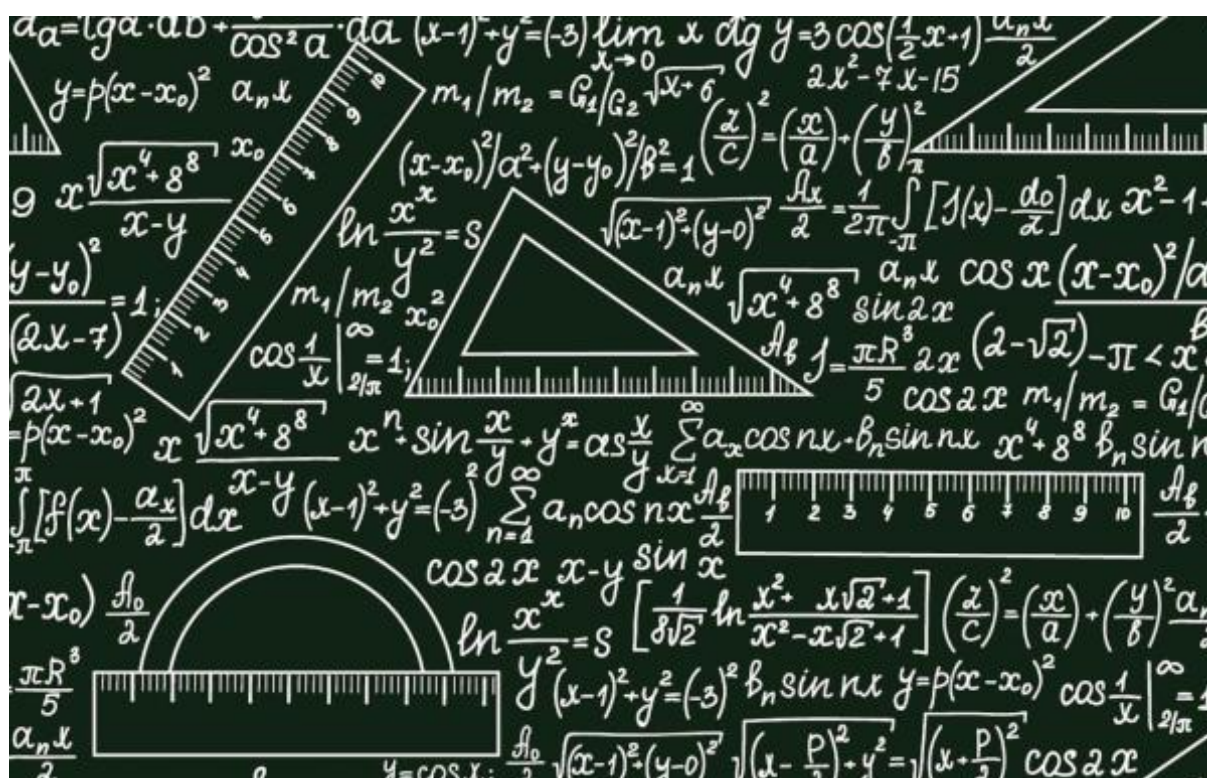


Pépinière de mathématiques

Classe de quatrième

Livret d'exercices

Mercredi 12 juin 2024



Nicolas Blanc
Sacha Dhéin
Kuider Ksori
Mireia Requena
Nicolas Segarra
Andréa Torrijos

Exercice 1

LA TABLETTE DE CHOCOLAT



Léa a acheté une tablette de chocolat de 224g qu'elle décide de manger sur plusieurs jours de la façon suivante :

- Le 1^{er} jour, elle coupe la tablette en deux parts égales. Elle mange une des deux parts et range l'autre.
- Le 2^e jour, elle recommence de façon semblable à la veille. Elle mange la moitié de ce qu'il lui restait et range l'autre part.
- Et ainsi de suite les jours suivants ...

POUR LES PETITES FAIMS

QUESTION 1 : Quelle proportion de la tablette initiale aura-t-elle mangé au bout d'une semaine ?



