MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas es dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet. *Pierre de Fermat (1605 ? - 1665)*

Stage ouvert aux élèves de terminale scientifique présentés au Concours général des lycées - 22 et 23 février 2016

SOLUTIONS

Nombres

Exercice 1 Petits tableaux

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9, comme par exemple dans le tableau ci-contre.

1	8	7
9	2	4
6	5	3

A un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-contre) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple).

1. ***a***. Etant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

b. Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.

2. Etant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

1. ***a.*** Le produit des neuf entiers concernés est $9! = 362\,880$. Si toutes les lignes donnaient un produit inférieur ou égal à 71, le produit de tous les nombres qu'elles contiennent serait inférieur à $71^3 = 357\,911$.

b.

9	8	1
7	5	2
3	4	6

Convient.

2. La ligne et la colonne dans lesquelles est l'entier 9 donnent un produit de leurs termes supérieur ou égal à 90, sauf si une des deux (mettons la ligne) contient 1 et l'autre 2, associé à 3 ou 4. L'entier 8 est sur une ligne ou une colonne qui ne contient pas 9 mais contient 3, 4, 5, 6 ou 7. Le produit du produit de deux de ces nombres par 8 dépasse 90.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'un entier naturel non nul k vérifie la condition C_n s'il existe $2k$ entiers naturels non nuls $a_1, b_1, \dots, a_k b_k$ tous distincts, tels que les sommes $a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k$ soient deux à deux distinctes et strictement inférieures à n.

1. Montrer que si k vérifie la condition C_n, alors $k \leq \frac{2n-3}{5}$

2. Montrer que 5 vérifie la condition C_{14}.

3. On suppose que $\frac{2n-3}{5}$ est un entier. Montrer que $\frac{2n-3}{5}$ vérifie la condition C_n.

1. On traduit l'énoncé : les entiers sont tous distincts (donc leur somme est supérieure ou égale à la somme des entiers inférieurs ou égaux à n) et les sommes sont toutes distinctes (et inférieures à n :

$1 + 2 + 3 + \cdots + 2k \leq a_1 + b_1 + \ \dots + a_k + b_k \leq (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k)$

Donc $\frac{2k(2k+1)}{2} \leq kn - \frac{k(k+1)}{2}$

Ce qui donne l'inégalité voulue.

2. $(1+10), (2+7), (3+9), (4+6), (5+8)$ répondent aux exigences

3. De $k = \frac{2n-3}{5}$ on tire $n = \frac{5k+3}{2}$ qui assure que k est impair. Posons $k = 2p+1$, ce qui donne $n = 5p+4$.

Il s'agit donc de trouver un arrangement deux à deux des entiers compris entre 1 et $4p+2$ pour que les $2p+1$ sommes soient toutes distinctes et inférieures à $5p+3$. On peut proposer les associations suivantes :

a	$4p+2$	$4p$	$4p-2$		$2p+2$	p	$p-1$		2	1
b	$p+1$	$p+2$	$p+3$	…	$2p$	$2p+1$	$2p+3$	…	$4p-2$	$4p$
Somme	$5p+3$	$5p+2$	$5p+1$		$4p+2$	$3p+1$	$3p+2$		$4p$	$4p+1$

Exercice 3

Tout entier $n \geq 2$ admet une décomposition en produit de facteurs premiers : il existe un nombre entier k, des nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_k$tels que
$n = p_1{}^{a_1} \times p_2{}^{a_2} \times \dots \times p_k{}^{a_k}$
On associe à tout entier n le nombre $f(n) = a_1{}^{p_1} \times a_2{}^{p_2} \times \dots \times a_k{}^{p_k}$
On pose aussi $f(1) = 1$, ce qui permet de définir f sur $\mathbf{N}^*$**.**
On définit enfin les puissances de la fonction f : pour tout entier naturel n, $f^0(n) = n$, et pour tout entier i et tout entier n, $f^{i+1}(n) = f\left(f^i(n)\right)$.

1. *a*. Calculer $f(128)$et $f(2\,016)$.
***b*.** Déterminer les nombres $f^i(36^{36})$ pour les premières valeurs de i. Que dire des suivantes ?
2. *a*. Donner un exemple d'entier $n \geq 1$ tel que, pour entier naturel i, on ait :
$f^{i+2}(n) = f^i(n)$ et $f^{i+1}(n) \neq f^i(n)$
***b*.** Montrer que la fonction f n'est ni croissante, ni décroissante.
3. Résoudre dans $\mathbf{N}^*$:
***a*.** l'équation $f(n) = 1$;
***b*.** l'équation $f(n) = 2$;
***c*.** l'équation $f(n) = 4$.
4. *a*. Pour tous entiers $a \geq 2$ et $b \geq 0$, montrer que $ab \leq a^b$.
***b*.** Soit $k \in \boldsymbol{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \dots, a_k$ et $b_1, b_2, \dots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geq 2$ et $b_i \geq 0$ pour tout i.
Montrer que :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leq a_1{}^{b_1} \times a_2{}^{b_2} \times \dots \times a_k{}^{b_k}$$

***c*.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f\big(f(n)\big) \leq n$.
***d*.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un entier naturel r tel que, pour tout entier $i \geq r$, on ait $f^{i+2}(n) = f(n)$.

1. *a*. $128 = 2^7$donc $f(128) = 7^2 = 49$
$2\,016 = 2^5 \times 3^2 \times 7^1$, donc $f(2\,016) = 5^2 \times 2^3 \times 1^7 = 200$
***b*.** $36^{36} = 2^{72} \times 3^{72}$, donc $f(36^{36}) = 72^5 = 2^{15} \times 3^{10}$
$f^2(36) = 15^2 \times 10^3 = 2^3 \times 3^2 \times 5^5 = 225\,000$ et $f^3(36) = f^2(36)$, etc. Toutes les images sont les mêmes.
2. *a*. Il suffit que les exposants de la décomposition en produit de facteurs premiers soient eux-mêmes premiers. Par exemple $f(8) = 9$ et $f(9) = 8$
***b*.** L'image de 2 est 1, l'image de 8 est 9.
3. *a*. Les produits de nombres premiers distincts ont pour image 1.
***b*.** 2 doit être un exposant apparaissant dans la décomposition de n ou un produit de tels exposants. Mais si la décomposition de n fait apparaître p^2, la décomposition de son image fait apparaître 2^p, qui n'est égal à 2 pour aucun nombre premier p. Il n'y a pas de solution.
***c*.** 4 ne peut être un exposant (même argument que ci-dessus), il apparaît donc comme 2^2. Les antécédents de 4 sont les produits de 4 par des nombres premiers distincts et distincts de 2.
4. *a*. La propriété est vraie pour $b = 1$. Raisonnons par récurrence : soit b un entier quelconque pour lequel on la suppose vraie. Étudions le signe de $a^{b+1} - a(b+1)$: $a^{b+1} - a(b+1) = a\big(a^b - b - 1\big)$. Comme $a^b \geq ab$ et que $a \geq 2$, il s'ensuit que $a^b \geq 2b \geq b+1$, car $b \geq 1$. La propriété est donc héréditaire. Elle est vraie pour tout b
***b*.** La somme de deux entiers supérieurs à 1 est inférieure à leur produit. On démontre l'inégalité par récurrence.
***c*.** L'image d'un entier n dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = p_1{}^{a_1} \times p_2{}^{a_2} \times \dots \times p_k{}^{a_k}$, s'écrit $f(n) = a_1{}^{p_1} \times a_2{}^{p_2} \times \dots \times a_k{}^{p_k}$. Pour trouver l'image de cette image, il faut procéder à une nouvelle décomposition en produits de facteurs premiers. Chaque a_i est décomposé : $a_i = q_1{}^{b_1} \times q_2{}^{b_2} \times \dots \times q_m{}^{a_m}$. On étend l'ensemble des facteurs premiers intervenant dans les décompositions des a_i, quitte à utiliser l'exposant 0.
On peut donc écrire $f\big(f(n)\big) = q_1{}^{b_1 p_1 +} \quad \times q_2$ etc. On termine grâce aux majorations précédentes.
***d*.** Partant de n et de $f(n)$, on construit des suites décroissantes des images d'images. Ces suites décroissantes d'entiers finissent sur une valeur commune.

Exercice 4

Peut-on trouver des entiers premiers p et q et un entier non nul m tels que : $2^m p^2 + 1 = q^7$?

Première condition nécessaire tirée de $2^m p^2 + 1 = q^7$: q est un nombre premier impair.

Par ailleurs, de $2^m p^2 = q^7 - 1 = (q-1)(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$ on déduit que le second facteur du produit figurant dans le second membre est impair. Donc $(q-1)$ est un multiple de 2^m. Posons $q - 1 = 2^m k$; l'égalité $p^2 = k(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$ montre que le carré du nombre premier p est un produit de deux facteurs, dont l'un, k, est plus petit que l'autre (car $k \leq q - 1 < q + 1$). Le plus petit des deux est nécessairement 1, donc $q = 2^m + 1$ et $p^2 = q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$

De $p^2 = \frac{q^7 - 1}{q-1}$, on tire $p^2 = \frac{(2^m+1)^7 - 1}{2^m}$. En développant, et en simplifiant par 2^m , on en déduit qu'il existe un entier h tel que $p^2 = 2^m h + 7$.

