Préparation au concours général de mathématiques

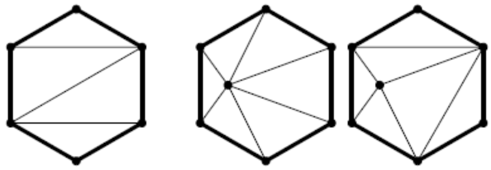
Année 2021-2022
Fiche numéro 1

Exercice 1 Triangulation

Une *triangulation* d'un polygone régulier est un partage de l'intérieur de ce polygone en triangles. Chaque sommet de chaque triangle est alors soit un sommet du polygone soit un point à l'intérieur du polygone.
On considère un polygone régulier ayant n sommets ($n \geq 3$) et k points en son intérieur (sans que trois de ces $n + k$ points soient alignés).
On suppose que :

- Le seul point commun à deux segments dont les extrémités sont deux de ces $n + k$ points est l'une des extrémités de ces segments.
- Chaque point intérieur au polygone est le sommet d'au moins un triangle.

On admet que toutes les triangulations possibles d'un polygone régulier ayant n sommets avec k points intérieurs produisent le même nombre de triangles, nombre qu'on note $T(n, k)$.
Par exemple, pour $n = 6$, on obtient 4 triangulations si $k = 0$ et 6 triangulations si $k = 1$ (figures ci-dessous)



$T(6,0) = 4$ $T(6,1) = 6$

a. Déterminer $T(3,2)$ puis $T(4,100)$.
b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $T(n, n) = 2020$.

Exercice 2 Fonctions compatibles

On dit que deux fonctions f et g de **R** dans **R** sont compatibles lorsque :

(i) Pour tous réels x et y, $f(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
(ii) Pour tous réels x et y, $g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$
(iii) Il existe un réel x, $f(x) \neq 0$.

Soit f et g deux fonctions compatibles.

1. Déterminer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Soit h la fonction définie par, pour tout réel x, $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$.
   Montrer que pour tout réel x, $h(x)h(-x) = 1$.
3. On suppose que, pour tout réel x, $-10 \leq f(x) \leq 10$ et $-10 \leq g(x) \leq 10$.
   a. Montrer que pour tout réel $x, h(x) \leq 200$.
   b. Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x, $h(2^n x) = \left(h(x)\right)^{2^n}$
   c. En déduire que $h(2\,022) = 1$.

Exercice 3 Équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que pour tous réels x et y,

$$f\big(f(x + y) - f(x - y)\big) = y^2 f(x). \qquad (E(x, y))$$

On pourra commencer par montrer qu'une telle fonction est paire.

Exercice 4 Sommes et produits

Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) tels que $\begin{cases} a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{cases}$.

On pourra poser $s = a + b + c$, $t = ab + bc + ca$, $p = abc$.

Exercice 5 À la recherche de nombres premiers

Existe-t-il des entiers naturels n tels que le nombre $N = 8^n + 47$ soit un nombre premier ?
On pourra s'aider de congruences