QUESTION 2 : A vrai dire, il y a eu un jour en fin de semaine, où Léa a préféré se préparer un chocolat chaud plutôt que de manger le morceau du jour. Elle se souvient d'une chose, ce dernier pesait entre 10g et 15g. Quel jour était-ce ?



POUR LES PLUS GOURMANDS

QUESTION 1 : Quelle proportion de la tablette initiale lui reste-t-il au bout d'une semaine ?



QUESTION 2 : Quelle masse de chocolat lui reste-t-il après une semaine ?



QUESTION 3 : Léa affirme qu'après 7 jours il lui restera moins d'1% de la tablette. A-t-elle raison ?



Exercice 2

Autour de la cryptographie

Le but de cette activité est de présenter des méthodes pour « coder » des informations, c'est-à-dire pour les transformer de façon à les rendre incompréhensibles par un lecteur qui ne connaît pas la méthode pour « décoder » l'information.

On parlera de « méthode de chiffrement » pour présenter des façons de coder des informations, puis de « méthode de déchiffrement » pour la méthode pour décoder l'information.

1. Chiffrement de César¹

Il s'agit ici de transformer le message en décalant chaque lettre.

Par exemple, avec un décalage de 3, le *A* devient *D*, le *B* devient *E*, le *C* devient *F*, etc...

Dans ce cas, le tableau de correspondances des lettres est le suivant :

Lettre de départ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Lettre décalée	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Le mot « ETE » est donc codé « HWH ».

1. Coder la phrase : « RENDEZ-VOUS AU QG »
2. Décoder le message : « ERQMRXU! »
3. Un décalage de César admet un paramètre de chiffrement : le décalage, noté d . Dans l'exemple précédent, le décalage est $d = 3$. Compléter le tableau suivant pour déchiffrer le message :

KPMMPJPSL KL JOPMMYLY

sachant que celui-ci a été chiffré grâce à un chiffrement de César de décalage $d = 7$.

Lettre de départ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Lettre décalée																										

4. On considère le message suivant, qui a été chiffré par la méthode de César, mais on ne connaît pas le décalage.

QJ XJHWJY IJ Q'JYJWSNYJ

Déchiffrer le message. Un indice : en français, la lettre la plus utilisée est le E (plus de 10 %!).

On pourra s'aider du tableau suivant, à compléter :

Lettre de départ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Lettre décalée																										

5. Combien y a-t-il de chiffrements de César différents ? Expliquer pourquoi ce chiffrement n'a finalement pas été conservé à travers l'histoire. Donner une stratégie pour déchiffrer un message chiffré par la méthode de César pour un décalage d que l'on ne connaît pas.

1. On attribue la méthode que l'on présente dans cette première partie à Jules César, qui s'en servait pour chiffrer des messages militaires.

2. Une méthode de partage de clef (multiplicative)

On a vu, pour la partie précédente, une méthode pour déchiffrer un message dans tous les cas. La difficulté réside dans la connaissance de la clef. Si on la connaît, la méthode de déchiffrement est rapide. Si on ne la connaît pas, alors on cherche la clef avant de pouvoir déchiffrer.

Dans cette partie, on propose une méthode pour partager une clef, qui se base sur la situation suivante : Nicolas et Sacha discutent sur un canal de discussion. Ce canal est non sécurisé, cela signifie que vous avez accès à la discussion ci-contre, sous forme de captures d'écran de leur discussion sur WhatsApp.

Nicolas et Sacha cherchent à se mettre d'accord sur une clef de chiffrement (donc un nombre) et savent qu'ils sont peut-être écoutés. Alors, ils essaient de construire la clef en effectuant des multiplications (en espérant que ça soit plus difficile que les additions de la partie précédente!).

Déterminer la clef de chiffrement utilisée par Nicolas et Sacha.

