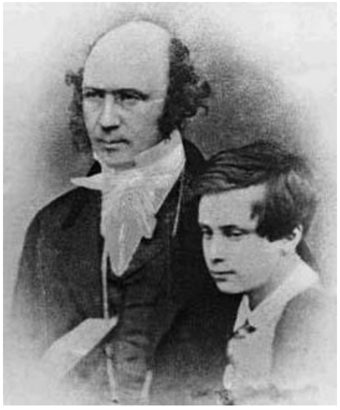


William Rowan Hamilton (1805-1865)

# *Stage ouvert aux lycéens de terminale scientifique présentés par leurs établissements au Concours général des lycées, les 16 et 17 février2015*

**Marie-Françoise BOURDEAU, Inspectrice pédagogique régionale de mathématiques de l'académie de Versailles, décédée en octobre, fut un des moteurs de la Pépinière académique de mathématiques, cherchant des énoncés d'exercices à soumettre aux stagiaires, intervenant dans les stages et rédigeant des solutions. Nous aurons une pensée particulière pour elle à l'occasion de ce stage.**

La Pépinière académique de mathématique organise pour la neuvième année, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.
Pour un élève de terminale, c'est une récompense et un signe de reconnaissance qu'être présenté au Concours général. La Pépinière académique de mathématiques propose à ces lycéens un moment de travail « entre eux », en espérant développer leur goût des mathématiques.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILLY SUR SEINE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE), Laurent SERVIERES (Lycée Camille Saint Saëns, DEUIL LA BARRE), Alexandra VIALE (Lycée L'Essouriau, LES ULIS), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES)

**Professeurs accompagnants :** Miguel ROMERO-SCHMIDTKE (Lycée Marie Curie, SCEAUX), Fabrice MAILLARD (Lycée Saint Thomas de Villeneuve, CHAVILLE)

# *Emploi du temps*

## Lundi 17 février 2015

| | Groupe 1 | Groupe 2 | Groupe 3 |
|---|---|---|---|
| 10 heures | Exposé / Film | | |
| 10 h 50 | Dénombrement, probabilités (AC + LS) | Nombres, arithmétique (AV + NF) | Fonctions (SM + PJ) |
| 12 h 30 | Repas | | |
| 13 h 10 | Fonctions (SM + PJ) | Dénombrement, probabilités (AC + LS) | Nombres, arithmétique (AV + NF) |
| 14 h 55 | Nombres, arithmétique (AV + NF) | Fonctions (SM + PJ) | Dénombrement, probabilités (AC + LS) |

## Mardi 18 février 2015

| | Groupe 1 | Groupe 2 | Groupe 3 |
|---|---|---|---|
| 10 heures | Film / Exposé | | |
| 10 h 50 | Équations, suites (CD + MA) | Angles et distances (CH + KR) | Calculs, ordre dans R (MS + CW) |
| 12 h 30 | Repas | | |
| 13 h 10 | Calculs, ordre dans R (MS + CW) | Équations, suites (CD + MA) | Angles et distances (CH + KR) |
| 14 h 55 | Angles et distances (CH + KR) | Calculs, ordre dans R (MS + CW) | Équations, suites (CD + MA) |

# 1. Thème : Nombres, arithmétique

### 1. (Sylvester)

Je possède une large quantité de timbres de valeurs faciales 5 unités et 17 unités. Quel est le plus grand montant que je ne puisse réaliser en associant des timbres des deux sortes ?

### 2. 9, 3 et les sept cubes

Montrer que, si 9 divise la somme des cubes de sept entiers, alors 3 divise le produit de ces sept entiers.

### 3. Un irrationnel

Démontrer que le nombre $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ est irrationnel.

### 4. Voisinage ne fait pas puissance

Montrer que le produit *n* de trois entiers consécutifs ne peut être une puissance, c'est-à-dire qu'on ne peut trouver deux entiers *a* et *b* supérieurs ou égaux à 2 tels que $n=a^b$.

