. On le voit en choisissant $y = z = -\frac{x}{2}$ et $s = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ce qui se produit pour $a = 2$,

$$b = 2 + \sqrt{3} \text{ et } c = 2 - \sqrt{3}.$$

2. Une inégalité

a) Soit x, y et z trois réels strictement positifs, on pose $m = \frac{x+y+z}{3}$ et h tel que $\frac{1}{h} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ (moyenne arithmétique et moyenne harmonique des nombres x, y et z). On va déjà montrer que $h \leq m$ avec égalité uniquement si $x = y = z$.

Pour tout réel t strictement positif, on a $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{2}$ donc $t + \frac{1}{t} \geq 2$ avec égalité uniquement si $t = 1$. Comme x, y et z sont strictement positifs et comme

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right), \text{ on peut appliquer ce qui précède à successivement}$$

$t = \frac{x}{y}$, $t = \frac{y}{z}$ et $t = \frac{z}{x}$, $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ avec égalité uniquement si $\frac{x}{y} = 1, \frac{y}{z} = 1, \frac{z}{x} = 1$ soit $x = y = z$.

Posons $s = \alpha + \beta + \gamma$, $\alpha' = \frac{\alpha}{s}$, $\beta' = \frac{\beta}{s}$, $\gamma' = \frac{\gamma}{s}$, $\alpha'' = 1 - \alpha'$, $\beta'' = 1 - \beta'$, $\gamma'' = 1 - \gamma'$ et

$S = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$. Les nombres α', β', γ' appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$ et ont pour somme 1.

Les nombres $\alpha'', \beta'', \gamma''$ sont donc strictement positifs et ont pour somme 3.

Alors $S = \frac{\alpha}{s - \alpha} + \frac{\beta}{s - \beta} + \frac{\gamma}{s - \gamma} = \frac{\alpha'}{1 - \alpha'} + \frac{\beta'}{1 - \beta'} + \frac{\gamma'}{1 - \gamma'} = -3 + \frac{1}{\alpha''} + \frac{1}{\beta''} + \frac{1}{\gamma''}$.

D'après le début de la question, $\frac{1}{\alpha''} + \frac{1}{\beta''} + \frac{1}{\gamma''} \geq \frac{9}{\alpha'' + \beta'' + \gamma''}$ soit $\frac{1}{\alpha''} + \frac{1}{\beta''} + \frac{1}{\gamma''} \geq \frac{9}{2}$ donc $S \geq -3 + \frac{9}{2}$ soit

$S \geq \frac{3}{2}$ avec égalité uniquement si $\alpha'' = \beta'' = \gamma''$, ce qui équivaut à $\alpha' = \beta' = \gamma'$ c'est-à-dire à $\alpha = \beta = \gamma$.

b) Posons $\sigma = \frac{a^2 x^2}{(by + cz)(bz + cy)} + \frac{b^2 y^2}{(cz + ax)(cx + az)} + \frac{c^2 z^2}{(ax + by)(ay + bx)}$.

$a \geq b \geq c > 0$ et $x \geq y \geq z > 0$ donc $(b - c)(y - z) \geq 0$ c'est-à-dire, en développant, $by + cz \geq cy + bz$.

Alors $(by + cz)^2 \geq (cy + bz)(by + cz)$ car tous les termes sont positifs, donc $\frac{a^2 x^2}{(by + cz)(bz + cy)} \geq \frac{a^2 x^2}{(by + cz)^2}$.

De plus, $(by + cz)^2 \leq 2b^2 y^2 + 2c^2 z^2$ car $2b^2 y^2 + 2c^2 z^2 - (by + cz)^2 = (by - cz)^2$ d'où, puisque les termes sont

positifs, $\frac{a^2 x^2}{(by + cz)(bz + cy)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 x^2}{b^2 y^2 + c^2 z^2} \right)$. De même $\frac{b^2 y^2}{(cz + ax)(cx + az)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 y^2}{c^2 z^2 + a^2 x^2} \right)$ et

$\frac{c^2 z^2}{(ax + by)(ay + bx)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{c^2 z^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2} \right)$. En utilisant le résultat du a), on en déduit que $\sigma \geq \frac{3}{4}$.

Toujours d'après le a), s'il y a égalité alors $ax = by = cz$ soit $a = b = c$ et $x = y = z$ puisque $a \geq b \geq c > 0$ et $x \geq y \geq z > 0$.

Réciproquement, si $a = b = c$ et $x = y = z$ alors $\sigma = \frac{3}{4}$.

3. L'égalité pour beaucoup, pas pour tous

a) On pose $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$ et $c = \frac{z}{z-1}$. Alors a, b et c sont différents de 1 et $x = \frac{a}{a-1}$, $y = \frac{b}{b-1}$, $z = \frac{c}{c-1}$. Il

s'agit de montrer que lorsque $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$, on a $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$.

La condition $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ s'écrit aussi en développant $a + b + c = ab + bc + ca + 1$ d'où en élevant au carré $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + (ab + bc + ca)^2$, d'où on a bien $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ avec égalité si et seulement si $ab + bc + ca = 0$.

b) D'après les calculs précédents, on doit chercher une infinités de triplets (a, b, c) de nombres rationnels différents de 1 tels que $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca = 0$. On cherche de tels triplets tels que $a \neq 0$.

Posons $u = \frac{b}{a}$ et $v = \frac{c}{a}$. On veut avoir $a(1 + u + v) = 1$ et $u + v + uv = 0$.