Maintenant, si $p^2 - 7 = 2^m h$ et si $m \geq 2$, on en déduit que 4 divise $p^2 - 7$. Ce qui est impossible (écrire $p = 2p' + 1$). La seule valeur possible pour m est donc 1.

Si $m = 1$, $q = 3$ et on doit alors trouver un entier p tel que $p^2 = 1\,093$. Il n'y a pas de solution.

Exercice 5

Quel est le chiffre des unités du plus grand entier inférieur ou égal à $M = \frac{10^{2\,016}}{10^{63}+7}$?

On remarque que $2\,016 = 63 \times 32$ et on pose $a = 10^{63}$.

On essaie de trouver « le plus grand entier inférieur à M ». $M = \frac{a^{32} - 7^{32}}{a+7} + \frac{7^{32}}{a+7}$; après simplification, on obtient :

$$M = (a-7)(a^{30} + a^{28}7^2 + a^{26}7^4 + \cdots + a^2 7^{28} + 7^{30}) + \frac{7^{32}}{a+7}$$

Le premier terme de cette somme est un entier, le second est strictement inférieur à 1. On cherche donc le chiffre des unités de $(a-7)(a^{30} + a^{28}7^2 + a^{26}7^4 + \cdots + a^2 7^{28} + 7^{30})$. Comme a est un multiple de 10, ce chiffre est le chiffre des unités de -7^{31}. Comme $7^4 \equiv 1[10]$, on se ramène à 3x49. Le chiffre cherché est 7.

Fonctions

Exercice 1

On appelle fonction de type T_0 toute fonction t définie sur [−1; 1] pour laquelle il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $t(x) = ax^2 + bx + c$.

On peut aussi dire « fonction trinôme sur [−1; 1] ».

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle fonction de type T_n toute fonction h pour laquelle il existe des fonctions f et g, de type T_{n-1} et un nombre réel r tels que $h = f + r|g|$.

1. Etablir que la fonction j définie par $j(x) = 0$ pour $x \in [-1, 0]$ et $j(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ est de type T_1.

2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = 0$ et $t_2(0) = 0$ et on définit la fonction f définie sur [−1; 1] par :

Pour tout réel $x \in [-1, 0]$ $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel $\in [0, 1]$ $f(x) = t_2(x)$.

Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N.

Voir page 13

Exercice 2

Partie A Rappels et exploration

On appelle *Partie entière* du réel x l'unique entier relatif n vérifiant : $n \leq x < n + 1$. On note $E(x) = n$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction E sur $[-3;\ 3]$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(x + n) = E(x) + n$.

La propriété est-elle encore vraie si n est négatif ?

3. On considère la fonction D, définie sur $\mathbf{R}$ par $D(x) = x - E(x)$. On l'appelle fonction *mantisse* ou *partie décimale* (bien que $D(x)$ ne soit pas forcément un nombre décimal)

Démontrer que la fonction D est périodique et bornée sur $\mathbf{R}$.

4. On considère deux nombres réels p et q, non nuls, et un nombre entier relatif k. Résoudre, dans $\mathbf{R}$, l'équation $E\left(\frac{p}{q}x\right) = k$.

Partie B Applications

1. Trouver l'exposant de 2 et de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000! Par combien de zéros finit l'écriture décimale de 1000! ?

2. Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
— 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
— 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.
Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?
Voir pages 13 et 14

Exercice 3 Identité peu remarquée
Trouver toutes les fonctions polynômes P à coefficients réels telles que pour tous réels a, b, c :

$$P(a+b-2c)+P(b+c-2a)+P(c+a-2b)=3P(a-b)+3P(b-c)+3P(c-a)$$

On commence par appliquer la propriété à $a=b=c$. Il vient $3P(0)=9P(0)$ et donc le coefficient « constant » de ces fonctions est nul. Si on l'applique à $a=b$ et $c=0$, on obtient
$P(2a)+P(-a)+P(-a)=3P(a)+3P(-a)$, ou encore $P(2a)-3P(a)-P(-a)=0$
Cette égalité, valable pour tout a, signifie qu'une certaine fonction polynôme est nulle. On peut donc regarder coefficient par coefficient :
Si n est le degré de la fonction P et a_n le coefficient du terme de degré n : $a_n 2^n-3a_n-(-1)^n a_n=0$
$(-1)^n+3$ vaut 2 ou 4, donc n vaut 1 ou 2.
Reste à vérifier que les fonctions trinômes prenant en 0 la valeur 0 vérifient la propriété donnée.

Exercice 4 Une équation fonctionnelle
On se propose de trouver les fonctions f, fonctions de **N** dans **N,** telles que $f(1)>0$ et que, pour tous entiers m et n : $f(m^2+n^2)=\left(f(m)\right)^2+\left(f(n)\right)^2$
1. Calculer des images des entiers compris entre 0 et 12
2. En toute généralité, calculer l'image $f(m)$d'un entier m quelconque.

1. $f(0)=2\left(f(0)\right)^2$, donc $f(0)=0$ puisque les images des entiers sont des entiers.
Si $f(0)=0$, alors pour tout entier m, $f(m^2)=\left(f(m)\right)^2$et donc $f(1)=1$ (0 est exclu par l'hypothèse)
$f(2)=2$ $(2=1+1)$, $f(4)=4$ $(4=2^2+0)$, $f(5)=5$ $(5=2^2+1)$, $f(8)=8$ $(8=2^2+2^2)$.
On a aussi $f(25)=\left(f(5)\right)^2=25$ et $f(16)=16$. De là on déduit $f(3)=3$ et $f(9)=9$.
Pour suivre, $f(10)=10$ $(10=3^2+1^2)$, donc $f(100)=100$, puis $f(36)=100-64=36$ et donc $f(6)=6$.
Avec $f(50)=25+25=50$, on trouve $f(49)=49$ donc $f(7)=7$. $f(125)=10^2+5^2=125$ et donc $f(11)=11$ par différence entre 125 et 4. Enfin $f(12)$ s'obtient par différence entre 169 et 25.
2. On essaie de montrer par récurrence que pour tout n, $f(n)=n$. Pour cela, on sait que cette propriété est vraie jusqu'à $n=12$. Pour un certain n donné quelconque, on fait l'hypothèse que tous les entiers inférieurs ou égaux à n possèdent cette propriété.
Si n est pair, on peut trouver un entier p tel que $n=2p$. On obtient une première égalité, valable pour tout p :

$$(2p+1)^2+(p-2)^2=(2p-1)^2+(p+2)^2$$

Si n est impair, on peut trouver un entier p tel que $n=2p+1$, et on a aussi une égalité :

$$(2p+2)^2+(p-2)^2=(2p-2)^2+(p+2)^2$$

Dans les deux cas, l'hypothèse de récurrence indique la valeur du membre de droite (respectivement $5p^2+5$ et $5p^2+8$) auquel il convient de retrancher $(p-2)^2$ pour obtenir le carré de l'image cherchée. On trouve $\left(f(2p+1)\right)^2=(2p+1)^2$ et $\left(f(2p+2)\right)^2=(2p+2)^2$
Le nombre n possède donc la propriété, et, après lui, par récurrence, tous les entiers.
Donc l'application f est l'identité sur **N**.

Exercice 5
Soient $f$et g deux applications de **R** dans **R** continues telles que :
1. $fog=gof$
2. Pour tout réel x, $f(x)\neq g(x)$

Montrer que, pour tout réel x, $fof(x)\neq gog(x)$

Soit a un réel quelconque. Supposons que $f(f(a)) = g(g(a))$
Posons $f(a) = b$ et $g(a) = c$. On a donc $f(b) = g(c)$.

La fonction *différence*, définie par $d(x) = f(x) - g(x)$, est une fonction continue qui ne prend pas la valeur 0. Elle est donc de signe constant. Or :

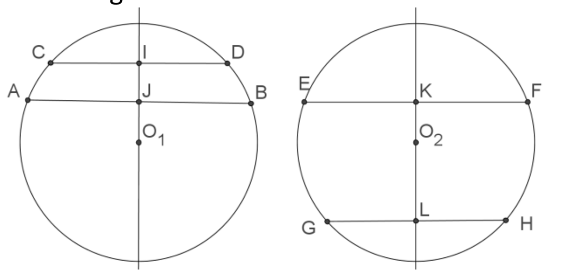
$$d(b) = f(b) - g(b) = g(c) - g(f(a)) = g(c) - f(c) = -d(c)$$

Ces deux images opposées ne peuvent être que nulles, ce qui est interdit par hypothèse.