### 5. Un grand diviseur commun

On considère l'ensemble des entiers *n* pour lesquels il existe un entier *k* tel que $n = k^{13} - k$. Quel est le plus grand diviseur commun à tous ces nombres ?

### 6. Problème de partage

Soit *n* un entier naturel non nul. On considère l'ensemble $\mathrm{A}=\{n, n+1, n+2, \dots, n+17\}$ . Existe-t-il des valeurs de *n* pour lesquelles il existe un partage de A en deux ensembles disjoints B et C de telle sorte que le produit des éléments de B soit égal au produit des éléments de C ?

*Entrainement sélection de la délégation à l'OIM, mai 2004*

### 7. Inspiré par Euclide

On note *P* l'ensemble des nombres premiers. On considère une partie *M* de *P* ayant au moins trois éléments. On suppose que, pour tout sous-ensemble *A*, fini, non vide et strict de *M*, les facteurs premiers de l'entier $\left(\prod_{p\in A} p\right)-1$ appartiennent à *M*. Montrer que *M* = *P*.

*Entrainement sélection de la délégation à l'OIM, mai 2004*

### 8. Premier à Polytechnique ?

***a.*** Déterminer l'ensemble des nombres entiers relatifs *n* tels que $n^4+4$ est premier.

***b.*** Démontrer que, pour tout entier *n* et pour tout diviseur premier impair *p* de $n^4+4$, il existe un entier naturel *k* tel que $p=4k+1$ .

*Oral École polytechnique*

### 9. Il s'appelait Personne (Gilles Personne de Roberval 1602 – 1675)

Le 16 septembre 1636, Fermat écrivait à Roberval qu'il avait quelque mal à trouver les nombres rationnels *a* et *b* tels que l'équation $x^2-2(a+b)x=a^2+b^2$ ait ses racines rationnelles.

*Balance de Roberval géante*
*à Roberval (Oise)*
*Photo Wikipedia*

***a.*** On suppose que *a* et *b* sont des nombres rationnels non nuls. Montrer que, pour établir que l'équation $x^2-2(a+b)x=a^2+b^2$ n'a pas de solutions rationnelles, il suffit de vérifier qu'il n'existe pas de couples de nombres rationnels $(u,v)$ tels que $u^2+uv+v^2=\frac{1}{2}$ .

***b.*** Montrer que l'équation $u^2+uv+v^2=\frac{1}{2}$ n'a pas de solution $(u,v)$ dans $\mathbf{Q}^2$.

### 10. Somme des inverses des premiers cubes

Soit *p* un nombre premier impair et soit *a* et *b* deux entiers tels que $\frac{a}{b}=1+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{(p-1)^3}$ .

Montrer que *p* divise *a*.

## 2. Thème : Équations, inéquations, suites

### 1. Équation

Résoudre $\dfrac{4x^2+15x+17}{x^2+4x+12} = \dfrac{5x^2+16x+18}{2x^2+5x+13}$

### 2. Nombres *k-tangents*

On rappelle que la fonction arc tangente (notée Arctan) est définie sur **R** et associe à tout réel $x$ l'unique réel $y$ appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(y) = x$. On rappelle également que $\tan^{-1}$ est l'étiquette d'une touche de calculatrice.

Un entier *k* étant donné, les nombres *x* et *y* sont dits *k*-tangents si l'égalité $\mathrm{Arctan}\frac{1}{k} = \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} + \mathrm{Arctan}\frac{1}{y}$ a lieu.

Trouver les paires d'entiers 2015-tangents.

### 3. Pas la moyenne

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Trouver tous les entiers $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que, pour tout entier $i$ de $\{1,2,\dots,n\}$, on a : $(n-1)x_i \leq \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\neq i}} x_k$.

### 4. Somme des carrés des écarts

Soit $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ une suite de nombres réels de moyenne arithmétique $m = \dfrac{u_1+u_2+\dots+u_n}{n}$ .