Pour $u \neq -1$, la seconde condition s'écrit $v = -\frac{u}{u+1}$. Alors $1 + u + v = 1 + u - \frac{u}{u+1} = \frac{u^2 + u + 1}{u+1}$ et donc $1 + u + v$ ne peut être nul.

D'où $a = \frac{u+1}{u^2 + u + 1}$, $b = \frac{u^2 + u}{u^2 + u + 1}$ et $c = -\frac{u}{u^2 + u + 1}$ (***) donne un triplet qui vérifie les deux conditions et est constitué de nombres rationnels si u est un nombre rationnel.

De plus on vérifie que $a = 1$ équivaut à $u = 0$, que $c = 1$ équivaut à $u = -1$ et que $b \neq 1$.

Lorsque u décrit l'ensemble des rationnels différents de 0 et de -1 , (***) donne une infinité de solutions rationnelles puisque le rapport $u = \frac{b}{a}$ prend une infinité de valeurs.

4. Un minimum

a) Si u, v, x, y sont des réels strictement positifs,

$$\text{alors } \frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{v} - \frac{(x+y)^2}{u+v} = \frac{x^2v(u+v) + y^2u(u+v) - (x^2 + y^2 + 2xy)uv}{uv(u+v)} = \frac{x^2v^2 + y^2u^2 - 2xyuv}{uv(u+v)}$$

$$\text{Soit } \frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{v} - \frac{(x+y)^2}{u+v} = \frac{(xv - yu)^2}{uv(u+v)}. \text{ On en déduit que } \frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{v} \geq \frac{(x+y)^2}{u+v}.$$

b) Par récurrence, on obtient $\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{(a_1+\dots+a_n)^2}{a_1+\dots+a_n+b_1+\dots+b_n}$, soit $\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}$,

l'égalité étant réalisée pour $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = \frac{1}{n}$.

La valeur minimale est donc $\frac{1}{2}$.

5. Calcul littéral

Posons $a = x^5 - x^2$, $b = x^5 + y^2 + z^2$ et $c = x^5 + x^3y^2 + x^3z^2$.

On a $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{a(c-b)}{bc} = \frac{x^2(x^3-1)^2(x^2+y^2)}{bc}$ qui est positif ou nul puisque x, y et z sont des réels positifs.

$$\text{Donc } \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^5 + x^3y^2 + x^3z^2}.$$

$$xyz \geq 1, \frac{1}{x} \leq yz. \text{ Or } \frac{x^5 - x^2}{x^5 + x^3y^2 + x^3z^2} = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ d'où } \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^2 - yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\text{De même, } \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} \geq \frac{y^2 - zx}{x^2 + y^5 + z^2} \text{ et } \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq \frac{z^2 - zy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{D'où } \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq \frac{x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - zy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Or } x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - zy = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \text{ d'où le résultat.}$$

6. Un produit

$$N = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \times \dots \times \frac{(n-1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$$

On peut écrire, après factorisation et rassemblement en deux produits :

$$N = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

Les deux produits sont télescopiques. Pour le premier :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$$

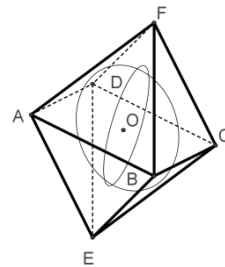
Pour le second :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{7}{3} \times \frac{13}{7} \times \frac{21}{13} \times \dots \times \frac{n^2-3n+3}{n^2-5n+7} \times \frac{n^2-n+1}{n^2-3n+3} \times \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{n^2+n+1}{3}$$

$$\text{Finalement : } N = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2+n+1}{3}$$

Où on voit apparaître la limite $\frac{2}{3}$

4. Thème : Angles et distances



1. Sphère tangente aux faces d'un octaèdre

Solution géométrique :

Désignons par J le milieu du segment [AB] et par K son projeté orthogonal sur la droite (FJ).

Le triangle AFJ étant équilatéral, les droites (AB) et (FJ) sont perpendiculaires, la droite (OJ) étant orthogonale au plan (ABC), elle l'est à la droite (AB) ; ainsi la (AB) est orthogonale au plan (OFJ) et donc à la droite (OK). La droite (OK) étant orthogonale aux droites (AB) et (FJ), elle l'est au plan (ABF) et donc K est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABF).

En appliquant le théorème de Pythagore dans des triangles bien choisis, on (re)trouve $OA = OF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $JF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis en calculant de deux manières différentes l'aire du triangle OJF, on obtient $OK = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

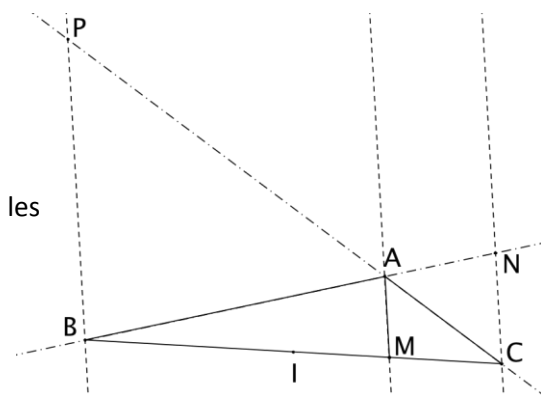
La distance du point O à chacune des faces de l'octaèdre est égale à $\frac{1}{\sqrt{6}}$; c'est le rayon cherché.