Angles et distances

Exercice 1 Mise en jambes 1

Deux cordes d'un cercle ont pour longueurs respectives 24 et 32. La distance entre ces deux cordes est 14. Quelle est la longueur de la corde siuée à la distance 7 de chacune des deux ?



Deux situations sont possibles, qu'illustre la figure jointe. Pour la figure de gauche, si on appelle R le rayon du cercle, les triangles $\mathrm{O_1JA}$ et $\mathrm{O_1IC}$ sont rectangles respectivement en J et I, milieux des cordes. D'après le théorème de Pythagore

$$\begin{cases} R^2 = 16^2 + \mathrm{O_1J}^2 \\ R^2 = 12^2 + (14 + \mathrm{O_1J})^2 \end{cases}$$

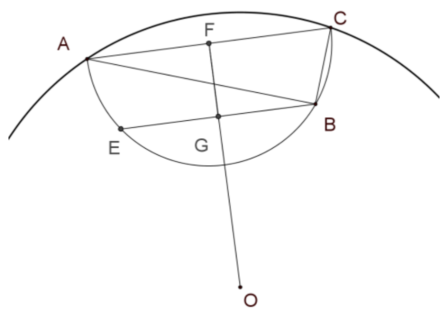
Il n'y a pas de solution positive en $\mathrm{O_1J}$.

Pour la figure de droite, on obtient : $\begin{cases} R^2 = 16^2 + \mathrm{O_2K}^2 \\ R^2 = 12^2 + (14 - \mathrm{O_2K})^2 \end{cases}$

Cette fois, il y a une solution positive, $\mathrm{O_2K}=3$. Le rayon du cercle est $\sqrt{265}$. Une corde située à la distance 4 du centre a pour demi-longueur $\sqrt{249}$

Exercice 2 Mise en jambes 2

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{50}$. Les points A et C sont deux points du cercle, le point B est un point intérieur au cercle. Le triangle ABC est rectangle en B, AB = 6 et BC = 2. Quelle est la distance OB ?



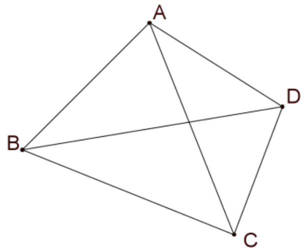
Le triangle ABC, rectangle en B, est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AC]. D'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{AC}^2 = 4 + 36 = 40$. Donc $\mathrm{AC}=2\sqrt{10}$. La hauteur h de ce triangle rectangle vérifie $\frac{h}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$, c'est-à-dire $h = \frac{6}{\sqrt{10}}$. C'est aussi la distance entre les droites (AC) et (EB), sa parallèle menée par B. On sait que $OF^2 = 50 - 10 = 40$. On obtient $\mathrm{OG} = \mathrm{OF} - \mathrm{GF}$. Donc $OG = \frac{14}{\sqrt{10}}$. On trouve GB en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BGF (dont l'hypoténuse est connue, puisque [BF] est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle rectangle ABC : $\mathrm{GB}^2 = 10 - \frac{36}{10} = \frac{64}{10}$. Finalement, OB est l'hypoténuse du triangle rectangle OGB, donc $\mathrm{OB}^2 = \frac{64}{10} + \frac{196}{10}$ et $\mathrm{OB} = \sqrt{26}$

Exercice 3

Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :

1. Les arêtes AB, AC, AD sont deux à deux orthogonales ;
2. $\mathrm{AB} = 3$ *et* $\mathrm{CD} = \sqrt{2}$

Déterminer la valeur minimale de $M = \mathrm{BC}^6 + \mathrm{BD}^6 - \mathrm{AC}^6 - AD^6$.



$$M = \mathrm{BC}^6 + \mathrm{BD}^6 - \mathrm{AC}^6 - \mathrm{AD}^6$$
$$= (\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2)(\mathrm{BC}^4 + \mathrm{BC}^2\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AC}^4) + (\mathrm{BD}^2 - \mathrm{AD}^2)(\mathrm{BD}^4 + \mathrm{BD}^2\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}^4)$$

Le théorème de Pythagore donne $\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2$ et $\mathrm{BD}^2 - \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2$

Donc $M = \mathrm{AB}^2\left((\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2)^2 + (\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2)\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AC}^4 + \left(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AB}^2\right)^2 + \left(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AB}^2\right)\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}^4\right)$

Dans $M = \mathrm{AB}^2(2\mathrm{AB}^4 + 3(\mathrm{AC}^4 + \mathrm{AD}^4) + 3\mathrm{AB}^2\mathrm{DC}^2)$, on remplace AB par 3 et CD par $\sqrt{2}$

$$M = 9(162 + 54 + 3(\mathrm{AC}^4 + \mathrm{AD}^4)) = 9(216 + 3(\mathrm{AC}^4 + \mathrm{AD}^4))$$

On s'intéresse à $\mathrm{AC}^4 + \mathrm{AD}^4$: $\mathrm{AC}^4 + \mathrm{AD}^4 = (\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2)^2 - 2\mathrm{AC}^2\mathrm{AD}^2 = 4 - 2\mathrm{AC}^2(2 - \mathrm{AC}^2)$

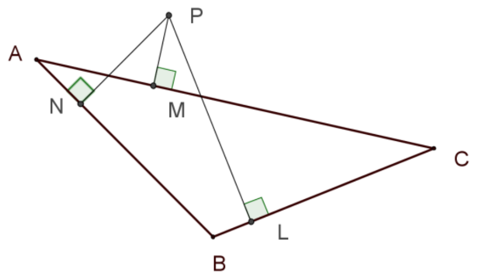
(Presque) finalement : $M = 9 \times 216 + 9\left(12 - 6\mathrm{AC}^2(2 - \mathrm{AC}^2)\right)$

$$M = 54\mathrm{AC}^4 - 108\mathrm{AC}^2 + 2\,052$$
$$M = 54(\mathrm{AC}^2 - 1)^2 + 1\,998$$

M est donc minimal pour $\mathrm{AC} = 1$ et ce minimum est 1 998.
Resterait à vérifier que le tétraèdre ainsi conçu existe. Un tel tétraèdre vérifie également $AD = 1$. Constructible.

Exercice 4

Soit ABC un triangle. Si P est un point du plan, on note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB). Déterminer la position du point P pour laquelle la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.



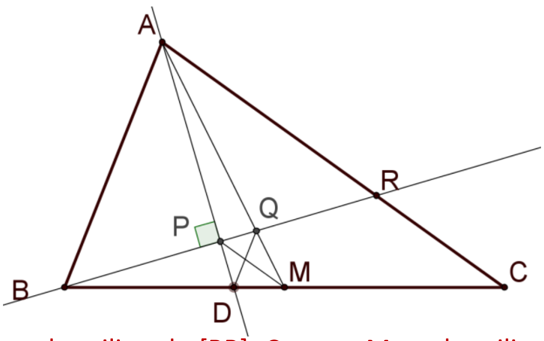
Utilisons le théorème de Pythagore : $BL^2 = PB^2 - PL^2$
On a aussi $CL^2 = PC^2 - PL^2$
Et donc $CL^2 = BL^2 + PC^2 - PB^2$
Si on appelle S la somme à minimiser, en recommençant ce qui vient d'être fait en partant des points C puis A, il apparaît que $S = BL^2 + CM^2 + AN^2 = BN^2 + CL^2 + AM^2$

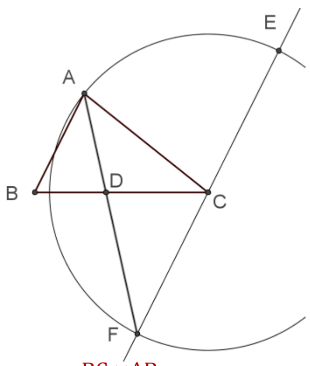
Par ailleurs, $BL^2 + CL^2 = \left(\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LC}\right)^2 - 2\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{LC}$
En introduisant le milieu D de [BC], $BL^2 + CL^2 = BC^2 - 2\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DL}\right) \cdot \left(\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{BD}\right)$
Ou encore $BL^2 + CL^2 = BC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + 2LD^2$
On recommence en partant de C puis de A : $2S = \frac{1}{2}(BC^2 + AB^2 + CA^2) + 2(LD^2 + ME^2 + NF^2)$, où M et N sont les milieux respectifs de [AC] et [AB].
Pour minimiser S, il suffit de faire en sorte que le deuxième terme de cette somme soit nul, ce qui est possible en prenant pour L,M et N les milieux des côtés du triangle. P est alors le point de concours des médiatrices, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que AB < AC. Soit M le milieu de [BC] et D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ avec [BC]. La perpendiculaire abaissée de B sur (AD) coupe (AD) en P, (AM) en Q et (AC) en R.

Montrer que (DQ) est parallèle à (AB).