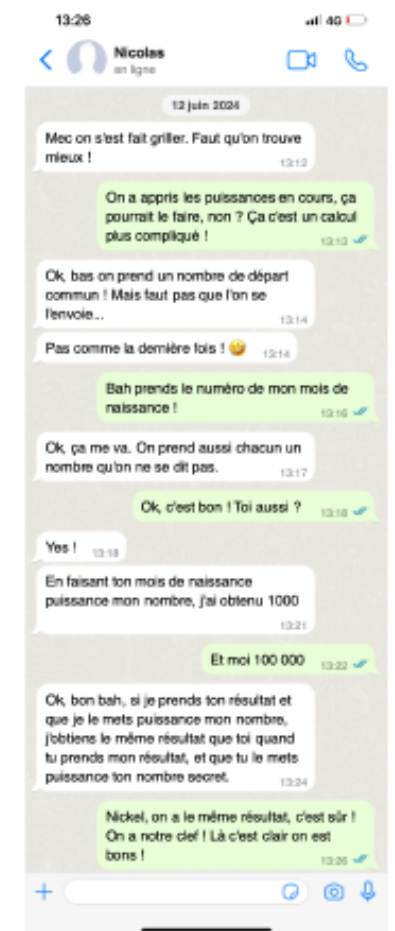


Pour vérifier : La clef de chiffrement dans la partie 1 est un nombre compris entre 0 et 25, on propose donc d'effectuer la division euclidienne par 26 du résultat trouvé. Le reste de cette division euclidienne donne un nombre d . Utiliser ce décalage d pour vérifier que le résultat est correct, en déchiffrant le message suivant, qui a été chiffré par la méthode de César avec un décalage d : YSYFW!

3. Une méthode de partage de clef (avec des puissances)

La méthode précédente, à base de multiplications, pouvant être déchiffrée, on propose d'utiliser une opération plus difficile : la puissance. Nicolas et Sacha tentent de partager un nombre commun selon le procédé qu'ils se décrivent par WhatsApp :

1. Quel est le mois de naissance de Sacha ?
2. En déduire la clef commune.
3. Si Sacha avait obtenu 32 et Nicolas 8, quelle serait la clef commune ?
4. Si Sacha avait obtenu 289 et Nicolas 4 913, quelle serait la clef commune ?



Exercice 3

Satellites et Orbites

Dans cet exercice, nous allons explorer le mouvement de quatre satellites, chacun en orbite autour d'un des objets célestes suivants: la Terre, la Lune, Mars et Jupiter.

Au cours de leur voyage, ces satellites rencontrent un obstacle imprévu sur leur trajectoire et doivent ajuster leur altitude de $\frac{3}{4}$ km (environ 1 km) en s'éloignant de leur objet céleste pour éviter une collision. Ils continueront ensuite leur orbite à cette nouvelle altitude.

Commençons par comparer les dimensions des différents objets célestes impliqués.

- (a) Quel est le rapport entre le rayon de Jupiter et celui de la Terre ?
(b) Quel est le rapport entre le rayon de la Terre et celui de Mars ?
(c) Quel est le rapport entre le rayon de Mars et celui de la Lune ?
- On estime que les satellites ont une orbite circulaire et qu'ils sont situés à une altitude de 36 000 km de la surface de l'objet céleste.

De combien augmente la longueur des orbites de chacun des satellites après l'ajustement de leur altitude. Quelle conjecture peut-on faire ?

Idée : Vous pouvez travailler avec d'autres élèves afin de vous partager le travail.

Voici 3 indices à scanner si besoin.