Solution analytique : on considère les vecteurs $\vec{i} = \sqrt{2}\vec{OA}$, $\vec{j} = \sqrt{2}\vec{OB}$ et $\vec{k} = \sqrt{2}\vec{OF}$ et le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce repère, le plan (ABF) a pour équation $x + y + z - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ et on retrouve la distance du point O au plan (ABF).

2. Recherche d'un minimum

Soit ABC un triangle et M un point du segment [BC], distinct de B et de C.

Par les points B et C, on mène les parallèles à la droite (AM) qui coupent les droites (AB) et (AC) respectivement en N et P.



En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles CBP, puis BNC, on obtient :

$$\frac{BP}{AM} = \frac{CB}{CM} \text{ et } \frac{CN}{AM} = \frac{BC}{BM}, \text{ puis } \frac{BP+CN}{AM} = BC \left(\frac{1}{BM} + \frac{1}{BC-BM} \right) = \frac{BC^2}{BM(BC-BM)}$$

En posant $x = \frac{BM}{BC}$, $\frac{BP+CN}{AM} = \frac{1}{x(1-x)}$. Sur l'intervalle $]0;1[$, $\frac{1}{x(1-x)}$ est minimal pour $x = \frac{1}{2}$, c'est à dire lorsque

M est le milieu du segment [BC].

3. La grande médiane

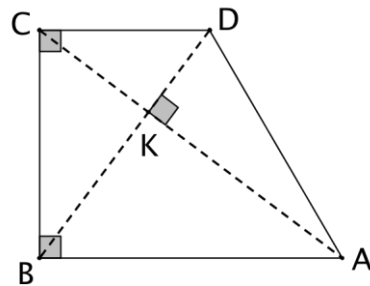
Soit ABC un triangle dont le périmètre est 2. On note a , b et c les longueurs respectives BC, CA et AB. Soient m_a , m_b et m_c les longueurs des médianes issues respectivement des sommets A, B et C. Le théorème de la médiane conduit

$$\text{à } m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4} \text{ et } m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}. \text{ On en déduit que } m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Or, pour tous réels a, b, c : $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$, donc, le périmètre étant égal à 2, $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq 1$.

(la première inégalité peut s'établir grâce à l'égalité $(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$)

Supposons que chacune des médianes ait une longueur strictement inférieure à $\frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < 1$. Cette dernière inégalité étant en contradiction avec celle qui a été établie précédemment, l'une des médianes au moins a une longueur supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



4. Trapèze à diagonales perpendiculaires

Soit S l'aire du trapèze ABCD : $S = \frac{AB+CD}{2} \times BC$, ce qui peut s'écrire

$$S = \left(\frac{AB}{BC} + \frac{CD}{BC} \right) \times \frac{BC^2}{2}.$$

Or $\frac{AB}{BC} = \tan \widehat{BCA}$ et $\tan \widehat{BCA} = \frac{BK}{CK}$; de même $\frac{CD}{BC} = \tan \widehat{CBD}$ et $\tan \widehat{CBD} = \frac{CK}{BK}$.

On obtient alors $S = \left(\frac{BK}{CK} + \frac{CK}{BK} \right) \times \frac{BC^2}{2}$. Sachant que, pour tout réel x strictement positif, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, on conclut que l'aire du trapèze est supérieure ou égale à BC^2 .

5. Majoration de l'aire d'un quadrilatère convexe

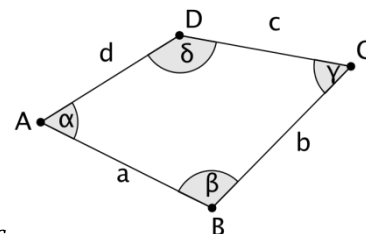
Soit ABCD un quadrilatère convexe d'aire S . On pose $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$.

On calcule S de deux manières différentes : $S = \frac{ab}{2} \sin \beta + \frac{cd}{2} \sin \delta$ et $S = \frac{ad}{2} \sin \alpha + \frac{bc}{2} \sin \gamma$ On

obtient alors $4S \leq ab + bc + cd + da$, puis encore $4S \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2} + \frac{d^2+a^2}{2}$, soit

$$4S \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

On obtient égalité uniquement dans le cas où $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \sin \delta = 1$, c'est à dire lorsque ABCD est un rectangle.



6. Ne dites pas « la formule du héron »

a. Soit x, y et z des réels positifs ou nuls.

Si $y+z-x < 0$, alors $x > y+z$ et donc $z+x-y > 0$ et $x+y-z > 0$. Alors $xyz \geq 0$ et $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) < 0$; l'inégalité est vérifiée. On effectue le même raisonnement si $z+x-y < 0$ et si

$x+y-z < 0$. On suppose alors que $y+z-x > 0$, $z+x-y < 0$ et $x+y-z > 0$ et on pose $\begin{cases} y+z-x=u \\ z+x-y=v \\ x+y-z=w \end{cases}$ ce qui

conduit à $\begin{cases} 2z = u+v \\ 2y = w+u \\ 2x = v+u \end{cases}$. Le problème revient à montrer que $(v+w)(w+u)(u+v) \geq 8uvw$. Cette dernière inégalité

est bien vérifiée puisque, pour tous réels positifs t et s , $t+s \geq 2\sqrt{ts}$.

Conclusion : pour tous réels x, y et z positifs ou nuls, $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

b. Sur le cercle trigonométrique, on inscrit un triangle dont les côtés sont mesurés par a, b et c .