Le triangle ABR est isocèle de sommet principal A (hauteur bissectrice). P est donc le milieu de [BR]. Comme M est le milieu de [BC], (PM) est une droite des milieux du triangle BRC. (PM) est donc parallèle à (AC) et $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{RC}} = \frac{1}{2}$. Le parallélisme de (DQ) et (AB) pourrait résulter de la réciproque du théorème de Thalès. C'est pourquoi nous travaillons sur les rapports $\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MA}}$ et $\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MB}}$.
On rappelle la propriété du pied D de la bissectrice intérieure : il divise le segment [BC] dans le rapport des deux autres côtés du triangle : $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}$ (voir figure de gauche). De cette égalité on déduit $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BD+DC}}{\mathrm{AB+AC}}$, ou encore $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB+AC}}$, ou encore $\mathrm{BD} = \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{AB}}{\mathrm{AB+AC}}$

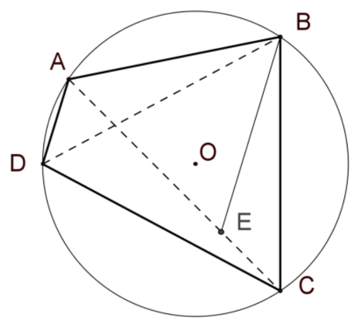
$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MB}} = 1 - \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{MB}} = 1 - \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{AB}}{\mathrm{AB+AC}} \times \frac{2}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AC} - \mathrm{AB}}{\mathrm{AC+AB}}$$

Les triangles PMQ et RAQ sont en situation de Thalès, par conséquent :

$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{RA}}$, et donc $\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QA}} \times \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AR}} \times \frac{1}{\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{MA}}+1}$, ou encore $\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AR}}}{\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AR}}+1}$

Reste à évaluer $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AR}}$: $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AR}} = \frac{\mathrm{BC}}{2\mathrm{AB}}$ D'où, après calculs $\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{AC-AB}}{\mathrm{AC+AB}}$
On obtient non seulement le parallélisme mais aussi le rapport d'homothétie…

Exercice 6 Le théorème de Ptolémée



Un quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si $AC.BD = AB.CD + BC.DA$

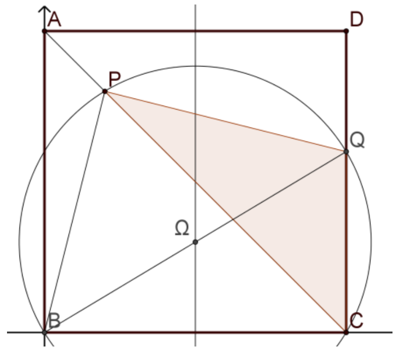
On ne démontre que la condition nécessaire.

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O. Soit E le point de la diagonale [AC] tel que $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{DBC}}$.

1. Montrer que les triangles ABE et DBC ont les mêmes angles. Ils sont *semblables*. En déduire que $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DC}}$

2. Montrer que les triangles DAB et CEB sont semblables.

Conclure.



3. Soit ABCD un carré de côté 1. Soit P un point de [AC]. Le cercle circonscrit au triangle BPC recoupe (CD) en Q. On suppose que l'aire du triangle CPQ est $\frac{6}{25}$. Combien vaut CQ ?

1. Un des angles de ABE a été construit égal à un des angles de DBC. Les angles $\widehat{\mathrm{BAE}}$
et $\widehat{\mathrm{BDC}}$ sont des angles inscrits interceptant le même arc. Des triangles ayant les mêmes angles ont des côtés proportionnels.

2. Deux des angles ont même mesure (différence entre un angle et des angles égaux), les autres interceptent le même arc $\widehat{\mathrm{AB}}$. Cette fois, ce sont les rapports $\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{DA}}$ et $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DB}}$ qui sont égaux. Il s'ensuit que $AB.DC + DA.BC = DB.(AE + EC)$; d'où le résultat.

3. On se place dans le cas où le point Q appartient au segment [CD] Le cercle circonscrit à BPC passe par Q. L'angle en C est droit, donc [BQ] est un diamètre de ce cercle. De ce fait, l'angle en P est lui aussi droit (et le triangle BPQ rectangle isocèle). Appelons p l'abscisse de P. Son ordonnée est $1 - p$. La droite (PQ) est orthogonale à la droite (BP). Elle a donc pour pente $\frac{p}{p-1}$ et pour équation $\frac{y-(1-p)}{x-p} = \frac{p}{p-1}$

L'ordonnée y de P vérifie donc $y - (1 - p) = -p$ soit encore $y = 1 - 2p$. C'est aussi la valeur de CQ. Reste à résoudre $\frac{1-p}{2} \times (1 - 2p) = \frac{6}{25}$ Cette équation a une seule solution comprise entre 0 et 1, c'est $\frac{1}{5}$. Il vient alors finalement CQ = $\frac{3}{5}$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de Ptolémée, le quadrilatère inscrit ayant deux côtés de même longueur cela simplifie un peu.

Suites

Exercice 1

1. Soit x un nombre réel. La somme $\frac{E(x)+E(2x)+E(3x)+\cdots E\left((n-1)x\right)+E(nx)}{n^2}$ admet-elle une limite ?

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N^*}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

3. Montrer (1) que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N^*}$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$$

---

(1). On pourra poser la division euclidienne de $E(nx)$ par n.

1. Pour tout réel x, $x - 1 \leq E(x) < x + 1$. La somme du numérateur est donc encadrée :

$$\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) \leq S_n(x) < \sum_{k=1}^{n}(kx + 1)$$

Ou encore $\frac{n(n+1)}{2}x - n \leq S_n(x) < \frac{n(n+1)}{2}x + n$. Et donc $\frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} \leq \frac{S_n(x)}{n^2} < \frac{n+1}{2n}x + \frac{1}{n}$

D'où on conclut que $\left(S_n(x)\right)$ a pour limite $\frac{x}{2}$.

2. Par définition, $E(x) \leq x < E(x)+1$, donc pour tout réel x et tout entier strictement positif n : $nE(x) \leq nx < nE(x)+n$. $E(nx)$ étant le plus grand entier inférieur ou égal à x, l'encadrement suivant est vrai pour tout x et tout n : $nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n$, et donc est vrai aussi : $E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$. D'où le résultat.

3. L'intervalle $[x, x+1]$ est la réunion de n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$. L'entier $E(x)+1$ appartient à l'un de ces intervalles, $\left[x+\frac{q}{n}, x+\frac{q+1}{n}\right]$. La somme à calculer comporte deux sortes de termes : les premiers sont égaux à $E(x)$, les autres à $E(x+1)$. Il y en a $q+1$ et $n-(q+1)$ si $(x)+1 > x+\frac{q}{n}$, q et $n-q$ en cas d'égalité.
La somme cherchée vaut donc $nE(x)+n-q+1$ ou $nE(x)+n-q$.

Exercice 2
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0, réel positif, et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$
La suite (u_n) est bien définie et ses termes sont tous positifs. Observons que, si cette suite a une limite, celle-ci ne peut être que 1 ou 0 (car $l = \sqrt{l}$ conduit à $l = 0$ ou $l = 1$).
On a, pour tout entier n, $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} - \frac{1}{(n+2)(n+1)}$
Comme $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}$ a le même signe que $u_{n+1} - u_n$, on en déduit que $u_{n+2} - u_{n+1}$ est négatif dès que $u_{n+1} - u_n$ est négatif. S'il existe un rang p tel que $u_{p+1} - u_p < 0$, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.
La suite (u_n), décroissante à partir d'un certain rang et à termes positifs, est convergente.
L'égalité $u_{n+1} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n}+1}$ (*) montre que cette limite est 1.
S'il n'existe aucun entier p pour lequel $u_{p+1} - u_p < 0$, alors toutes ces différences sont positives, et la suite est croissante. Si la suite admet une limite, cette limite ne peut être que 0 ou 1, or $u_1 = \sqrt{u_0} + 1$, terme supérieur à 1 (si $u_0 = 0$, c'est $u_2$qui est strictement supérieur à 1) et donc on aboutit à une contradiction : la suite (u_n), si elle est croissante, tend vers $+\infty$. Or, dans l'égalité, valable pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) + \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand le membre de gauche est positif et celui de droite négatif. Donc la supposition selon laquelle il n'y a aucun entier p pour lequel $u_{p+1} - u_p < 0$ est fausse. Il y en a donc un, et c'est le raisonnement qui suit cette supposition-là qu'il faut suivre. La suite admet pour limite 1.

Exercice 3
Pour tout entier naturel k, on définit $c(k)$ comme le plus grand cube d'entier inférieur ou égal à k.
On définit la suite (a_n) par son premier terme $a_0 = p$ et la relation de récurrence : $a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n)$.
Cette suite est-elle bornée ?

Voir page 15

Exercice 4
Une suite $a_1, a_2, a_3 \dots, a_n, \dots$ de nombres naturels est définie par $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_n$désignant le chiffre des unités de a_n. Prouver qu'une telle suite contient une infinité de puissances de 2 si et seulement si a_1 n'est pas divisible par 5.

