MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas es dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet. *Pierre de Fermat (1605 ? - 1665)*

Stage ouvert aux élèves de terminale scientifique présentés au Concours général des lycées - 22 et 23 février 2016

« Il est évident que peu à peu les mathématiques révèlent des génies fondateurs dans pratiquement toutes les zones du monde. Mais, à chaque fois, leur œuvre est adoptée avec enthousiasme par la confrérie mondiale des mathématiciens, sans que des questions de langue et de culture interviennent de façon significative. Ainsi, on peut dire que oui, les mathématiques traversent de façon impérieuse et visible les particularités nationales sans jamais s'y enfermer, comme devraient le faire, et le feront, toutes les procédures de vérité… »

Alain BADIOU, *Éloge des mathématiques*, Flammarion 2015

La Pépinière académique de mathématique organise pour la dixième année, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

Les intervenants professeurs : Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Arthur LAURENT (Lycée Geoffroy Saint-Hilaire, ÉTAMPES), Jérémy LEGENDRE (Lycée Paul-Emile Victor, OSNY), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Alexandra VIALE (Lycée l'Essouriau, LES ULIS), Ernesto VIDAL (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE),

Professeurs accompagnants : Anne-Laure JOUBERT (Lycée Louis de Broglie, MARLY LE ROI), François REGUS (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC)

Emploi du temps

Lundi 22 février 2016

	Pontoise	Versailles 1	Versailles 2	Versailles 3
De 10 à 11	Film Le dernier théorème de Fermat (Réalisateur *Simon Singh*)			
De 11 à 12.40	Nombres EV+JL	Nombres AV+NF	Équations AC+PJ	Fonctions MA+MS
De 12.40 à 13.15	Repas	Repas		
De 13.15 à 14.50	Équations JL+CH	Fonctions MA+MS	Nombres AV+NF	Équations AC+PJ
De 14.55 à 16.30	Fonctions BB+CH	Équations AC+PJ	Fonctions MA+MS	Nombres AV+NF

Mardi 23 février 2016

Pontoise	
De 10 à 11	Fermat N = 2, 3, 4
De 11 à 12.40	Angles et distances RC
De 12.40 à 13.15	Repas
De 13.20 à 14.55	Suites KR+BB
De 14.55 à 16.30	Dénombrement CH+KR

<table>
<tr><th>Versailles</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>De 10 à 11.45</td><td>Angles et distances
MS+AL</td><td>Dénombrement
PJ+</td><td>Suites
SM+NF</td></tr>
<tr><td>De 11.45 à 12.20</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>De 12.20 à 14.00</td><td>Suites
SM+NF</td><td>Angles et distances
MS+AL</td><td>Dénombrement
PJ+</td></tr>
<tr><td>De 14.05 à 14.50/15.40</td><td colspan="2">Fermat N = 2, 3, 4</td><td>Angles et distances
MS+AL</td></tr>
<tr><td>De 15.45/14.55 à 16.30</td><td>Dénombrement
PJ+</td><td>Suites
SM+NF</td><td>Fermat
N = 2, 3, 4</td></tr>
</table>

Nombres

Exercice 1 Petits tableaux

1	8	7
9	2	4
6	5	3

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9, comme par exemple dans le tableau ci-contre.
A un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-contre) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple).
1. ***a***. Etant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.
b. Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Etant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

Exercice 2
Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'un entier naturel non nul k vérifie la condition C_n s'il existe $2k$ entiers naturels non nuls $a_1, b_1, \dots, a_k b_k$ tous distincts, tels que les sommes $a_1 + b_1, \dots, a_k+b_k$ soient deux à deux distinctes et strictement inférieures à n.
1. Montrer que si k vérifie la condition C_n, alors $k \leq \frac{2n-3}{5}$
2. Montrer que 5 vérifie la condition C_{14}.
3. On suppose que $\frac{2n-3}{5}$ est un entier. Montrer que $\frac{2n-3}{5}$ vérifie la condition C_n.

Exercice 3
Tout entier $n \geq 2$ admet une décomposition en produit de facteurs premiers : il existe un nombre entier k, des nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_k$tels que
$n = p_1{}^{a_1} \times p_2{}^{a_2} \times \dots \times p_k{}^{a_k}$
On associe à tout entier n le nombre $f(n) = a_1{}^{p_1} \times a_2{}^{p_2} \times \dots \times a_k{}^{p_k}$
On pose aussi $f(1) = 1$, ce qui permet de définir f sur $\mathbf{N}^*$.
On définit enfin les puissances de la fonction f : pour tout entier naturel n, $f^0(n) = n$, et pour tout entier i et tout entier n, $f^{i+1}(n) = f\left(f^i(n)\right)$.