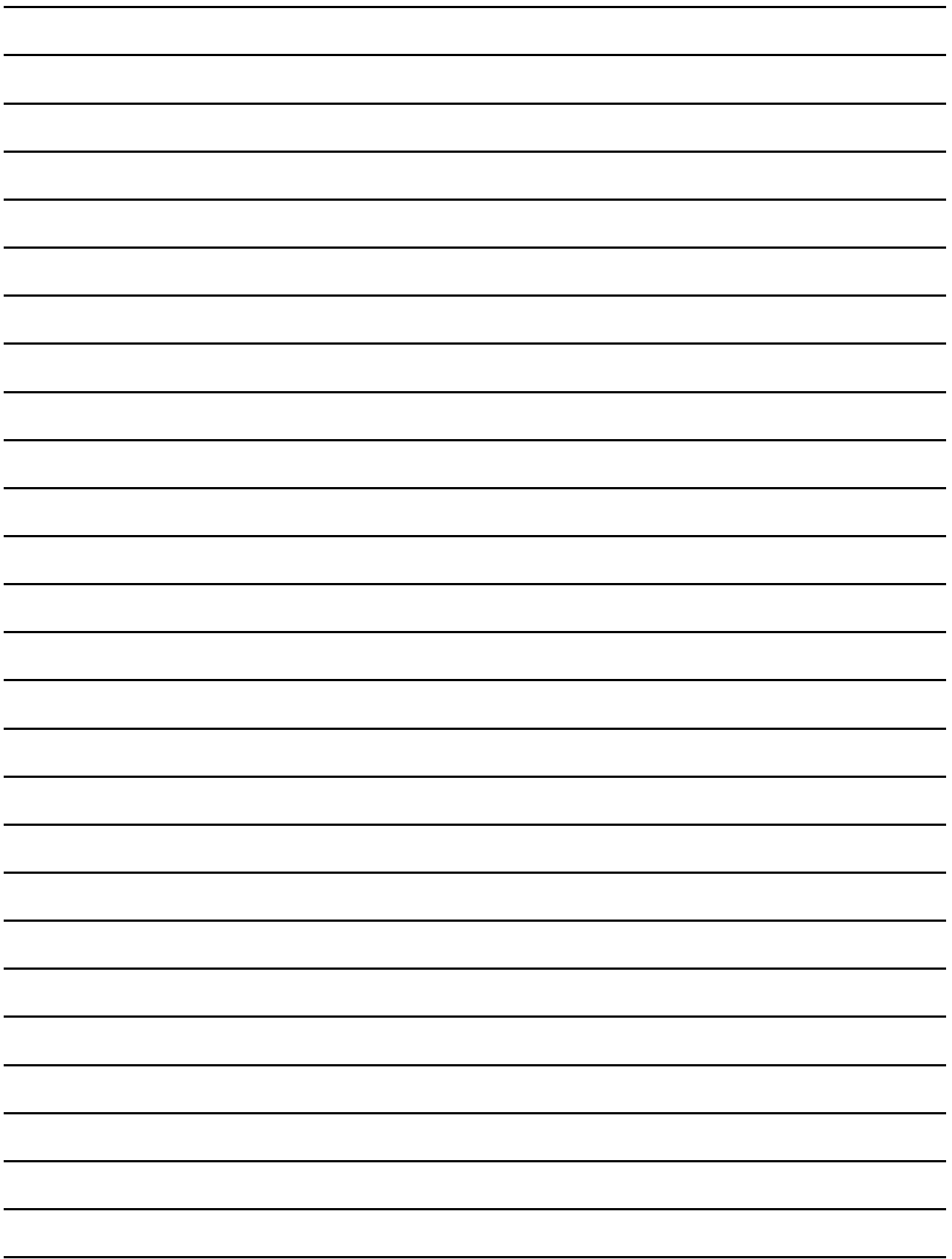
- Montrez que l'augmentation du périmètre d'un cercle, pour une augmentation donnée du rayon, est la même quelle que soit la longueur initiale du rayon du cercle.