Voir page 15

Exercice 5
Soit x un nombre complexe différent de 1 et tel que $x^{2\,016} = 1$. On suppose que chacun des termes de la somme S est bien défini. Calculer la somme :

$$S = \frac{x^2}{x-1} + \frac{x^4}{x^2-1} + \cdots + \frac{x^{4\,030}}{x^{2\,015}-1}$$

Dénombrements

Exercice 1
36 personnes participent à une réunion. Certaines se serrent la main (une seule fois). Chaque participant note le nombre de poignées de mains qu'il a échangées. Il apparaît que, lorsque deux participants ont salué le même

nombre de personnes, ils ne se sont pas salués entre eux. Quel est le nombre maximum de poignées de mains ainsi échangées (dans le décompte une poignée de mains échangée entre deux personnes compte pour une, non pour deux) ?

Notons P_i le nombre de participants ayant échangé i poignées de mains. Évaluons le nombre total S de poignées de mains échangées (le quotient par 2 correspond à la remarque de l'énoncé) :

$S = \frac{1}{2}(0 \times A_0 + 1 \times A_1 + 2 \times A_2 + \cdots + 34 \times A_{34} + 35 \times A_{35})$: Chaque membre de chaque groupe a serré i mains.

On peut écrire cette somme autrement :

$$S = \frac{1}{2}\left((A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{34} + A_{35}) + (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{34}) + \cdots + (A_1 + A_2) + A_1\right)$$

Prenons en compte l'hypothèse : les $A_i$personnes ayant serré exactement i mains n'ont serré la main d'aucune autre personne en ayant serré exactement i. Cette hypothèse s'interprète par l'inégalité, valable pour tout i : $i \leq 36 - A_i$. Ou encore $A_i \leq 36 - i$.

Chacun des $A_i$apparaissant dans la somme précédente peut être majoré par $36 - i$. Mais, de plus, toutes les sommes d'effectifs doivent être limitées à 36, qui est l'effectif total.

On a donc

$$S \leq \frac{1}{2}(36 + 36 + 36 + \cdots + 36 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + \cdots + (1 + 2) + 1)$$

La somme précédente a 35 termes dont 7 sont inférieurs à 36 et 28 égaux à 36.

Conclusion $S \leq 546$

Malgré les majorations brutales appliquées, ce nombre est bien un maximum, et pas seulement un majorant. Comme on a pu observer en passant que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, on peut songer à constituer 8 groupes dont les effectifs sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, chaque membre d'un groupe ayant serré les mains de tous les membres des **autres** groupes. Le nombre de poignées de mains, si chacun serre la main de chacun, est $\binom{36}{2}$. De ce nombre, il faut retrancher les poignées de mains qui n'ont pas été données, $\binom{i}{2}$ dans le groupe constitué de i personnes. On obtient bien 546.

Exercice 2 Loterie

On se donne un entier n et un polygone régulier à n côtés. On choisit au hasard (sans remise) trois sommets de ce polygone. Quelle est la probabilité de tirer un triangle isocèle ?

Voir page 16

Exercice 3 Limitation d'effectifs

Dans une université, chaque étudiant est identifié par un numéro. Ce nombre est un diviseur de 60^{60}.

Un moyen d'éviter les confusions a été trouvé : Aucun PGCD de deux numéros d'étudiants n'est un numéro d'étudiant. Combien l'université peut-elle compter d'étudiants, au maximum ?

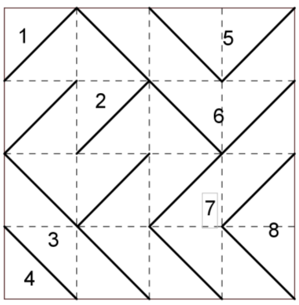
Pour chaque numéro d'étudiant N, il existe un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$. Les exposants b et c sont inférieurs à 60, l'exposant a est inférieur à 120.

Considérons l'ensemble des triplets de somme 120. Il y en a 61^2, c'est-à-dire 3 721, car les choix de b et c, chacun inférieur à 120, les déterminent entièrement. Le plus grand diviseur commun de deux numéros ainsi fabriqués est associé à un triplet dont les projections α, β, γ ont une somme inférieure strictement à 120 (il est impossible que l'un soit un diviseur de l'autre, les sommes des exposants étant les mêmes). Cet **exemple** montre que 3 721 est un effectif possible.

Cependant, si l'université compte 3 722 étudiants ou plus, deux d'entre eux ont des numéros faisant apparaître les mêmes puissances de 3 et 5. En ce cas, le plus petit des deux (celui qui a l'exposant de 2 le plus bas) est un diviseur de l'autre…

On se limitera donc à 3 721 étudiants.

Exercice 4 Régionnement



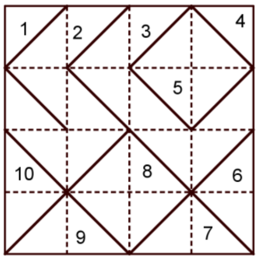
Dans chaque case d'un tableau carré $n \times n$, on trace une des diagonales. Ces diagonales déterminent dans le carré un certain nombre de régions (8 dans l'exemple ci-contre, avec un quadrillage 4x4).

Déterminer, en fonction de n, le nombre minimum et le nombre maximum de régions ainsi délimlitées.

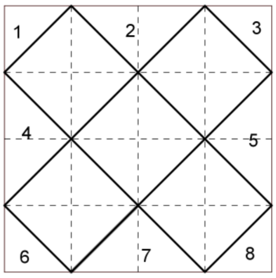
On distingue deux sortes de régions : celles dont la frontière contient un segment d'un bord du carré et celles qui sont fermées et intérieures au carré. Une région « ouverte » contient exactement 2 segments du bord (côtés d'un élément du tableau situé au bord). Il y a donc exactement $2n$ régions ouvertes. Ce nombre constitue le minimum du nombre total de régions possible (cas où toutes les régions sont ouvertes, comme sur la figure).

Une région « fermée » a au moins 4 côtés qui sont des diagonales des cases du tableau.

Le schéma ci-contre montre un exemple dans lequel on voit des régions fermées.



L'aire couverte par les régions ouvertes est ½ pour au plus quatre d'entre elles, au moins 1 pour les autres, d'où il ressort qu'elle est au total supérieure à $2n - 4 \times \frac{1}{2} = 2n - 2$.



Les régions fermées ot une aire minimale de 2. Il y en a donc un maximum de $\left[\frac{n^2-2n+2}{2}\right]$ (les crochets désignant la partie entière). Le nombre maximum de régions est donc au total $2n + \left[\frac{n^2-2n+2}{2}\right]$, soit $\left[\frac{n^2+2n+2}{2}\right]$.

À gauche, un exemple de quadrillage 4 x 4 avec 13 régions.

Exercice 5 Problème de partage

Quatre enfants se sont assis à table et se sont servi la soupe : 1 louche pour Ali, 2 louches pour Ben, 4 louches pour Caro, 8 louches pour Dora. Le père arrive : « Ça ne va pas du tout ! » Dans le but de répartir équitablement le potage, il prend au hasard (hasard aidé par les enfants) deux assiettes, en mélange le contenu avant de le partager équitablement, et recommence avec deux assiettes, etc. Il réalise cette opération quatre fois. Quelle est la probabilité qu'à l'issue de ces manœuvres la répartition soit équitable ?

La question du nombre de cas possibles est ambiguë, car « au hasard » ne signifie sans doute pas quand même que le père ferait une manipulation avec deux assiettes dont il vient déjà d'égaliser les contenus. Par ailleurs, il peut aussi éviter les redondances (si deux assiettes ont le même contenu, qu'on équilibre la première ou la seconde avec une troisième ne change rien à la perspective finale). En toute généralité, en toute ignorance, le nombre de cas possibles est 6^4. Si on tient compte des observations précédentes, les 6 mélanges possibles à la pemière manipulation deviennent 3 à la seconde, à la troisième et à la quatrième, ce qui ramène le nombre des cas possibles à 6×3^3= 162. Et encore, il s'agit d'un majorant, qui ignore les situations dans lesquelles deux fois deux assiettes auraient des contenus identiques.

Étudions les cas favorables « à rebours » : si à l'issue de la quatrième manipulation les quatre assiettes ont le même contenu, c'est que deux l'avaient déjà à l'issue de la troisième, puisqu'on est intervenu que sur le contenu de deux assiettes. À l'issue de la troisième manipulation, deux assiettes ont donc (déjà) un contenu de 15/4 de louche. La somme de leurs contenus était donc, avant cette manipulation, 15/2. Le tableau suivant montre les distributions possibles.