Notons p le demi-périmètre du triangle, S l'aire du triangle et rappelons quelques propriétés relatives aux longueurs a , b et c des côtés d'un triangle et aux rayons respectifs r et R des cercles inscrits et circonscrits d'un triangle : $S = rp$ et $S = \frac{abc}{4R}$.

$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{2p}{abc} = \frac{1}{2Rr}$. Sachant que $R = 1$, il reste à montrer que $2r \leq 1$.

D'après la formule de Héron $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{p}{8}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

En utilisant le lemme démontré en début d'exercice, on obtient $S^2 \leq \frac{p}{8}abc$, qui conduit à $rp \times \frac{abc}{4R} \leq \frac{p}{8}abc$ soit $2r \leq 1$.

7. Théorème de Ptolémée

a. Pour tous nombres complexes a, b, c et d $(a-b)(c-d) + (a-c)(d-b) + (a-d)(b-c) = 0$. La vérification est immédiate.

b. Soit A, B, C, D quatre points du plan non alignés et distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b, c, d . D'après la question précédente :

$$(c-a)(d-b) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) \text{ ce qui conduit à } |(c-a)(d-b)| = |(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)|.$$

Or, pour tous nombres complexes z et z' : $|zz'| = |z||z'|$ et $|z+z'| \leq |z| + |z'|$, donc $|c-a||d-b| \leq |a-b||c-d| + |a-d||b-c|$ ce qui se traduit par $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

c. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ si et seulement si $|(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)| = |a-b||c-d| + |a-d||b-c|$

Or pour z et z' deux nombres complexes non nuls, $|z+z'| = |z| + |z'|$ équivaut à $\frac{z'}{z}$ est un réel strictement positif,

donc $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ si et seulement si $\arg\left(\frac{(a-d)(b-c)}{(a-b)(c-d)}\right) = 0[2\pi]$.

Or $\arg\left(\frac{(a-d)(b-c)}{(a-b)(c-d)}\right) = 0[2\pi]$ équivaut à $\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) + \pi[2\pi]$ et qui se traduit par

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}\right) + \pi[2\pi].$$

Cette condition équivaut à A, B, C et D sont cocycliques, les points A et C se trouvant de part et d'autre de la droite (BD).

8. Partage de cercles

On donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles respectivement en A et en A' ,

d'aires respectives S et S'

Le cercle inscrit dans le triangle ABC est le triangle circonscrit au triangle $A'B'C'$; on note

r son rayon.

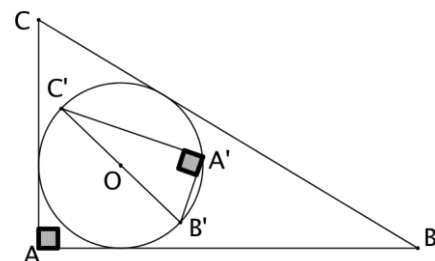
$$S' = \frac{h \times B'C'}{2} \text{ ou } h \text{ est la hauteur issue de } A'. \quad S' = \frac{h \times 2r}{2} \text{ et } h \leq A'O, \text{ donc } S' \leq r^2.$$

$$\text{Posons } AB = c, AC = b \text{ et } BC = a. \quad S = \frac{a+b+c}{2}r. \quad S = \frac{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}{2}r.$$

b et c étant des réels positifs, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ et $b^2+c^2 \geq 2bc$ donc $a+b+c \geq \sqrt{2}(1+\sqrt{2})\sqrt{bc}$.

On obtient $S \geq (1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{bc}{2}}r$, soit $S \geq (1+\sqrt{2})\sqrt{S}r$, puis $S \geq (1+\sqrt{2})^2 r^2$.

Des deux inégalités $S' \leq r^2$ et $S \geq (1+\sqrt{2})^2 r^2$, on déduit que $\frac{S}{S'} \geq 3+2\sqrt{2}$.



Thème : Logique, dénombrement, probabilités

Exercice 1 (« Il en reste toujours qui ne vont pas ensemble »)

Numérotons les paires de chaussettes. Le nombre de combinaisons de k objets pris parmi les $2n$ chaussettes est $\binom{2n}{k}$. Le nombre de combinaisons de k chaussettes prises parmi $2n$ et contenant la paire numéro i est $\binom{2n-2}{k-2}$. En supposant l'équiprobabilité des tirages de chaque combinaison de k chaussettes, on obtient que la probabilité que la paire de chaussettes numéro i soit formée au cours du tirage de k chaussettes est :

$$\frac{\binom{2n-2}{k-2}}{\binom{2n}{k}} = \frac{k(k-1)}{2n(2n-1)}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, notons Y_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la paire numéro i se trouve parmi les k chaussettes tirées et la valeur 0 sinon. Alors nous avons :

$$X_k = \sum Y_i$$

Et par linéarité de l'espérance :

$$E(X_k) = \sum E(Y_i) = n \frac{k(k-1)}{2n(2n-1)} = \frac{k(k-1)}{2(2n-1)}$$

Exercice 2 (Centre du cercle circonscrit à un triangle)

a) Il suffit de repérer les points B et C par rapport à A . Dans ce qui suit nous notons B' et C' les points diamétralement opposés à B et C sur le cercle (\mathcal{C}) . La démarche que nous suivons est la suivante : on tire au hasard deux diamètres sur chacun desquels on choisit les points B et C . Il y a quatre choix équiprobables possibles et un seul correspond à la situation où O est intérieur au triangle ABC . La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{4}$.