On pose $\omega = (u_1-m)^2+(u_2-m)^2+\dots+(u_{n.}-m)^2$ .

Exprimer $\omega$ en fonction des différences $(u_i-u_j)$ où le couple $(i,j)$ décrit $[\![(1,n)]\!]^2$.

Même problème pour les couples $(i,j)$ vérifiant de plus $i<j$.

Quelles sont les suites telles que $\omega=0$ ?

### 5. Drôle d'équation

Les nombres *a* et *b* sont deux réels strictement positifs tels que $a^{\frac{1}{2^n}}+b^{\frac{1}{2^n}}$ est un nombre rationnel.
Montrer que *a* = *b* = 1.

### 6. Approximations du nombre π

**A.** ***a.*** Soit $\theta$ un nombre réel vérifiant $0\leq\theta<\pi$ . Etablir les formules suivantes :

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\theta}\ ,\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\theta}\ ,\ \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\ .$$

***b.*** On définit par récurrence la suite $(c_n)$ en posant $c_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et, pour tout entier naturel non nul *n*, $c_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+2c_{n-1}}$ .

Montrer que, pour tout entier *n*, $c_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{6\times2^n}\right)$.

***c.*** Pour *n* valant successivement 0, 1, 2, 3 et 4, donner des expressions par « radicaux empilés » de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6\times2^n}\right)$. En donner des valeurs approchées numériques.

***d.*** Pour tout entier n non nul, exprimer $\sin\left(\dfrac{\pi}{6\times2^n}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{6\times2^n}\right)$ en fonction de $c_{n-1}$ .

**B. Méthode d'Archimède**

***a.*** Etablir que, pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ , $\sin x\leq x\leq\tan x$

***b.*** En déduire que pour tout entier *n*, on a $(A_n)$ : $6\times2^n\sin\frac{\pi}{6\times2^n}\leq\pi\leq6\times2^n\tan\frac{\pi}{6\times2^n}$ .

***c.*** Quelle interprétation géométrique peut-on donner de $(A_n)$ en considérant un cercle $\Gamma$ et deux polygones réguliers à $6\times 2^n$ sommets respectivement inscrits dans $\Gamma$ et circonscrit à $\Gamma$ ?

***d.*** Appliquer $(A_4)$ pour obtenir un encadrement de $\pi$ .

***e.*** Les inégalités $(A_n)$ permettent-elles de calculer $\pi$ à une précision arbitraire ?

**C. Méthode de Snellius**

***a.*** Etudier les variations de la fonction *f* définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$ .

***b.*** En déduire que, pour tout $x\in[0,\pi]$, $\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}\leqslant x$ .

***c.*** Montrer que, pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ , $x\leq\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x$ .

***d.*** Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a :

$(S_n)$ $\qquad \dfrac{18\times 2^n\sin\left(\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)}{2+\cos\left(\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)}\leq\pi\leq 2^{n+1}\left(2\sin\frac{\pi}{6\times 2^n}+\tan\frac{\pi}{6\times 2^n}\right)$

Puis, pour tout entier *n*, expliciter $(S_n)$ en fonction de $c_{n-1}$ .

***e.*** En appliquant $(S_4)$, obtenir un encadrement numérique de $\pi$.

***f.*** Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ puis de $\dfrac{\Delta(x)}{x^5}$ où $\Delta(x)=\dfrac{2}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\tan x-\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$ .

***g.*** On note $d(n)$ (respectivement $\delta(n)$ ) l'amplitude de $(A_n)$ (respectivement $(S_n)$).

Déterminer la limité de $2^{2n}\times\dfrac{\delta(n)}{d(n)}$ . Que peut-on en déduire concernant les méthodes d'Archimède et de Snellius ?

## 3. Thème : Calculs et ordre dans R

### 1. Une majoration

Trouver le plus petit réel $M$ tel que $|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)$ soit vérifiée pour tous nombres réels $a$, $b$ et $c$.

*47e OIM*

### 2. Une inégalité

***a.*** Démontrer que pour tous réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ strictement positifs $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$.