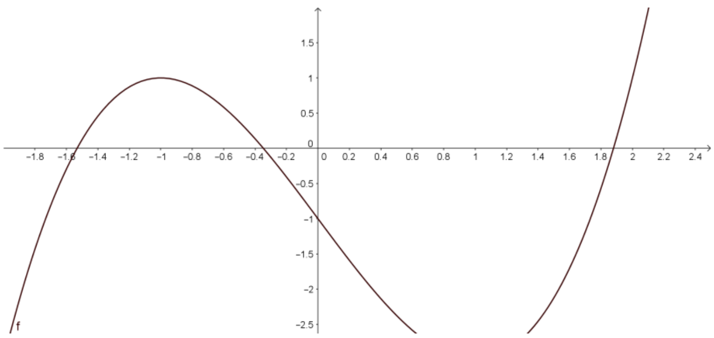
Début	**Premier partage**	**Deuxième partage**	**Troisième partage**	**Fin**
$1, 2, 4, 8$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 4, 8$	$\frac{11}{4}, \frac{11}{4}, \frac{3}{2}, 8$ ou $\frac{19}{4}, \frac{19}{4}, \frac{3}{2}, 4$ ou $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 6, 6$	2 fois $\frac{15}{4}$,deux de somme $\frac{15}{2}$	**$\frac{15}{4}, \frac{15}{4}, \frac{15}{4}, \frac{15}{4}$**
	$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2, 8$	$\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, 8$ ou $\frac{21}{4}, \frac{21}{4}, \frac{5}{2}, 2$ ou $\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 5, 5$	2 fois $\frac{15}{4}$,deux de somme $\frac{15}{2}$	
	$\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 2, 4$	$\frac{13}{4}, \frac{13}{4}, \frac{9}{2}, 4$ ou $\frac{17}{4}, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, 2$ ou $\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 3, 3$	2 fois $\frac{15}{4}$,deux de somme $\frac{15}{2}$	
	$3, 3, 1, 8$	$2, 2, 3, 8$ ou $\frac{11}{2}, \frac{11}{2}, 3, 1$ ou $3, 3, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}$	2 fois $\frac{15}{4}$,deux de somme $\frac{15}{2}$	
	$5, 5, 1, 4$	$3, 3, 5, 4$ ou $\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 5, 1$ ou $5, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$	2 fois $\frac{15}{4}$,deux de somme $\frac{15}{2}$	
	$6, 6, 1, 2$	$\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 6, 2$ ou $4, 4, 6, 1$ ou $6, 6, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	2 fois $\frac{15}{4}$,deux de somme $\frac{15}{2}$	

Une étude littérale montre que l'itinéraire $(a, b, c, d) \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{2}, \frac{a+b+c+d}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \rightarrow$ 4 fois $\frac{a+b+c+d}{4}$ est le modèle qui conduit à la bonne répartition.

Équations

Exercice 1 Équation du troisième degré On se donne deux réels p et q et on cherche à résoudre l'équation $x^3 + px = q$.
0. Montrer que toute équation polynôme du troisième degré peut être ramenée à cette forme au moyen d'un changement d'inconnue.
1. On pose $x = u + v$, en imposant à u et v la condition $uv = -\frac{p}{3}$.
Écrire le système d'inconnue (u, v) correspondant au problème.
2. Le système $\begin{cases} U + V = q \\ UV = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$ admet-il des solutions réelles ? Des solutions non réelles ?
3. Comment passe-t-on de (U, V) aux solutions de $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$?
4. Résoudre l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$

0. Le coefficient du terme de degré 3 peut être ramené à 1 par factorisation. Pour l'équation $x^3 + ax^2 = bx + c = 0$, on pose $y = x + \frac{a}{3}$
1. On obtient : $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$
2. Les solutions de ce système sont les racines de l'équation $T^2 - qT - \frac{p^3}{27} = 0$. Elles sont réelles si $\frac{4p^3+27q^2}{27} \geq 0$, complexes conjuguées dans le cas contraire.
3. u et v sont des racines cubiques des racines de l'équation précédente. Pour les apparier, il faut tenir compte de la condition $uv = -\frac{p}{3}$, qui doit être traduite par le fait que le produit uv est réel.
4. Pour l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$, on doit donc résoudre l'équation $T^2 - T + 1 = 0$, dont les solutions sont $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et son conjugué. $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ est les nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$. Ses racines cubiques ont donc pour arguments $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}$ et $\frac{13\pi}{9}$. Les racines cubiques de son conjugué ont des arguments opposés, ce qui fait qu'en les appariant et en sommant on obtient pour l'équation de départ les solutions $2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}$ et $2\cos\frac{13\pi}{9}$; la courbe de droite donne une idée des valeurs concernées. On pouvait aussi dans ce cas particulier utiliser les formules donnant les lignes trigonométriques de l'arc triple.



Exercice 2 Une équation du quatrième degré
Soit à résoudre l'équation $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$
1. Par quel changement d'inconnue se ramène-t-on à l'équation $z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = 0$?
2. On cherche y tel que l'équation précédente se simplifie en $(z^2 + y)^2 = \left(A(z)\right)^2$. Montrer qu'un tel y est solution de $2y^3 + 3y^2 + 4y - 3 = 0$. Cette équation a-t-elle une solution réelle ? (On n'est pas obligé de la résoudre avec la méthode de l'exercice 1 pour le savoir).
3. Résoudre finalement l'équation initiale.

1. Comme dans l'exercice précédent, un changement affine convient. Ici, $z = x + 1$.
2. $z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = (z^2 + y)^2 - 2yz^2 - y^2 - 3z^2 - 6z - 2$
$z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = (z^2 + y)^2 - (2y + 3)z^2 - y^2 - 6z - 2$
Soit $B(z) = (2y + 3)z^2 + 6z + y^2 + 2$. C'est le carré d'un polynôme du premier degré en z si $36 - 4(2y + 3)(y^2 + 2) = 0$, qui donne la condition sur y. L'équation $2y^3 + 3y^2 + 4y - 3 = 0$ n'a qu'une racine réelle, $\frac{1}{2}$.
3. L'équation en z s'écrit : $\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2z + \frac{3}{2}\right)^2$. Ses solutions sont $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -1 + \mathrm{i}, -1 - \mathrm{i}$, auxquelles il faut retrancher 1 pour avoir les solutions de l'équation de départ ; $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2 + \mathrm{i}, -2 - \mathrm{i}$.

Exercice 3 Un peu de trigonométrie

On donne un nombre réel p. Discuter selon p le nombre de solutions de l'équation $\sqrt{1-\sin^2 x}+\sin x=p$

Première remarque : toutes les solutions se déduisent de celles contenues dans l'intervalle $[0,2\pi]$ par addition du produit de 2π par un entier.

Pour tout x, $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$. Il s'ensuit que le premier membre de l'équation est un nombre compris entre -2 et 2. Premier résultat : si $p\notin[-2,2]$, il n'y a pas de solution.

On cherche les solutions pour lesquelles $\cos x\geq 0$ (c'est-à-dire appartenant à la réunion d'intervalles $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[3\frac{\pi}{2},2\pi\right]$). Dans ces conditions, $|\cos x|+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Il y a des solutions dès lors que $|p|\leq\sqrt{2}$. Deux solutions si $|p|<\sqrt{2}$, une en cas d'égalité.

On cherche ensuite les solutions pour lesquelles $\cos x<0$, avec le même type de résultat.

Exercice 4 Racines communes

On considère trois nombres réels a,b et c vérifiant :

1. $c\neq 1$
2. Les équations $x^2+ax+1=0$ et $x^2+bx+c=0$ ont une racine commune ;
3. Les équations $x^2+x+a=0$ et $x^2+cx+b=0$ ont une racine commune.

Combien vaut $a+b+c$?

Si les deux premières équations ont une racine commune (ceci ne pouvant pas se produire si $a=b$ et $c\neq 1$), cette racine ne peut être que $\frac{c-1}{a-b}$; si les deux autres équations ont une racine commune, cette racine ne peut être que $\frac{a-b}{c-1}$.

Écrivons que $\frac{c-1}{a-b}$ est racine de la première équation :

$$\left(\frac{c-1}{a-b}\right)^2+a\left(\frac{c-1}{a-b}\right)+1=0$$

Écrivons que $\frac{a-b}{c-1}$ est racine de la troisième :

$$\left(\frac{a-b}{c-1}\right)^2+\left(\frac{a-b}{c-1}\right)+a=0$$

On a donc : $\begin{cases}(c-1)^2+a(c-1)(a-b)+(a-b)^2=0\\(a-b)^2+(c-1)(a-b)+a(c-1)^2=0\end{cases}$

Par soustraction :

$$(c-1)^2(1-a)+(c-1)(a-b)(a-1)=0$$

Ou encore $(c-1)(1-a)(c-1-a+b)=0$

Exercice 5 Quel mélange !

On suppose que le système d'équations $\begin{cases}x^3-5xy^2=21\\y^3-5x^2y=28\end{cases}$ admet au moins trois couples solutions distincts, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$. Combien vaut $M=\left(11-\frac{x_1}{y_1}\right)\left(11-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(11-\frac{x_3}{y_3}\right)$?