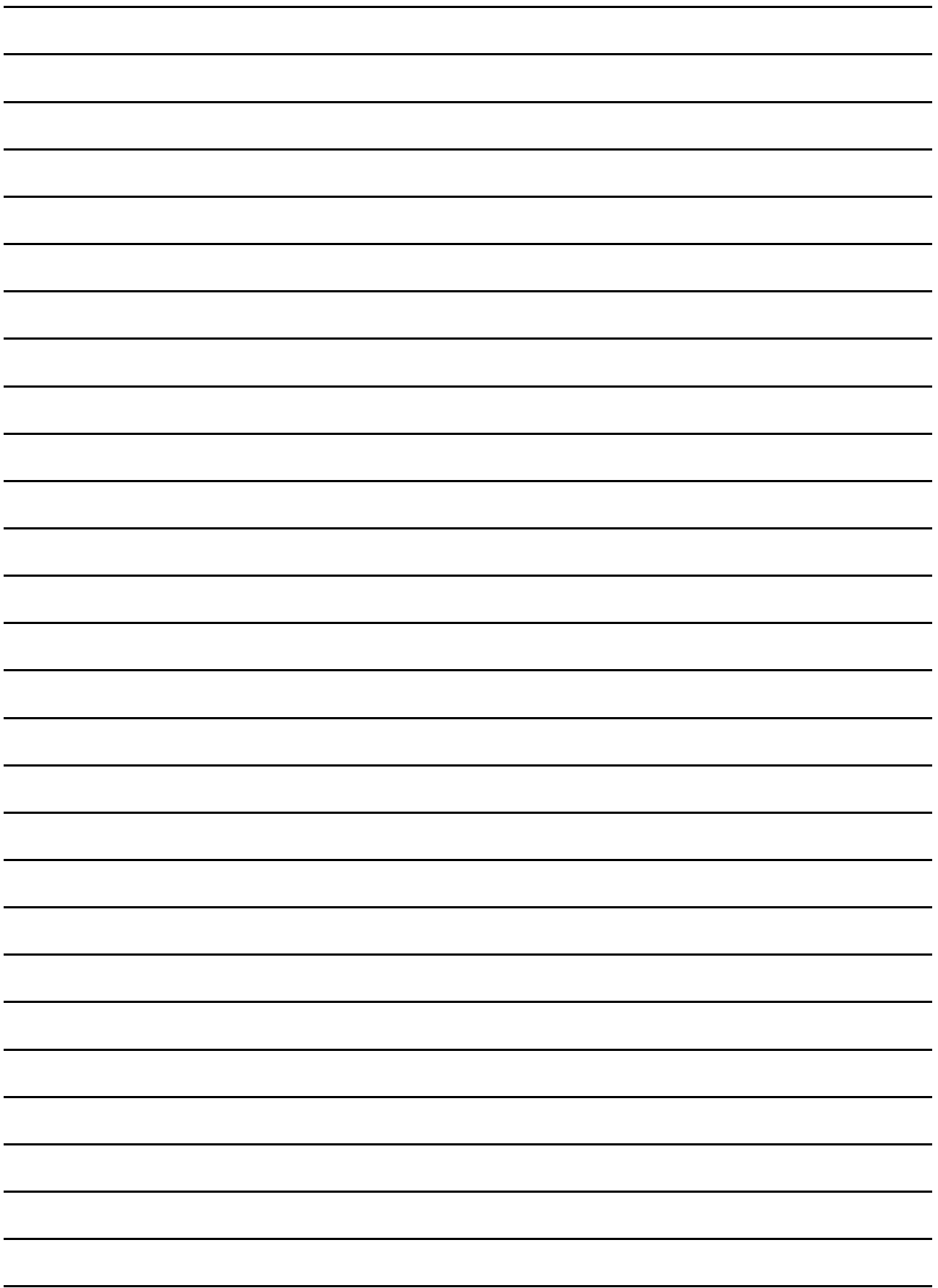
Vocabulaire :