1 .*a*. Calculer $f(128)$et $f(2\,016)$.
b. Déterminer les nombres $f^i(36^{36})$ pour les premières valeurs de i. Que dire des suivantes ?
2. *a.* Donner un exemple d'entier $n \geq 1$ tel que, pour tout entier naturel i, on ait :
$f^{i+2}(n) = f^i(n)$ et $f^{i+1}(n) \neq f^i(n)$
b. Montrer que la fonction f n'est ni croissante, ni décroissante.

3. Résoudre dans $\mathbf{N}^*$:
a. l'équation $f(n) = 1$;
b. l'équation $f(n) = 2$;
c. l'équation $f(n) = 4$.

4. *a.* Pour tous entiers $a \geq 2$ et $b \geq 0$, montrer que $ab \leq a^b$.
b. Soit $k \in \boldsymbol{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \dots, a_k$ et $b_1, b_2, \dots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geq 2$ et $b_i \geq 0$ pour tout i.
Montrer que :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leq a_1{}^{b_1} \times a_2{}^{b_2} \times \dots \times a_k{}^{b_k}$$

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f\big(f(n)\big) \leq n$.
d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un entier naturel r tel que, pour tout entier $i \geq r$, on ait $f^{i+2}(n) = f(n)$.

Exercice 4
Peut-on trouver des entiers premiers p et q et un entier non nul m tels que : $2^m p^2 + 1 = q^7$?

Exercice 5
Quel est le chiffre des unités du plus grand entier inférieur ou égal à $M = \frac{10^{2\,016}}{10^{63}+7}$?

Fonctions

Exercice 1

On appelle fonction de type T_0 toute fonction t définie sur [−1; 1] pour laquelle il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $t(x) = ax^2 + bx + c$.
On peut aussi dire « fonction trinôme sur [−1; 1] ».
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle fonction de type T_n toute fonction h pour laquelle il existe des fonctions f et g, de type T_{n-1} et un nombre réel r tels que $h = f + r|g|$.
1. Etablir que la fonction j définie par $j(x) = 0$ pour $x \in [-1, 0]$ et $j(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ est de type T_1.
2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = 0$ et $t_2(0) = 0$ et on définit la fonction f définie sur [−1; 1] par :
Pour tout réel $x \in [-1, 0]$ $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel $\in [0, 1]$ $f(x) = t_2(x)$.
Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N.

Exercice 2

Partie A Rappels et exploration

On appelle *Partie entière* du réel x l'unique entier relatif n vérifiant : $n \leq x < n + 1$. On note $E(x) = n$.
1. Tracer la représentation graphique de la fonction E sur $[-3;\ 3]$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(x + n) = E(x) + n$.
La propriété est-elle encore vraie si n est négatif ?
3. On considère la fonction D, définie sur $\mathbf{R}$ par $D(x) = x - E(x)$. On l'appelle fonction *mantisse* ou *partie décimale* (bien que $D(x)$ ne soit pas forcément un nombre décimal)
Démontrer que la fonction D est périodique et bornée sur $\mathbf{R}$.
4. On considère deux nombres réels p et q, non nuls, et un nombre entier relatif k. Résoudre, dans $\mathbf{R}$, l'équation $E\left(\frac{p}{q}x\right) = k$.

Partie B Applications

1. Trouver l'exposant de 2 et de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000! Par combien de zéros finit l'écriture décimale de 1000! ?
2. Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
— 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
— 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.
Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

Exercice 3 Identité peu remarquée

Trouver toutes les fonctions polynômes P à coefficients réels telles que pour tous réels a, b, c :

$$P(a+b-2c) + P(b+c-2a) + P(c+a-2b) = 3P(a-b) + 3P(b-c) + 3P(c-a)$$

Exercice 4 Une équation fonctionnelle

On se propose de trouver les fonctions f, fonctions de **N** dans **N,** telles que $f(1) > 0$ et que, pour tous entiers m et n : $f(m^2 + n^2) = \big(f(m)\big)^2 + \big(f(n)\big)^2$
1. Calculer des images des entiers compris entre 0 et 12
2. En toute généralité, calculer l'image $f(m)$d'un entier m quelconque.

Exercice 5

Soient $f$et g deux applications de **R** dans **R** continues telles que :
1. $fog = gof$
2. Pour tout réel x, $f(x) \neq g(s)$

Montrer que, pour tout réel $x, fof(x) \neq gog(x)$

Angles et distances

Exercice 1 Mise en jambes 1
Deux cordes d'un cercle ont pour longueurs respectives 24 et 32. La distance entre ces deux cordes est 14. Quelle est la longueur de la corde siuée à la distance 7 de chacune des deux ?