Procédons par condition nécessaire. Une combinaison linéaire (coefficient 4 pour la première égalité, – 3 pour la seconde) conduit à : $4x^3-3y^3+15x^2y-20xy^2=0$

Comme aucun couple $(x,0)$ n'est solution, on pose $\frac{x}{y}=t$. La condition nécessaire s'écrit :

$4t^3+15t^2-20t-3=0$

Si les solutions de cette équation sont t_1,t_2,t_3 on obtient par identification $t_1t_2t_3=\frac{3}{4}$, $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-5$, $t_1+t_2+t_3=-\frac{15}{4}$

Par ailleurs $M=\left(11-\frac{x_1}{y_1}\right)\left(11-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(11-\frac{x_3}{y_3}\right)=1\,331+11(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)-121(t_1+t_2+t_3)-t_1t_2t_3$

Et donc $M=1\,331-55+121\times\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=1\,729$

Compléments aux solutions

Thème Fonctions

Exercice 1

1. La fonction j est bien définie sur $I=[-1;1]$, car $j(0)=0$.
   La fonction j est de type T_1 si et seulement si il existe deux fonctions f et g de type T_0 et un nombre réel r tels que $j(x)=f(x)+r|g(x)|$ pour tout $x\in[-1;1]$.
   Autrementdit, il faut trouver sept nombres réels a, b, c, a', b', c' et r tels que

$$j(x)=ax^2+bx+c+r|a'x^2+b'x+c'| \qquad \text{pour tout } x\in[-1;1]$$

   Comme $|x|+x=0$ si $x<0$ et $|x|+x=2x$ sinon, on peut proposer $a=a'=c=c'=0$, $r=1$ et $b=b'=\frac{1}{2}$.

2. L'idée est de construire une fonction "de la forme" $x\mapsto \dfrac{t_1(x)+t_2(x)}{2}+\left|\dfrac{t_2(x)-t_1(x)}{2}\right|$. Mais pour cela il faut contrôler le signe de $\dfrac{t_2(x)-t_1(x)}{2}$ (ou de ce qui va être dans la valeur absolue) sur l'intervalle I.
   On a

$$\frac{t_2(x)-t_1(x)}{2}=\frac{1}{2}\left((a_2-a_1)x^2+(b_2-b_1)x\right)$$

   d'où, pour tout $x\in I$

$$\left|\frac{t_2(x)-t_1(x)}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left(|a_2-a_1|+|b_2-b_1|\right)|x|$$

   On pose $k=\dfrac{1}{2}\left(|a_2-a_1|+|b_2-b_1|\right)$ et on a ainsi, pour $x\in I$:

$$\left|\frac{t_2(x)-t_1(x)}{2}\right|\leq k\,|x|$$

   La fonction g définie sur I par

$$g(x)=\left|\frac{t_2(x)-t_1(x)}{2}+kx\right|-|kx|$$

   vérifie :

$$g(x)=\frac{t_2(x)-t_1(x)}{2} \qquad \text{pour } x\geq 0$$
$$g(x)=\frac{t_1(x)-t_2(x)}{2} \qquad \text{pour } x\leq 0$$

   La fonction définie sur I, par $f(x)=\dfrac{t_1(x)+t_2(x)}{2}+g(x)$ convient et, est de type T_N par construction (à partir du type des fonctions t_1 et t_2).

Exercice 2

Partie A

1. RAS
2. Classique
3. Récurrence, faux sur $\mathbb{Z}$.
4. Ce qui précède montre que la fonction D est $1-$périodique et la définition de la fonction E que $0\leq D(x)<1$ pour tout $x\in R$. On reconnait la "fonction" *partie décimale*.
5. Soit x, nombre réel tel que $k\leq\dfrac{px}{q}<k+1$, et comme $\dfrac{p}{q}>0$, en multipliant l'encadrement par $\dfrac{p}{q}$, on obtient $k\dfrac{p}{q}\leq x<(k+1)\dfrac{p}{q}$.
   L'ensemble solution est l'intervalle $\left[\dfrac{p}{q}k\,;\,\dfrac{p}{q}(k+1)\right[$.

Partie B

1. Entre 1 et 1000, il y a :
   - $E\left(\dfrac{1000}{2}\right) = 500$ nombres pairs,
   - $E\left(\dfrac{1000}{4}\right) = 250$ multiples de 4,
   - $E\left(\dfrac{1000}{8}\right) = 125$ multiples de 8,
   - ...
   - $E\left(\dfrac{1000}{512}\right) = 1$ multiple de 512.

   L'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers est donc donné par la somme : $500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$.
   En considèrant les puissances de 5 ne dépassant pas 1000, on montre que l'exposant de 5 dans la décomposition en facteurs premiers est 249, ce qui donne également le nombre de 0 cherché.
   On peut obtenir :
   $1000! = 2^{994} \times 3^{498} \times 5^{249} \times 7^{164} \times 11^{98} \times 13^{81} \times 17^{61} \times 19^{54} \times 23^{44} \times 29^{35} \times 31^{33} \times 37^{27} \times 41^{24} \times 43^{23} \times 47^{21} \times$

$53^{18} \times 59^{16} \times 61^{16} \times 67^{14} \times 71^{14} \times 73^{13} \times 79^{12} \times 83^{12} \times 89^{11} v 97^{10} \times 101^{9} \times 103^{9} \times 107^{9} \times 109^{9} \times 113^{8} \times 127^{7} \times 131^{7} \times 137^{7} \times 139^{7} \times 149^{6} \times 151^{6} \times 157^{6} \times 163^{6} \times 167^{5} \times 173^{5} \times 179^{5} \times 181^{5} \times 191^{5} \times 193^{5} \times 197^{5} \times 199^{5} \times 211^{4} \times 223^{4} \times 227^{4} \times 229^{4} \times 233^{4} \times 239^{4} \times 241^{4} \times 251^{3} \times 257^{3} \times 263^{3} \times 269^{3} \times 271^{3} \times 277^{3} \times 281^{3} \times 283^{3} \times 293^{3} \times 307^{3} \times 311^{3} \times 313^{3} \times 317^{3} \times 331^{3} \times 337^{2} \times 347^{2} \times 349^{2} \times 353^{2} \times 359^{2} \times 367^{2} \times 373^{2} \times 379^{2} \times 383^{2} \times 389^{2} \times 397^{2} \times 401^{2} \times 409^{2} \times 419^{2} \times 421^{2} \times 431^{2} \times 433^{2} \times 439^{2} \times 443^{2} \times 449^{2} \times 457^{2} \times 461^{2} \times 463^{2} \times 467^{2} \times 479^{2} \times 487^{2} \times 491^{2} \times 499^{2} \times 503 \times 509 \times 521 \times 523 \times 541 \times 547 \times 557 \times 563 \times 569 \times 571 \times 577 \times 587 \times 593 \times 599 \times 601 \times 607 \times 613 \times 617 \times 619 \times 631 \times 641 \times 643 \times 647 \times 653 \times 659 \times 661 \times 673 \times 677 \times 683 \times 691 \times 701 \times 709 \times 719 \times 727 \times 733 \times 739 \times 743 \times 751 \times 757 \times 761 \times 769 \times 773 \times 787 \times 797 \times 809 \times 811 \times 821 \times 823 \times 827 \times 829 \times 839 \times 853 \times 857 \times 859 \times 863 \times 877 \times 881 \times 883 \times 887 \times 907 \times 911 \times 919 \times 929 \times 937 \times 941 \times 947 \times 953 \times 967 \times 971 \times 977 \times 983 \times 991 \times 997.$

2. Ne pas payer de centimes revient à payer la partie entière du prix exacte.
   On a donc le système d'équations (r prix du kilo de côtelettes et s le prix du kilo de rôti) :

$$\begin{cases} E(0,75r) + E(0,25s) = 18 \\ E(0,25r) + E(0,50s) = 17 \end{cases}$$

D'où le système d'inéquations :

$$\begin{cases} 18 \leq 0,75r + 0,25s < 20 \\ 17 \leq 0,25r + 0,50s < 19 \end{cases}$$

On obtient les inéquations :

$$19 > \frac{1}{4}r + \frac{1}{2}s \qquad 20 > \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \qquad \frac{1}{4}r + \frac{1}{2}s \geq 17 \qquad \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \geq 18$$

On en déduit que $r \in [13,6\,;\,18,4[$ et $s \in [24,8\,;\,31,2[$. La représentation graphique de la partie A (ou le fait que la fonction D soit $1 - priodique$), nous apprend que la fonction E change d'image dès que la partie enitère est différente. Aussi les fonctions $\mapsto E(\lambda x)$, changent de valeur tous les "multiples" de $\frac{1}{\lambda}$, $k \in \mathbb{R}^*$.
Pour $\lambda = 0,75$ ou $0,5$ ou $0,25$ les fonctions correspondantes changent de valeurs tous les "multiples" $\frac{3}{4}$ ou 2 ou 4 (respectivement).