Un repère orthogonal d'origine O le centre de (\mathcal{C}) étant choisi, nous supposons donc que A est le point de coordonnées $(1,0)$. Le choix des points B et C est alors équivalent au choix d'un couple (θ, φ) dans $[0, 2\pi]^2$. Les cas de dégénérescences correspondent à $\theta = 0, \varphi = 0$ ou $\theta = \varphi$. Notons K l'ensemble des couples de Ω de $[0, 2\pi]^2$ privé de l'ensemble X des couples (θ, φ) tels que l'un des triangles $ABC, AB'C, ABC'$ ou $AB'C'$ soit dégénéré ou tels que deux sommets d'un de ces triangles soient diamétralement opposés. X est de probabilité nulle, K et Ω ont même probabilité : géométriquement ces ensembles correspondent à des régions du plan de même aire $4\pi^2$. Pour $\theta = 0, \varphi = 0$ dans K , il existe un triplet unique à une constante multiplicative près tel que O soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients x, y et z . Alors le point O est intérieur au triangle ABC si et seulement si x, y et z sont de même signe. Pour $\theta = 0, \varphi = 0$ de K aucun des coefficients x, y et z n'est nul. On a :

$$\begin{cases} x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \\ x\overrightarrow{OA} - y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \\ x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} - z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \\ x\overrightarrow{OA} - y\overrightarrow{OB} - z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Or parmi les triplets $(x, y, z), (x, -y, z), (x, y, -z)$ et $(x, -y, -z)$ un et un seul est tel que x, y et z soient de même signe. Notons t l'application de $[0, 2\pi[$ dans lui-même associant à $\alpha \in [0, 2\pi[$ l'élément de $[0, 2\pi[$ égal à $\alpha + \pi$ modulo 2π et E le sous-ensemble de K formé des couples (θ, φ) tels que x, y et z soient de même signe, c'est à dire O soit intérieur au triangle ABC . ce qui précède montre que les ensembles E, E_1, E_2 et E_3 images respectives de E par les applications $(\theta, \varphi) \rightarrow (t(\theta), \varphi), (\theta, \varphi) \rightarrow (\theta, t(\varphi)), (\theta, \varphi) \rightarrow (t(\theta), t(\varphi))$, forment une partition de K . Par raison de symétrie, on se persuade que E, E_1, E_2 et E_3 ont la même probabilité et en résumé nous avons :

$$\begin{cases} p(E) = p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) \\ E \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 = K, \end{cases} \quad \text{les ensembles } E, E_1, E_2 \text{ et } E_3 \text{ étant deux à deux disjoints}$$

Il en résulte que $4p(E) = p(K) = p(\Omega) = 1$. Par conséquent $p(E) = \frac{1}{4}$. La probabilité de l'événement O est intérieur au triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{4}$.

b) Notons A, B et C les mesures en radians comprises entre 0 et π des angles du triangle ABC . Il est bien connu que le point O est barycentre des points A, B et C affectés des coefficients $\sin 2A, \sin 2B$ et $\sin 2C$. Le triangle est acutangle si et seulement si $2A, 2B$ et $2C$ appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$, ce qui équivaut à $\sin 2A, \sin 2B$ et $\sin 2C$ sont strictement positifs. Cette condition est équivalente à O est intérieur au triangle ABC et donc la probabilité est donc égale à $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 (Chute sur le carreau)

Repérons la position du centre du disque dans le carré $ABCD$ où il tombe, par ses coordonnées (X, Y) dans le repère (A, \vec{i}, \vec{j}) avec $\vec{i} = \frac{1}{l}\vec{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{l}\vec{AC}$. (X, Y) est un couple de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0, l]$. Soit Z la variable aléatoire indiquant le nombre de joints que rencontre la pièce. Nous conviendrons que la pièce rencontre un joint si seulement si l'intersection de ce disque avec le joint est non vide et non réduite à un point. Comme $d < l$, Z peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$ et 4 . On a donc $p(Z = 3) = p(\emptyset) = 0$.

Notons r le rayon du disque.

☞ $Z = 0$ si et seulement si $r \leq X \leq l - r$ et $r \leq Y \leq l - r$. L'aire du domaine Δ_0 relatif à ces conditions est $(l - 2r)^2$. Alors

$$p(Z = 0) = \frac{(l - 2r)^2}{l^2} = \left(1 - \frac{d}{l}\right)^2$$

☞ $Z = 1$ si seulement si $(X, Y), (X, l - Y), (Y, X)$ ou $(Y, l - X)$ appartient à $[r, l - r] \times [0, r]$. Le domaine Δ_1 associé à $(Z = 1)$ a donc pour aire $4(l - 2r)r$ et

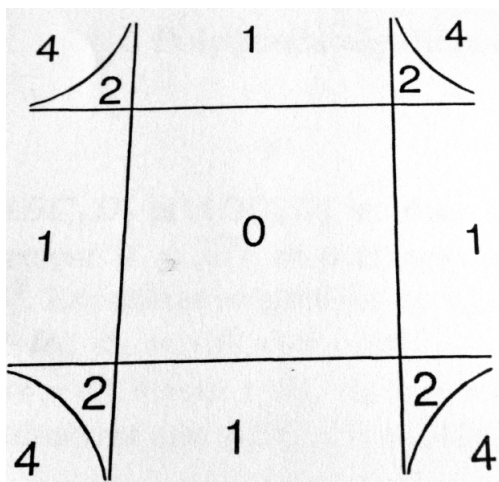
$$p(Z = 1) = 4 \frac{(l - 2r)r}{l^2} = 2 \frac{(l - d)d}{l^2}$$

☞ Il reste dans le carreau de référence, 4 carrés de côté r à chaque sommet. $Z = 4$ si et seulement si $M(X, Y)$ se trouve dans l'un des quart de disque ouvert de rayon r de centre l'un des sommets A, B, C, D situé dans l'un de ces carrés. Le domaine Δ_4 correspondant a une aire égale à πr^2 . D'où $p(Z = 4) = \frac{\pi r^2}{l^2} = \frac{\pi d^2}{4l^2}$.