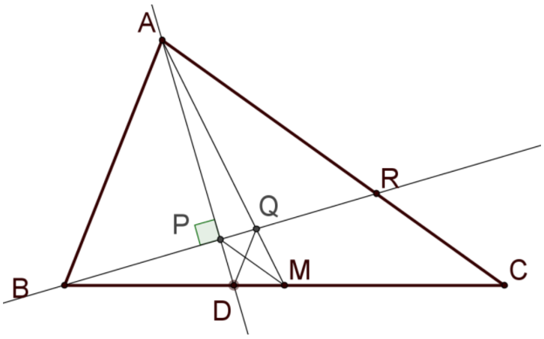
Exercice 2 Mise en jambes 2
On donne un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{50}$. Les points A et C sont deux points du cercle, le point B est un point intérieur au cercle. Le triangle ABC est rectangle en B, AB = 6 et BC = 2. Quelle est la distance OB ?

Exercice 3
Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :
1. Les arêtes AB, AC, AD sont deux à deux orthogonales ;
2. $\mathrm{AB} = 3 \; et \; \mathrm{CD} = \sqrt{2}$
Déterminer la valeur minimale de $\mathrm{BC}^6 + \mathrm{BD}^6 - \mathrm{AC}^6 - AD^6$.

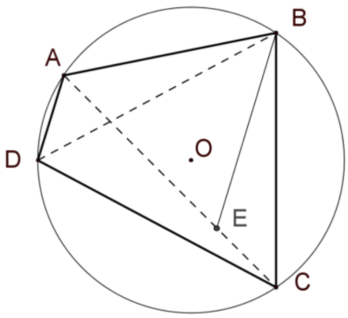
Exercice 4
Soit ABC un triangle. Si P est un point du plan, on note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB). Déterminer la position du point P pour laquelle la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$est minimale.

Exercice 5
Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$. Soit M le milieu de [BC] et D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ avec [BC]. La perpendiculaire abaissée de B sur (AD) coupe (AD) en P, (AM) en Q et (AC) en R.

Montrer que (DQ) est parallèle à (AB).

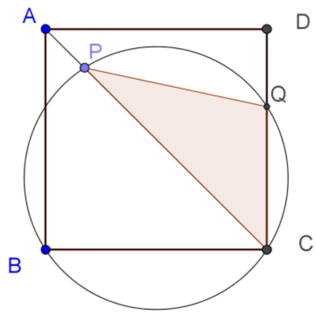


Exercice 6 Le théorème de Ptolémée



Un quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si $AC.BD = AB.CD + BC.DA$
On ne démontre que la condition nécessaire.
Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O. Soit E le point de la diagonale [AC] tel que $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{DBC}}$.
1. Montrer que les triangles ABE et DBC ont les mêmes angles. Ils sont *semblables*.
En déduire que $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DC}}$
2. Montrer que les triangles DAB et CEB sont semblables.
Conclure.

3. Soit ABCD un carré de côté 1. Soit P un point de [AC]. Le cercle circonscrit au triangle BPC recoupe (CD) en Q. On suppose que l'aire du triangle CPQ est $\frac{6}{25}$.
Combien vaut CQ ?



Suites

Exercice 1
$E(x)$ désigne, dans cet exercice, la partie entière du nombre réel x.

1. Soit x un nombre réel. La somme $\frac{E(x)+E(2x)+E(3x)+\cdots E((n-1)x)+E(nx)}{n^2}$ admet-elle une limite ?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
3. Montrer (1) que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(nx)$$

____

(1). On pourra poser la division euclidienne de $E(nx)$ par n.

Exercice 2
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0, réel positif, et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$

Exercice 3
Pour tout entier naturel k, on définit $c(k)$ comme le plus grand cube d'entier inférieur ou égal à k.
On définit la suite (a_n) par son premier terme $a_0 = p$ et la relation de récurrence : $a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n)$.
Cette suite est-elle bornée ?

Exercice 4
Une suite $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots$ de nombres naturels est définie par $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_n$désignant le chiffre des unités de a_n. Prouver qu'une telle suite contient une infinité de puissances de 2 si et seulement si a_1 n'est pas divisible par 5.

Exercice 5
Soit x un nombre complexe différent de 1 et tel que $x^{2\,016} = 1$. On suppose que x est tel que tous les termes de la somme S sont bien définis. Calculer la somme :

$$S = \frac{x^2}{x-1} + \frac{x^4}{x^2-1} + \cdots + \frac{x^{4\,030}}{x^{2\,015}-1}$$

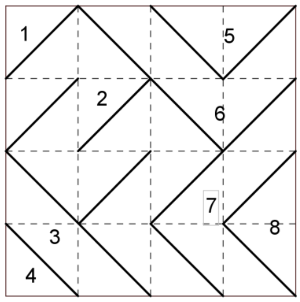
Dénombrements

Exercice 1 Étourdis ou méprisants ?
36 personnes participent à une réunion. Certaines se serrent la main (une seule fois). Chaque participant note le nombre de poignées de mains qu'il a échangées. Il apparaît que, lorsque deux participants ont salué le même nombre de personnes, ils ne se sont pas salués entre eux. Quel est le nombre maximum de poignées de mains ainsi échangées (dans le décompte une poignée de mains échangée entre deux personnes compte pour une, non pour deux) ?