***b.*** En déduire que pour tous réels $a, b, c, x, y, z$ tels que $a \geq b \geq c > 0$ et $x \geq y \geq z > 0$, on a :

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

et préciser le cas d'égalité.

### 3. L'égalité pour beaucoup, pas pour tous

***a.*** Montrer que, pour tous nombres réels $x$, $y$ et $z$ différents de 1 et vérifiant $xyz=1$, on a :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

***b.*** Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels réels $x$, $y$ et $z$ différents de 1 et vérifiant $xyz=1$ pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

*OIM 2008*

### 4. Un minimum

***a.*** Montrer que pour tous réels strictement positifs $u$, $v$, $x$ et $y$, $\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v} \geq \frac{(x+y)^2}{u+v}$

***b.*** On considère un entier $n$ et $2n$ réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ tels que les sommes $a_1+a_2+\cdots+a_n$ et $b_1+b_2+\cdots+b_n$ soient égales à 1.

Trouver la plus petite valeur de $\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$ .

*Entrainement OIM 2004*

### 5. Calcul littéral

Montrer que, pour tous nombres réels $x$, $y$ et $z$ tels que $\geq 1$, on a :

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-yx^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0 .$$

(on pourra d'abord montrer que, pour tous nombres réels $x$, $y$ et $z$ tels que $\geq 1$, $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^5-x^2}{x^5+x^3y^2+x^3z^2}$)

*46e OIM*

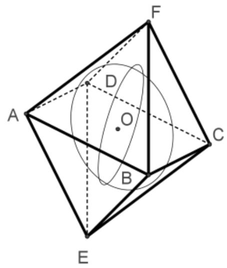
### 6. Un produit

On donne un entier $n$ supérieur à 3. On pose :

$$N=\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times\dots\times\frac{(n-1)^3-1}{(n+1)^3+1}\times\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

Exprimer $N$ sous la forme d'un quotient irréductible d'entiers. $N$ a-t-il une limite lorsque n tend vers l'infini ?

# 4. Thème : Angles et distances




## 1. Sphère tangente aux faces d'un octaèdre

Déterminer le rayon de la sphère tangente aux huit faces d'un octaèdre de côté 1.

## 2. Recherche d'un minimum

Soit ABC un triangle et M un point du segment [BC]. Par les points B et C, on mène les parallèles à la droite (AM) qui coupent les droites (AB) et (AC) respectivement en N et P.

Déterminer tous les points M de [BC] tels que $\frac{\mathrm{BP}+\mathrm{CN}}{\mathrm{AM}}$ soit minimal.

## 3. La grande médiane

Soit ABC un triangle dont le périmètre est 2. Démontrer que parmi ses trois médianes, l'une au moins a une longueur supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . (On pourra noter *a*, *b* et *c* les longueurs respectives BC, CA et AB et utiliser le théorème de la médiane : si $m_a$ désigne la longueur de la médiane issue du sommet A, alors $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$ ).

## 4. Trapèze à diagonales perpendiculaires

On considère un quadrilatère ABCD possédant les propriétés suivantes :

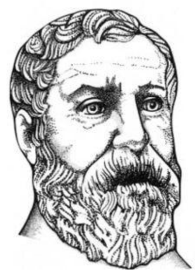
- Les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (AB) et (BC)
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

Démontrer que l'aire de ABCD est supérieure ou égale à BC².

## 5. Majoration de l'aire d'un quadrilatère convexe

Soit ABCD un quadrilatère convexe d'aire *S*. On pose AB = *a*, BC = *b*, CD = *c* et DA = *d*.
Montrer que $4S \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
On étudiera de plus les cas d'égalité.

## 6. Ne dites pas « la formule du héron »



***a.*** Montrer que si x, y et z sont des réels positifs ou nuls alors

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) .$$

***b.*** Sur le cercle trigonométrique, on inscrit un triangle dont les côtés sont mesurés par *a*, *b* et *c*. Montrer que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 1$.