☞ Le domaine Δ_2 correspondant à $(Z = 2)$ est le complémentaire dans le domaine plan $ABCD$ de $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_4$ voir la figure ci-dessous. Son aire est donc $4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$.

Alors nous avons

$$p(Z = 2) = \frac{(4 - \pi)r^2}{l^2} = (4 - \pi) \left(\frac{r^2}{l^2}\right) =; \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{d}{l}\right)^2$$



Exercice 4 (Abonné)

L'année 2014 comprend 365 jours. Le nombre de jours sans film est donc de 340 jours. Notons A l'événement : le cinéphile voit un film au moins deux jours de suite et \bar{A} l'événement contraire.

On peut modéliser \bar{A} de la façon suivante : on dispose $N = 340$ points rouges sur une droite qui déterminent $N - 1$ intervalles. On choisit $r = 25$ de ces intervalles dans lesquels on place un seul point bleu. Les $N + r = 365$ points rouges et bleus représentent les jours de l'année 2014 et leur couleur indiquant si un film a été vu ou pas.

Le nombre de choix de ces intervalles est $\binom{N-1}{r}$. Le nombre de choix de r jours parmi $N + r$ est $\binom{N+r}{r}$. En faisant l'hypothèse que ces choix sont équiprobables, on obtient :

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{N-1}{r}}{\binom{N+r}{r}} = \frac{N!(N-1)!}{(N-1-r)!(N+r)!}$$

et

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Exercice 5 (Problème de semis)

a) Les boules étant numérotées de 1 à m , notons B_j l'événement « la boule numéro j ne se trouve dans aucune des urnes numérotées i_1, \dots, i_k . Alors pour tout j entier compris entre 1 et m

$$p(B_j) = \frac{n-k}{n}$$

$\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j$ est l'événement : chacune des urnes numérotées i_1, \dots, i_k est vide. Les événements B_j pour $1 \leq j \leq m$ étant mutuellement indépendants, nous avons :

$$P\left(\bigcap_{1 \leq j \leq m} B_j\right) = \prod_{j=1}^m p(B_j) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$$

b) Pour $1 \leq i \leq n$, notons A_i l'événement « l'urne numéro i est vide ». Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement

$$T = \bigcap_{1 \leq j \leq n} \bar{A}_j$$

Or

$$T = \overline{\bigcup_{1 \leq j \leq n} A_j}$$

Donc

$$p(T) = 1 - p\left(\bigcup_{1 \leq j \leq n} A_j\right)$$

La formule

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$$

se généralise en la relation :

$$p\left(\bigcup_{1 \leq j \leq n} A_j\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} p(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

et donc

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} p(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{n-k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$$

et donc en posant $l = n - k$ on obtient :

$$p\left(\bigcup_{1 \leq j \leq n} A_j\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{n-l-1}\right) \binom{n}{l} \left(\frac{l}{n}\right)^m$$

d'où

$$p(T) = \frac{1}{n^m} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} l^m$$

Pour $n = m$ l'univers a pour cardinal n^n et l'événement T est représenté par l'ensemble des permutations de $[[1, n]]$ dont la cardinal est $n!$. Par conséquent

$$p(T) = \frac{n!}{n^n}$$

c) Nous avons

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

où X_i est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numéro i est vide et la valeur 0 sinon. Alors $p(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$ et par linéarité de l'espérance

$$E(X) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

Pour $n = m$ nous avons :

$$\frac{E(X)}{n} = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{n} = \frac{1}{e}$$

Thème 6 : Fonctions

1. Une équation fonctionnelle

Soit f une fonction répondant au problème posé.

Soit a et b deux réels quelconques. Posons $c = \frac{a+b}{2}$ et $t = b - c$.

On a : $b = c + t$, $a = c - t$ et $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 2t \times 2c = 4ct$.

Ainsi, pour tout couple $(c; t)$ de nombres réels, $f(c + t) - f(c - t) = 2ctf''(c)$.

La fonction f étant dérivable sur \mathbf{R} , en dérivant la relation précédente par rapport à t , on obtient : pour tout couple $(c; t)$ de nombres réels, $f'(c + t) + f'(c - t) = 2cf''(c)$.

En particulierisant cette égalité à $t = 0$, il vient : pour tout réel c , $2f'(c) = 2cf''(c)$.

On en déduit que : pour tout réel c , $f'(c) = cf''(c)$.

En posant $g = f'$, on a donc démontré que : pour tout réel x , $g(x) = xg'(x)$.

Il s'ensuit que : $g(0) = 0$ et que : pour tout réel x non nul, $\frac{xg'(x) - 1 \times g(x)}{x^2} = 0$.

La dérivée de la fonction qui à tout réel non nul x associe $\frac{g(x)}{x}$ est donc nulle sur chacun des deux intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$. Cette fonction est donc constante sur chacun de ces deux intervalles.