r	$\left[13,6\,;\,\frac{44}{3}\right[$	$\left[\frac{44}{3}\,;\,\frac{48}{3}\right[$	$\left[\frac{48}{3}\,;\,\frac{52}{3}\right[$	$\left[\frac{52}{3}\,;\,\frac{56}{3}\right[$	$\left[\frac{56}{3}\,;\,18\right[$
$E(0,75r)$	10	11	12	13	14
$E(0,25r)$	3	3	4	4	4

s	$[24,8\,;\,26[$	$[26\,;\,28[$	$[28\,;\,30[$	$[30\,;\,31,2[$
$E(0,25s)$	6	6	7	7
$E(0,50s)$	12	13	14	15

Retour au système :

$$\begin{cases} 18 \leq 0,75r + 0,25s < 20 \\ 17 \leq 0,25r + 0,50s < 19 \end{cases}$$

L'étude des tableaux donne comme ensemble solution :

$$\left(\left[\frac{44}{3}\,;\,\frac{48}{3}\right[\times [28\,;\,30[\right) \cup \left(\left[\frac{48}{3}\,;\,\frac{52}{3}\right[\times [26\,;\,28[\right)$$

Thème Suites

Exercice 3

Eléments de solutions On a $c(k) \leq k$, donc $c(a_n) \leq a_n$. On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante avec $a_{n+1} = a_n$ si, et seulement si a_n est un cube parfait.
Autrement dit, la suite est bornée si et seulement si, il existe n_0 tel que a_{n_0} est un cube parfait. En particulier, si p est un cube parfait.
Montrons donc que si a_n n'est pas un cube parfait, alors a_{n+1} non plus.
Si a_n n'est pas un cube parfait, alors, par définition, $q^3 < a_n < (q+1)^3$ ou encore $c(a_n) = q^3$.
Supposons, par l'absurde, que a_{n+1} est un cube parfait.
On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 2c(a_n) \\ &< 3(q+1)^3 - 2q^3 \\ &= q^3 + 9q^2 + 9q + 3 \\ &< q^3 + 9q^2 + 27q + 27 \\ &= (q+3)^3 \end{aligned}$$

Comme $c(a_n) < a_n$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, alors $q^3 < a_{n+1} < (q+3)^3$. Donc $a_{n+1} = (q+1)^3$ ou $a_{n+1} = (q+2)^3$.
Dans les deux cas, on a les équivalences :

$$3a_n - 2q^3 = a_{n+1} = (q+1)^3 \iff 3a_n = 3(q^3 + q^2 + q) + 1$$

$$3a_n - 2q^3 = a_{n+1} = (q+2)^3 \iff 3a_n = 3(q^3 + 2q^2 + 4q) + 8$$

Or, ni 8, ni 1 ne sont congrus à 0 modulo 3. D'où la contradiction et le résultat.

Exercice 4

Eléments de solutions Si a_1 est un multiple de 5, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_1 = 5k$, le chiffre des unités de $5k$ est soit 0, soit 5. Dans le premier cas, la suite est stationnaire à partir de $n = 1$, dans le second cas elle est stationnaire à partir de $n = 2$.
Dans ce cas a_n ne peut jamais être une puissance de 2.

Si a_1 n'est pas un multiple de 5, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_1 = 5k + r$ où $1 \leq r \leq 4$. Dans ce cas a_n est pair pour $n \geq 2$ et b_n est une suite cyclique et de cycle $2 - 4 - 8 - 6$.
On a aussi $a_{n+4} = a_n + 20$ pour tout $n \geq 2$.

Considèrons l'exemple où $a_1 = 1$:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	1+1=2	2+2=4	4+4=8	8+8=16	16+6=22	22+2=24	24+4=28	28+8=36
Retenue	0	0	0	1	1	0	0	1
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2×11	$2^3 \times 3$	$2^2 \times 7$	$2^2 \times 3^2$
modulo 20	2	4	8	16	2	4	8	16

a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
$36+6=42$	$42+2=44$	$44+4=48$	$48+8=56$	$56+6=62$	$62+2=64$	$64+4=68$
1	0	0	1	1	0	0
$2\times3\times7$	$2^2\times11$	$2^4\times3$	$2^3\times7$	2×31	2^6	$2^2\times17$
2	4	8	16	2	4	8

a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$68+8=76$	$76+6=82$	$82+2=84$	$84+4=88$	$88+8=96$	$96+6=102$	$102+2=104$
1	1	0	0	1	1	0
$2^2\times19$	2×41	$2^2\times3\times7$	$2^3\times11$	$2^5\times3$	$2\times3\times17$	$2^3\times13$
16	2	4	8	16	2	4

a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{92}	a_{30}
$104+4=108$	$108+8=116$	$116+6=122$	$122+2=124$	$124+4=128$	$128+8=136$	$136+6=142$
0	1	1	0	0	1	1
$2^2\times3^3$	$2^2\times29$	2×61	$2^2\times31$	2^7	$2^3\times17$	2×71
8	16	2	4	8	16	2

- Si $a_j\equiv 2\,[20]$, alors les nombres de la suite $(a_{j+1+4k})_{k\in\mathbb{N}}$ représentent tous les nombres congrus à $4\,[20]$ et supérieurs à a_{j+1}. Donc, toutes les puissances de 2, plus grandes que a_{j+1} et congrues à $4\,[20]$, apparaissent dans cette suite.
- Si $a_j\equiv 12\,[20]$, alors les nombres de la suite $(a_{j+4k})_{k\in\mathbb{N}}$ représentent tous les nombres congrus à $12\,[20]$ et supérieurs à a_j. Donc, toutes les puissances de 2, plus grandes que a_j et congrues à $12\,[20]$, apparaissent dans cette suite.

Thème Dénombrement

Exercice 2

Dans un repère orthonormal du plan d'origine O, on considère le polygone régulier $\mathcal{P}$ de centre O. Sans perte de généralité, on peut choisir $\mathcal{P}$ de façon à ce que les n sommets $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ aient pour affixe $re^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $0\leq k\leq n-1$ et $r>0$.
On fait l'hypothèse d'équiprobabilité des tirages de trois points distincts choisis parmi les n sommets.
On pose E : *le triangle formé est isocèle* et p_n la probabilté de cet événement. On a

$$p_n=\frac{card(E)}{\binom{3}{n}}$$

Cas d'un triangle équilatéral
Soit t_n le nombre de triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à $\mathcal{P}$. Si n n'est pas un multiple de 3, $t_n=0$, sinon $t_n=\frac{n}{3}$.
Cas d'un triangle isocèle
Soient a, b, c trois entiers distincts dans l'ensemble $\{0\,;\,\ldots\,;\,n-1\}$ avec $a<b$. Le triangle $A_aA_bA_c$ est isocèle en A_c si et seulement si $\left(\overrightarrow{OA_a}\,;\,\overrightarrow{OA_c}\right)=\left(\overrightarrow{OA_c}\,;\,\overrightarrow{OA_b}\right)$. Autrement dit, si et seulement si

$$a<c<b \quad \text{et} \quad c-a=b-c$$

ou

$$b < c \quad \text{et} \quad n + a - c = c - b$$

— Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ tel que $n = 2p$. Pour que a et b vérifient l'une des égalités précédentes, il faut que a et b aient la même parité. On obtient donc

$$a < c < b \quad \text{et} \quad c = \frac{a+b}{2}$$

ou

$$b < c \quad \text{et} \quad c = \frac{a+b}{2} + p$$

Donc à une paire d'éléments de $\{0\,;\,\ldots\,;\,n-1\}$ de même parité correspond deux triangles isocèles. En enlevant les t_n triangles équilatéraux qui sont comptés trois fois, on obtient

$$Card(E) = 4\binom{p}{2} - 2t_n$$

— Si n est pair et non multiple de 3, alors $t_n = 0$. D'où

$$p_n = \frac{4\binom{p}{2}}{\binom{2p}{3}} = \frac{3}{2p-1}$$

— Si n est pair et multiple de 3, alors $t_n = \frac{n}{3}$. D'où

$$p_n = \frac{4\binom{p}{2} - 2\dfrac{n}{3}}{\binom{2p}{3}} = \frac{3}{2p-1} - \frac{4}{(2p-1)(2p-2)}$$

— Si n est impair, alors pour tout couple d'entiers $(a\,;\,b)$, où $0 \leq a < b \leq n-1$, il existe un unique entier $c \in \{0\,;\,\ldots\,;\,n-1\}$ vérifiant l'une des égalités précédentes. On a alors

$$c = \frac{a+b}{2} \quad \text{si a et b ont même parité} \qquad \text{ou} \qquad c = \frac{a+b+n}{2} \quad \text{si a et b n'ont pas même parité}$$

En tenant compte des triangles équilatéraux, on obtient

$$Card(E) = \binom{n}{2} - 2t_n$$