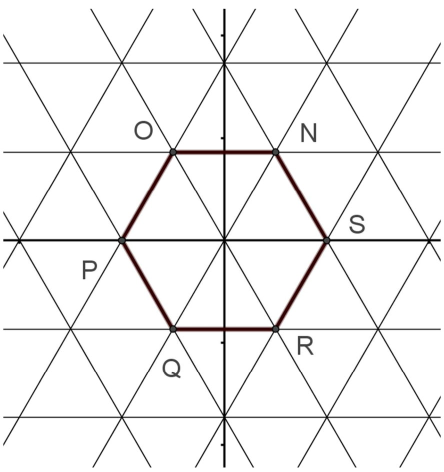
Groupe des unités de $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$

On cherche les éléments inversibles de $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$. Pour un tel élément x, il existe x' tel que $xx' = 1$. Un élément de $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$ s'écrit canoniquement $x = a + \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}b$, où a et b sont des entiers. Sous la forme cartésienne, cela donne $x = \left(a + \frac{b}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Pour que ce complexe soit inversible **dans C**, il est nécessaire que $ab \neq 0$.

Son inverse **dans C** s'écrit alors $x' = \frac{\left(a+\frac{b}{2}\right)-\mathrm{i}\frac{b\sqrt{3}}{2}}{a^2+ab+b^2}$. Reste à savoir si ce nombre appartient à $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$. $x' = \frac{a+b-\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}b}{a^2+ab+b^2}$

Les conditions sur a et b s'écrivent donc : $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ et $\frac{b}{a^2+ab+b^2}$ sont des entiers.

Il y a six solutions, six éléments inversibles dans $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$.



Ce sont (**dans C**) les racines sixièmes de l'unité $\left((1, -1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2, -\mathrm{j}, -\mathrm{j}^2\right)$