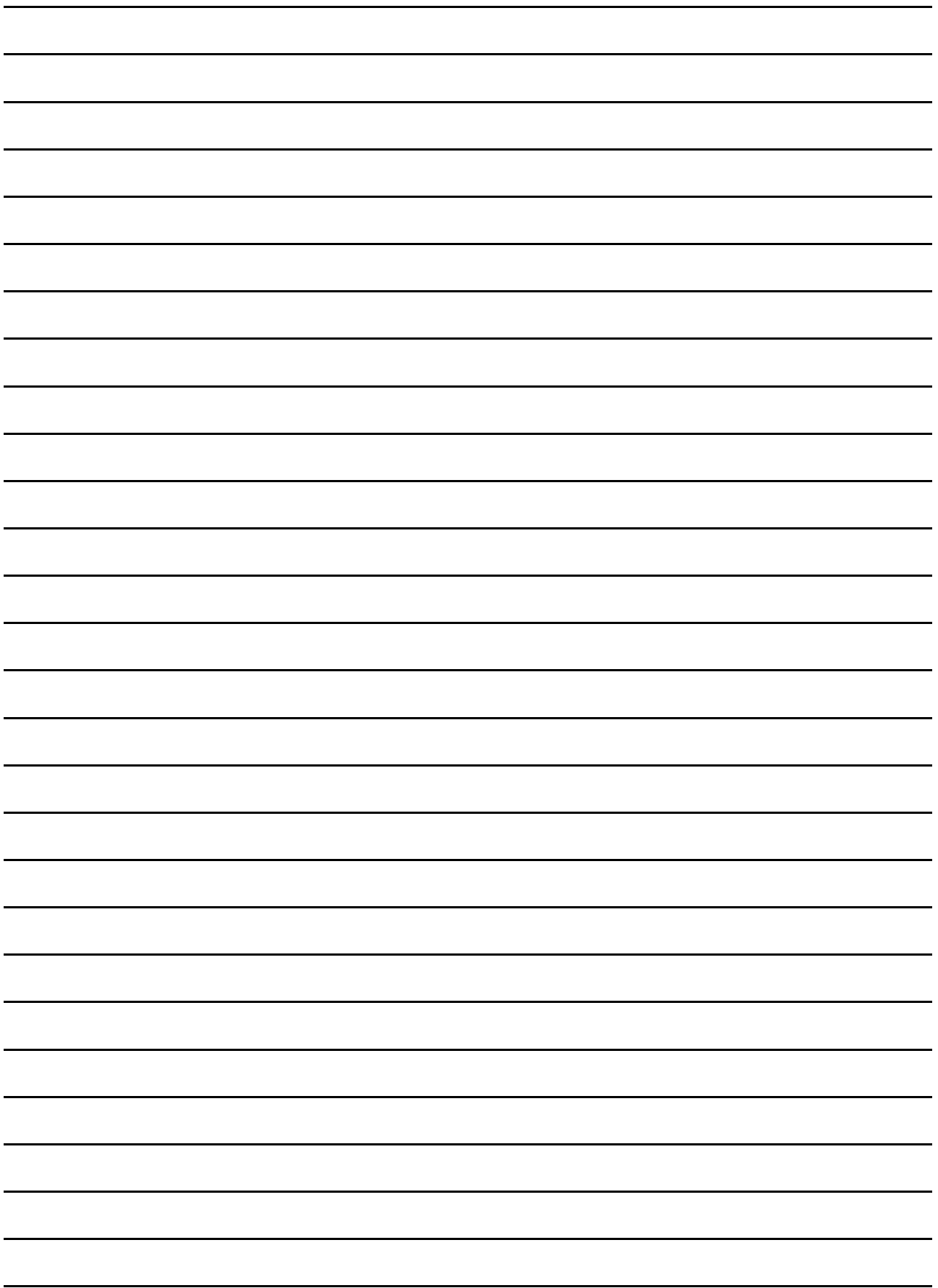
- Orbite :** Une orbite est le chemin circulaire ou elliptique que prend un objet lorsqu'il tourne autour d'un autre objet sous l'effet de la gravité. Par exemple, la Lune tourne autour de la Terre sur son orbite parce que la gravité de la Terre l'attire. De même, la Terre suit une orbite autour du Soleil. La longueur d'une orbite est la distance parcourue par l'objet en orbite autour d'un autre objet.
- Satellite :** Un satellite est un objet qui tourne autour d'un corps plus grand en suivant une trajectoire appelée orbite. Les satellites sont de deux types : naturels (la lune qui orbite autour de la terre par exemple) ou artificiels.
- Conjecture :** Une conjecture est une proposition qu'on pense être vraie, mais qui n'a pas encore été prouvée. C'est une supposition basée sur des observations, mais qui nécessite encore d'être démontrée pour être acceptée comme vraie de manière générale. En mathématiques, les conjectures sont testées et explorées afin de découvrir si elles sont effectivement vraies.