Il existe donc deux réels λ et μ tels que : pour tout $x > 0$, $g(x) = \lambda x$ et, pour tout $x < 0$, $g(x) = \mu x$.

Comme f est deux fois dérivable sur \mathbf{R} , la fonction g est dérivable sur \mathbf{R} . On en déduit que $\lambda = \mu$.

On a prouvé qu'il existe un réel λ tel que pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \lambda x$. Puisque $g(0) = 0$, cette égalité reste vraie pour $x = 0$. Il existe donc un réel ν tel que : pour tout réel x , $f(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + \nu$.

On doit alors vérifier que toute fonction de cette forme vérifie la relation initiale, ce qui ne pose aucun problème.

2. Étude qualitative d'une équation différentielle

Il est possible de déterminer l'expression de toute fonction f vérifiant l'équation différentielle. Pour cela, nous allons considérer g la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = f(x)e^{-x}$.

Comme f est dérivable sur \mathbf{R} , alors g l'est aussi et, pour tout réel x , $g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x}$.

Comme f est deux fois dérivable sur \mathbf{R} , alors g l'est aussi et, pour tout réel x , $g''(x) = (f''(x) - 2f'(x) + f(x))e^{-x}$.

Compte tenu de l'hypothèse faite sur f dans l'énoncé, il s'ensuit que : pour tout réel x , $g''(x) = e^x e^{-x} = 1$.

Il existe donc deux réels α et β tels que : pour tout réel x , $g(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$.

On a alors : pour tout réel x , $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta \right) e^x$.

En posant $\lambda = \beta - \frac{\alpha^2}{2}$, on peut donc écrire : pour tout réel x , $f(x) = \left(\frac{(x + \alpha)^2}{2} + \lambda \right) e^x$.

D'où, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \alpha)^2 + 2(x + \alpha) + 2\lambda \right] e^x = \frac{1}{2} \left[(x + \alpha + 1)^2 - 1 + 2\lambda \right] e^x$.

On peut alors remarquer que : $f' > 0 \iff \lambda > 0$. Démontrons-le.

Supposons que $f > 0$.

Il s'ensuit que $f(-\alpha) > 0$ i.e. $\lambda e^{-\alpha} > 0$, d'où, puisque $e^{-\alpha} > 0$, $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons que $\lambda > 0$. Donc, pour tout réel x , $\frac{(x + \alpha)^2}{2} + \lambda > 0$, puis, pour tout réel x , $f(x) > 0$.

En procédant de manière analogue, on démontre que : $f' > 0 \iff \lambda > \frac{1}{2}$.

La seconde implication est vraie et la première est fautive : il suffit de choisir un réel λ tel que $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$.

3. Une équation

On remarque immédiatement que la fonction constante nulle sur \mathbf{R}^* vérifie cette relation.

Soit a un réel quelconque.

Soit f une application définie de \mathbf{R}^* dans \mathbf{R} telle que : pour tout réel $x \neq 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) + af(x) = 0$.

Pour tout $x \neq 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -af(x)$ et $f(x) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -af\left(\frac{1}{x}\right) = a^2f(x)$.

Ainsi, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x)(1 - a^2) = 0$.

On peut alors distinguer trois cas :

1^{er} cas : $a^2 \neq 1$

On a donc : pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = 0$ et l'application nulle est la seule application vérifiant la relation donnée.

2^e cas : $a = -1$

Toute application constante vérifie la relation donnée.

3^e cas : $a = 1$

Comme l'application nulle, l'application définie de \mathbf{R}^* dans \mathbf{R} par $f(x) = \ln|x|$ vérifie la relation donnée.

On en conclut que les réels a répondant à la question sont tous les réels différents de 1 et -1 .

4. Des hauts et des bas

Pour démontrer que la fonction f n'est pas périodique, nous allons procéder par l'absurde.

Supposons qu'il existe un réel T non nul tel que : pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$.

La fonction f est indéfiniment dérivable et on montre par récurrence que ses dérivées successives sont aussi périodiques de période T . Intéressons-nous à la dérivée première puis à la dérivée seconde de f :

- pour tout réel x , $f'(x) = -\sin(x) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$;

- pour tout réel x , $f''(x) = -\cos(x) - 2\cos(\sqrt{2}x) - 3\cos(\sqrt{3}x)$.

La fonction f'' est périodique de période T , donc, pour tout réel x , $f''(x + T) = f''(x)$.

En particulier, $f''(0) = f''(T)$.

Donc $-1 - 2 - 3 = -\cos(T) - 2\cos(\sqrt{2}T) - 3\cos(\sqrt{3}T)$, ce qui s'écrit aussi :

$$\left[1 - \cos(T)\right] + 2\left[1 - \cos(\sqrt{2}T)\right] + 3\left[1 - \cos(\sqrt{3}T)\right] = 0$$

Or, une somme de nombres réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

Donc $1 - \cos(T) = 1 - \cos(\sqrt{2}T) = 1 - \cos(\sqrt{3}T) = 0$.

Il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}T = 2k'\pi$. Comme T n'est pas nul, k et k' ne le sont pas non plus et, en divisant membre à membre, on aboutit à :

$$\sqrt{2} = \frac{k'}{k}$$

On pouvait aussi écrire $f(T)=f(0)=3$ et obtenir une somme de trois cosinus égale à 3, ce qui n'est possible que si chacun d'eux est égal à 1...

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ nous permet de conclure.

La fonction f n'est pas périodique.

5. Avec la partie entière

Raisonnons par analyse et synthèse.