(on rappelle la formule de Héron d'Alexandrie : si, de plus, *p* désigne le demi-périmètre du triangle, alors $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ).

## 7. Théorème de Ptolémée

***a.*** Soit *a*, *b*, *c* et *d* quatre nombres complexes quelconques. Vérifier que :

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(d-b)+(a-d)(b-c)=0 .$$

***b.*** Soit A, B, C, D quatre points du plan non alignés et distincts. Démontrer que.

$$AC.BD \leq AB.CD + AD.BC .$$

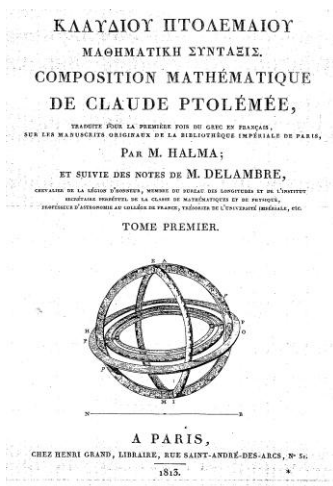
***c.*** Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le quadrilatère ABCD pour que

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

## 8. Partage de cercles

On donne deux triangles rectangles d'aires respectives $S$ et $S'$ tels que le cercle inscrit dans le premier soit le cercle circonscrit au second. Montrer que $\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

*Entrainement OIM 2005*


ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΣ.
COMPOSITION MATHÉMATIQUE
DE CLAUDE PTOLÉMÉE,
TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS,
SUR LES MANUSCRITS ORIGINAUX DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE DE PARIS,
PAR M. HALMA;
ET SUIVIE DES NOTES DE M. DELAMBRE,
TOME PREMIER.
A PARIS,
CHEZ HENRI GRAND, LIBRAIRE, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS, N° 5.
1813.

***Traduction française de la « Synthèse mathématique » de Claude Ptolémée dite « Almageste » (la grande)***

# 5. Thème : Logique, dénombrement, probabilités

## 1. Duel de dames

Quelle est la probabilité pour que deux dames placées au hasard sur un échiquier soient une menace directe l'une pour l'autre ?

## 2. « Il en reste toujours qui ne vont pas ensemble »

On sépare puis on mélange $n$ paires de chaussettes distinguables au premier regard, $n$ désignant un entier naturel non nul. On tire au hasard et une à une ces chaussettes en reformant une paire de chaussettes dès que les deux éléments la constituant ont été tirés. Soit $k$ un nombre entier inférieur ou égal à $2n$ et $X_k$ la variable aléatoire indiquant le nombre de paires formées après le tirage de $k$ chaussettes. Calculer l'espérance de $X_k$.

## 3. Centre du cercle circonscrit à un triangle

Soit (C) un cercle de centre O et A, B, C trois points choisis au hasard sur ce cercle.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et on note $r$ le rayon du cercle (C).
On désigne alors respectivement par $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ , $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ et $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ les affixes de A, B, C.
$\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$ .

***a.*** Déterminer la probabilité que O soit intérieur au triangle ABC.
***b.*** Déterminer la probabilité que le triangle ABC soit acutangle (dont aucun angle n'est obtus).

## 4. Chute sur le carreau

On jette une pièce de monnaie de diamètre $d$ sur un carrelage formé de carrés de côté $l$. On suppose que $d < l$ et que la largeur des joints est négligeable. Déterminer, pour $n$ valant successivement 0, 1, 2, 3, 4 la probabilité que la pièce rencontre exactement $n$ joints.

## 5. Abonné

Un cinéphile a vu 25 films en 2014, assistant à au plus une séance par jour, selon les hasards de la programmation et de ses humeurs. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un film au moins deux jours de suite ?

## 6. Problème de semis

Soit $m$ un entier naturel et $n$ un entier naturel non nul. On répartit au hasard $m$ boules dans $n$ urnes : pour chaque boule, on choisit avec la probabilité $\frac{1}{n}$ l'urne dans laquelle on la place, les choix s'effectuant de façon indépendante.