Exercice 2 Loterie
On se donne un entier n et un polygone régulier à n côtés. On choisit au hasard (sans remise) trois sommets de ce polygone. Quelle est la probabilité de tirer un triangle isocèle ?

Exercice 3 Limitation d'effectifs
Dans une université, chaque étudiant est identifié par un numéro. Ce nombre est un entier inférieur ou égal à 60^{60}. Un moyen d'éviter les confusions a été trouvé : Aucun PGCD de deux numéros d'étudiants n'est un numéro d'étudiant. Combien l'université peut-elle compter d'étudiants, au maximum ?

Exercice 4 Régionnement
Dans chaque case d'un tableau carré $n \times n$, on trace une des diagonales. Ces diagonales déterminent dans le carré un certain nombre de régions (8 dans l'exemple ci-contre, avec un quadrillage 4x4).
Déterminer, en fonction de n, le nombre minimum et le nombre maximum de régions ainsi délimlitées.



Exercice 5 Problème de partage
Quatre enfants se sont assis à table et se sont servi la soupe : 1 louche pour Ali, 2 louches pour Ben, 4 louches pour Caro, 8 louches pour Dora. Le père arrive : « Ça ne va pas du tout ! » Dans le but de répartir équitablement le potage, il prend au hasard (hasard aidé par les enfants) deux assiettes, en mélange le contenu avant de le partager équitablement, et recommence avec deux assiettes, etc. Il réalise cette opération quatre fois. Quelle est la probabilité qu'à l'issue de ces manœuvres la répartition soit équitable ?

Équations

> *« Quando che'l cubo con le cose appresso*
> *Se agguaglia a qualche numero discreto*
> *Trovan dui altri differenti in esso.*
> *Dapoi terrai questo per consueto*
> *Che'l lor produtto sempre sia eguale*
> *Al terzo cubo delle cose note.*
> *... »* Niccolo Fontana, dit Tartaglia

Exercice 1 Équation du troisième degré On se donne deux réels p et q et on cherche à résoudre l'équation $x^3 + px = q$.

0. Montrer que toute équation polynôme du troisième degré peut être ramenée à cette forme au moyen d'un changement d'inconnue.

1. On pose $x = u + v$, en imposant à u et v la condition $uv = -\frac{p}{3}$. Écrire le système d'inconnue (u, v) correspondant au problème.

2. Le système $\begin{cases} U + V = q \\ UV = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$ admet-il des solutions réelles ? Des solutions non réelles ?

3. Comment passe-t-on de (U, V) aux solutions de $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$?

4. Résoudre l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$

Exercice 2 Une équation du quatrième degré

Soit à résoudre l'équation $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$.

1. Par quel changement d'inconnue se ramène-t-on à l'équation $z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = 0$?

2. On cherche y tel que l'équation précédente se simplifie en $(z^2 + y)^2 = \left(A(z)\right)^2$. Montrer qu'un tel y est solution de $2y^3 + 3y^2 + 4y - 3 = 0$. Cette équation a-t-elle une solution réelle ? (On n'est pas obligé de la résoudre avec la méthode de l'exercice 1 pour le savoir).

3. Résoudre finalement l'équation initiale.

Exercice 3 Un peu de trigonométrie

On donne un nombre réel p. Discuter selon p le nombre de solutions de l'équation $\sqrt{1 - \sin^2 x} + \sin x = p$

Exercice 4 Racines communes

On considère trois nombres réels a, b et c vérifiant :

1. $c \neq 1$
2. Les équations $x^2 + ax + 1 = 0$ et $x^2 + bx + c = 0$ ont une racine commune ;
3. Les équations $x^2 + x + a = 0$ et $x^2 + cx + b = 0$ ont une racine commune.

Combien vaut $a + b + c$?

Exercice 5 Quel mélange !

On suppose que le système d'équations $\begin{cases} x^3 - 5xy^2 = 21 \\ y^3 - 5x^2y = 28 \end{cases}$ admet au moins trois couples solutions distincts, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Combien vaut $M = \left(11 - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(11 - \frac{x_2}{y_2}\right)\left(11 - \frac{x_3}{y_3}\right)$?