Supposons que la fonction f vérifie la propriété qui nous intéresse.

Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = f(x) - x + E(x)$.

Comme la fonction f est périodique de période 1 et que, pour tout réel x et pour tout entier n , $E(x + n) = E(x) + n$, alors, pour tout réel x ,

$$g(x + 1) = f(x + 1) - (x + 1) + E(x + 1) = f(x) - x - 1 + E(x) + 1 = f(x) - x - E(x) = g(x)$$

Ainsi, la fonction g est périodique de période 1. On en déduit, par une récurrence élémentaire, que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $g(x+n) = g(x)$.

Soit x un réel quelconque et n un entier naturel quelconque.

D'une part, $g(x) = g(x+n)$.

D'autre part, compte tenu des hypothèses faites sur f , $|g(x+n)| \leq \frac{1}{1+(x+n)^2}$.

Donc $|g(x)| \leq \frac{1}{1+(x+n)^2}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, à x fixé, on obtient, $g(x) = 0$, et ce, pour tout réel x .

Il s'ensuit que : pour tout réel x , $f(x) - x + E(x) = 0$, puis que : pour tout réel x , $f(x) = x - E(x)$.

Il s'agit à présent de vérifier que la fonction $x \mapsto x - E(x)$ vérifie les propriétés attendues, ce qui ne pose aucun problème.

La seule fonction répondant au problème posé est $f : x \mapsto x - E(x)$.

6. Changement homographique de variable

a. La fonction h est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

De plus, pour tout $x \neq -\frac{3}{2}$, on a les équivalences :

$$h(x) = -\frac{1}{2} \iff 4x - 2 = -4x - 6 \text{ donc } h(x) = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Quel que soit le réel x différent de $-\frac{3}{2}$ et de $-\frac{1}{2}$, on a :

$$h(x) + \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{4x+6} + \frac{2x+3}{4x+6} = \frac{4x+2}{4x+6} = \frac{2x+1}{2x+3}, \text{ puis } \frac{1}{h(x) + \frac{1}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x+1}.$$

Ainsi, pour tout réel x de $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$, $\frac{1}{h(x) + \frac{1}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} = 1$ (*).

Soit m la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ par $m(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$.

On démontre que : pour tout $y \neq 0$ et tout $x \neq -\frac{1}{2}$, $m(x) = y \iff x = \frac{2-y}{2y}$.

Soit ℓ la fonction définie sur \mathbf{R}^* par $\ell(x) = \frac{2-x}{2x}$. Cette fonction est homographique ; elle réalise une bijection de \mathbf{R}^* sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ de bijection réciproque $\ell^{-1} = m$.

On a, pour tout réel x non nul, l'équivalence : $\ell(x) = -\frac{3}{2} \iff x = -1$.

De plus, pour tout $x \neq 0$, $\ell(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{2}$. Donc, pour tout $x \neq 0$, $\ell(x) \neq -\frac{1}{2}$.

Posons $D = \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$. Lorsque x décrit D , $\ell(x)$ décrit $D' = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$, et réciproquement.

La relation (*) peut s'écrire : pour tout $t \in D'$, $\ell^{-1}(h(t)) - \ell^{-1}(t) = 1$.

Donc, pour tout $t \in D'$, $(\ell^{-1} \circ h)(t) = \ell^{-1}(t) + 1$.

En posant $t = \ell(x)$ avec $t \in D'$ et $x \in D$, on obtient l'égalité demandée.

Pour tout réel x de D , $\ell^{-1} \circ h \circ \ell(x) = x + 1$.

Ceci s'écrit aussi, pour tout x de D , $h \circ \ell(x) = \ell(x + 1)$.

Supposons que f est une fonction de E .

Pour tout x de D , $(f \circ \ell)(x + 1) = f(\ell(x + 1)) = f \circ h \circ \ell(x) = ((f \circ h) \circ \ell)(x) = (f \circ \ell)(x)$ car les restrictions de $f \circ h$ et de f à $\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$ sont égales.

Pour tout x de D , $(f \circ \ell)(x + 1) = (f \circ \ell)(x)$.

b. Soit f une fonction de E .

Montrons que $f \circ \ell$ est constante.

Soit $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-$.

Quel que soit l'entier naturel n , $x_0 + n \in D$ et $(f \circ \ell)(x_0) = (f \circ \ell)(x_0 + n) = f\left(\frac{1}{x_0 + n} - \frac{1}{2}\right)$.

Comme f est continue en $-\frac{1}{2}$, alors on en déduit, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $(f \circ \ell)(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Soit $x_0 \in \mathbf{Z}_-$.

Quel que soit l'entier naturel non nul n , $x_0 - n \in D$ et $(f \circ \ell)(x_0) = (f \circ \ell)(x_0 - n) = f\left(\frac{1}{x_0 - n} - \frac{1}{2}\right)$.

Comme f est continue en $-\frac{1}{2}$, alors on en déduit que $(f \circ \ell)(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Donc, pour tout réel non nul x_0 , $(f \circ \ell)(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ i.e. $f(\ell(x_0)) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Il s'ensuit que : pour tout réel x non nul, $f(\ell(x)) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

La fonction ℓ réalise une bijection de \mathbf{R}^* sur $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ainsi, pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$, $f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Cette égalité reste vraie pour $x = -\frac{1}{2}$.

Donc la fonction f est une fonction constante.

On vérifie sans peine qu'une fonction constante appartient bien à E .

L'ensemble E est l'ensemble des fonctions constantes.