***a.*** Soit $k$ un entier inférieur à $n$. Quelle est la probabilité que les urnes numérotées 1, 2, … , $k$ soient vides ?
***b.*** En déduire la probabilité que chacune des urnes contienne au moins une boule. Préciser le résultat lorsque $m = n$
***c.*** On note $X$ la variable aléatoire indiquant le nombres d'urnes vides au terme de cette répartition. Calculer $E(X)$ , l'espérance de $X$.

Lorsque $m = n$, déterminer la limite quand $n$ tend vers l'infini de $\frac{E(X)}{n}$ .

# 6. Thème : Fonctions

## 1. Une équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions réelles *f* d'une variable réelle, deux fois dérivables, telles que, pour tout couple $(a,b)$ de réels, l'égalité $f(b)-f(a)=\dfrac{b^2-a^2}{2}f''\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ est vérifiée.

(on pourra montrer que la fonction $g=f'$ est telle que, pour tout réel $x$, $x\,g'(x)=g(x)$ )

## 2. Étude qualitative d'une équation différentielle

Soit *f* une fonction deux fois dérivable sur **R** et telle que, pour tout réel *x* : $f''(x)-2f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$ .

Confirmer ou infirmer les deux assertions suivantes :

Assertion 1 : Si $f>0$ alors $f'>0$

Assertion 2 : Si $f'>0$ alors $f>0$.

(la notation $f>0$ signifie que pour tout réel $x$, $f(x)>0$ )

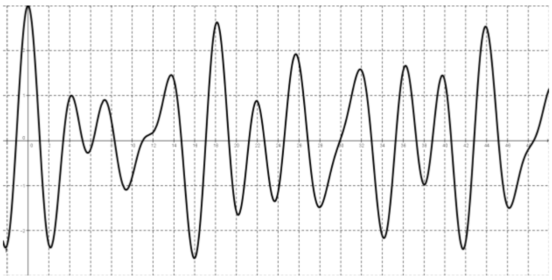
## 3. Une équation

Déterminer tous les réels *a* pour lesquels il existe une unique application *f* définie de **R**$^*$ dans **R** et telle que, pour tout réel $x\neq 0$ : $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+a\,f(x)=0$ .

## 4. Des hauts et des bas

La fonction *f* définie sur **R** par

$f(x)=\cos x+\cos\left(x\sqrt{2}\right)+\cos\left(x\sqrt{3}\right)$ est-elle périodique ?



## 5. À rappeler : la définition de la fonction partie entière

Trouver toutes les applications *f* définies sur R, périodiques de période 1 et telles que, pour tout réel *x* :

$|f(x)-x+E(x)|\leq\frac{1}{1+x^2}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de *x*.

## 6. Changement homographique de variable

On dit qu'une fonction *f* est une fonction homographique s'il existe des réels a*, b, c* et *d* vérifiant $ad-bc\neq 0$ tels que pour tout réel $t\neq-\dfrac{d}{c}$ , $f(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$ . On se propose de déterminer l'ensemble E des fonctions *f* définies sur **R** et continues en $-\dfrac{1}{2}$ telles que, pour tout réel *x* différent de $-\dfrac{3}{2}$, $f\left(\dfrac{2x-1}{4x+6}\right)=f(x)$ .

***a.*** Soit *h* la fonction $x\mapsto\dfrac{2x-1}{4x+6}$ . Vérifier que, sauf pour un nombre fini de valeurs de *x*, que l'on précisera :

$$\frac{1}{h(x)+\dfrac{1}{2}}-\frac{1}{x+\dfrac{1}{2}}=1 .$$

En déduire l'existence d'une fonction homographique $l$ telle que, pour tout *x*, sauf un nombre fini de valeurs : $l^{-1}\circ h\circ l(x)=x+1$ . Que peut-on dire de la fonction $f\circ l$ ?

***b.*** Déterminer l'ensemble E.