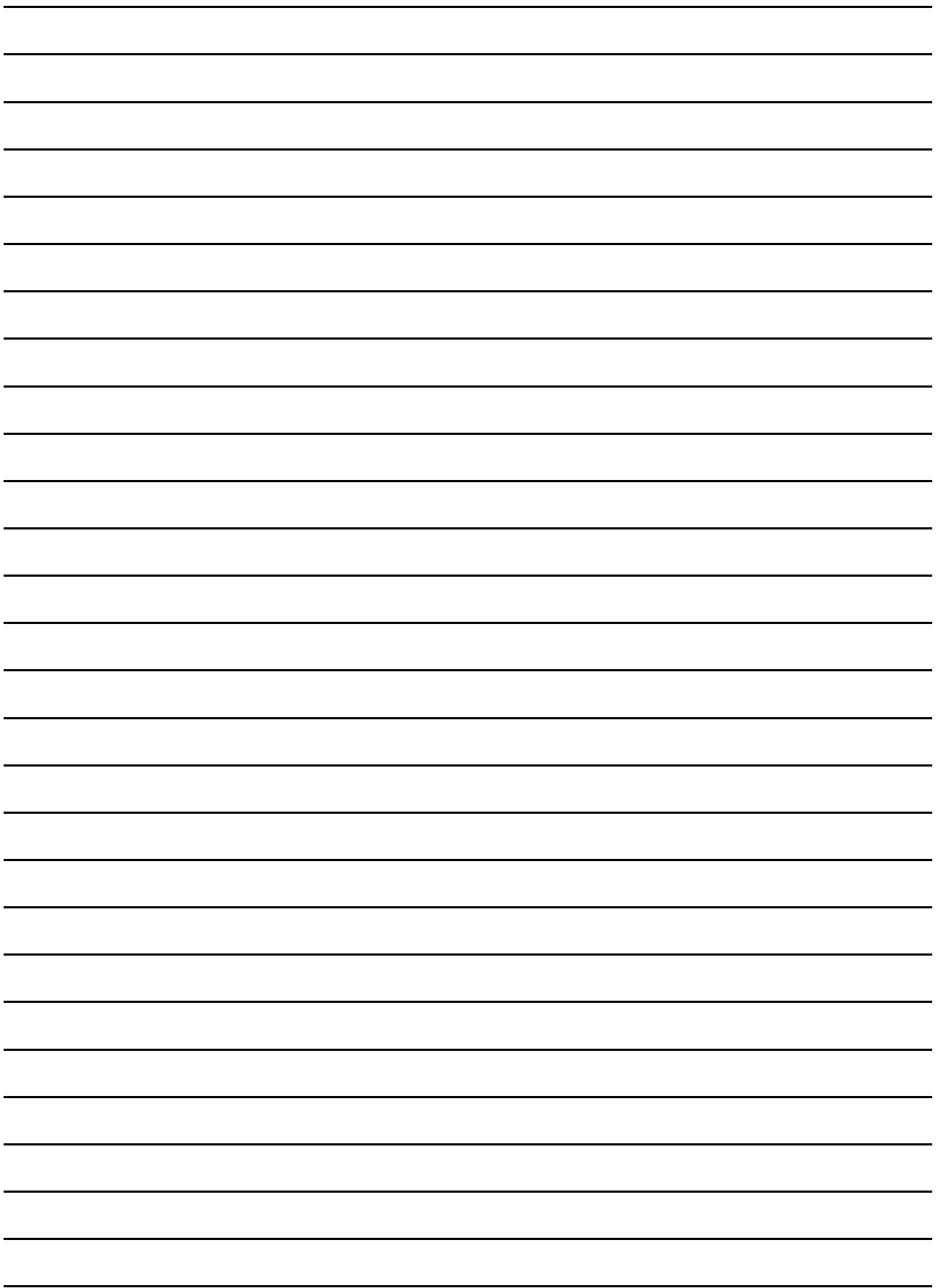
Données :

