ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Préparation au concours général de mathématiques

Année 2021-2022
Fiche numéro 2

Exercice 1

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1))(a^4+1)\dots)(a^{2^{n-1}}+1)$
b. En déduire que pour tout entier $n > 1$ et pour tout entier a impair, $a^{2^n} - 1$ est un multiple de 2^{n+2}
c. Montrer qu'un entier, $n > 1$, est impair si et seulement si n divise $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul, on appelle index d'abondance le nombre $I_n = \frac{S(n)}{n}$, où $S(n)$ est la somme de tous les diviseurs positifs de n, y compris 1 et n.

a. Démontrer que pour tout nombre premier p, $I_p \leq \frac{3}{2}$.
b. Démontrer que pour tout nombre premier impair p et pour tout entier strictement positif k, $I(p^k) < 2$.
c. Soit p et q deux nombres premiers distincts et soit a et b deux entiers positifs.
Démontrer que $I(p^a)I(q^b) = I(p^a q^b)$.
d. Déterminer le plus petit entier impair positif n tel que $I(n) > 2$.

Exercice 3 (Olympiades Internationales 2006)

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : (i) $\widehat{\mathrm{PBA}} + \widehat{\mathrm{PCA}} = \widehat{\mathrm{PBC}} + \widehat{\mathrm{PCB}}$.
Montrer que $\mathrm{AP} \geq \mathrm{AI}$ et que l'égalité n'est vérifiée que lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{I}$.
(on pourra s'appuyer sur :

- le théorème dit de l'angle inscrit : la mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc ;
- son corollaire : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont sur un cercle et du même côté de la droite (AB) alors $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ADC}}$;
- sa réciproque : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont tels que $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ADC}}$ alors les quatre points sont cocycliques et les points C et D sont du même côté de la droite (AB).

Exercice 4 (Olympiades internationales 2008)

1. Montrer que pour tous nombres réels x, y et z différents de 1 et tels que $xyz = 1$, on a :
$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de triplets (x, y, z) de nombres rationnels différents de 1 et tels que $xyz = 1$ pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Exercice 5

1. Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs tels que : $a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 2$. (R)
Déterminer la valeur de $a + b + c$.
2. Soit x, y et z trois nombres rationnels deux à deux distincts.
Montrer que $\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$ est le carré d'un nombre rationnel.