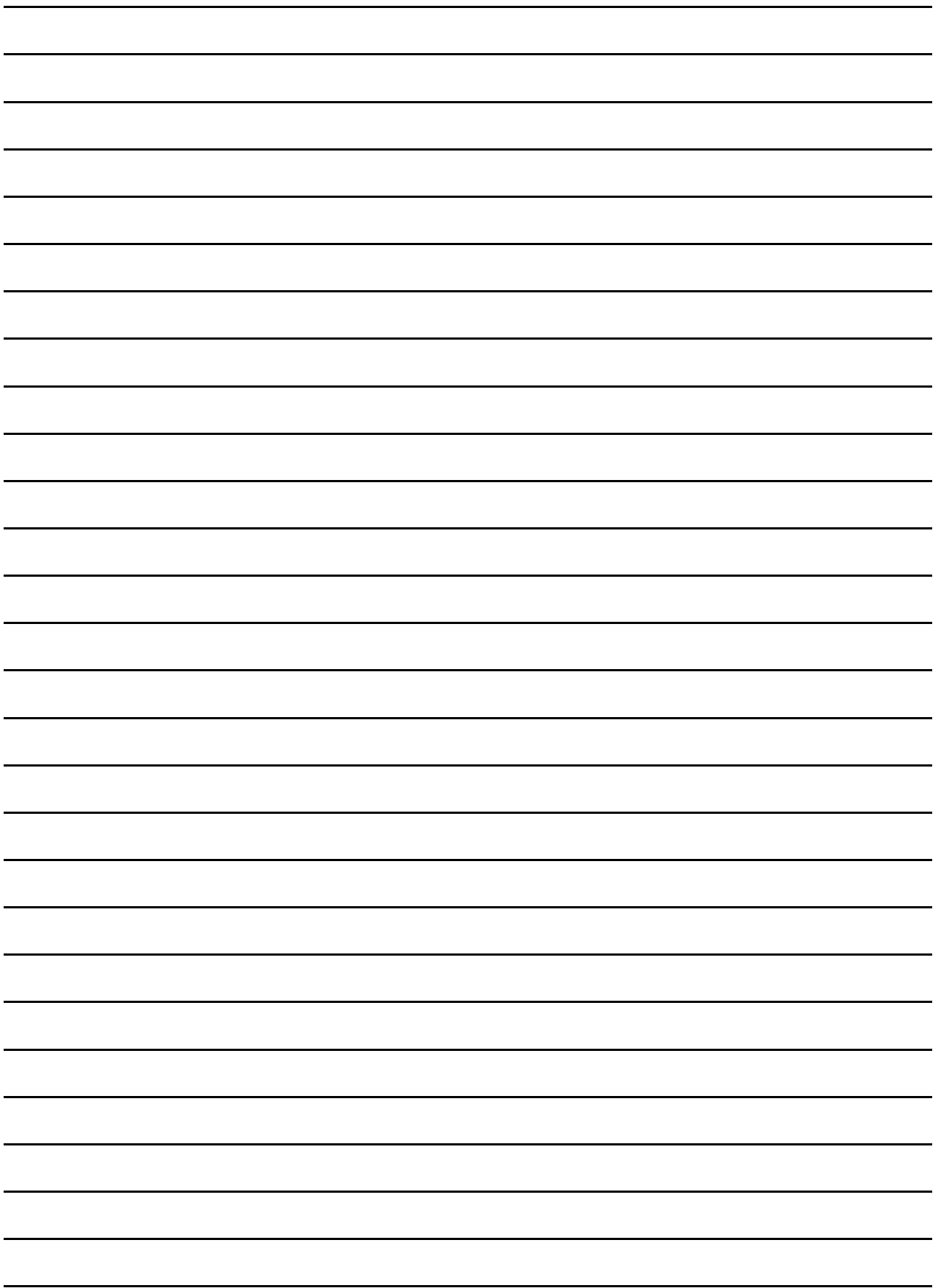
Rayon moyen de la Terre : 6 371 km
Rayon moyen de la Lune : 1737 km
Rayon moyen de Mars : 3 390 km
Rayon moyen de Jupiter : 69 911 km











Bravo et merci pour votre participation !