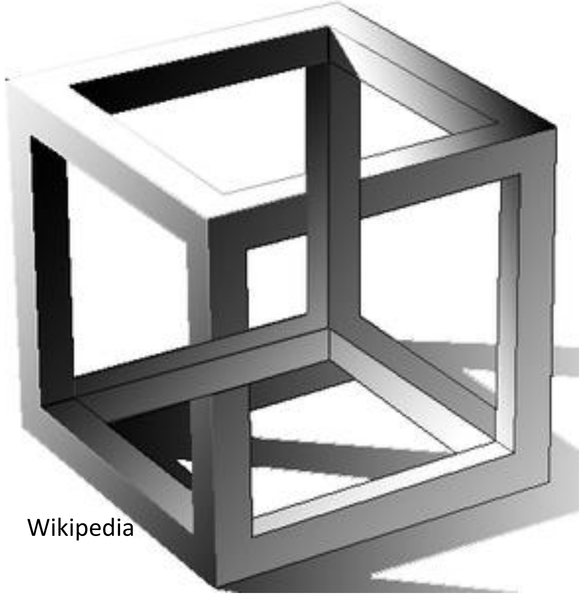


Paradoxes?

Opinion contraire aux vues communément admises.

Être, chose ou fait qui paraissent défier la règle admise parce qu'ils présentent des aspects contradictoires.

L'opinion se trompe parfois

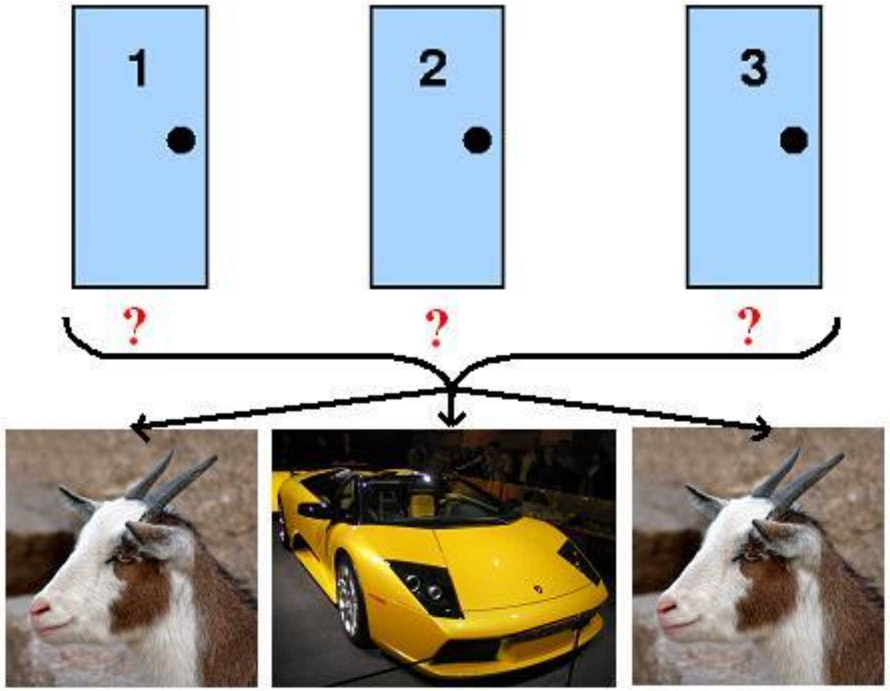
Dans notre établissement, les étudiantes réussissent moins bien que les étudiants. Nous avons deux cours, A et B, dont voici les résultats

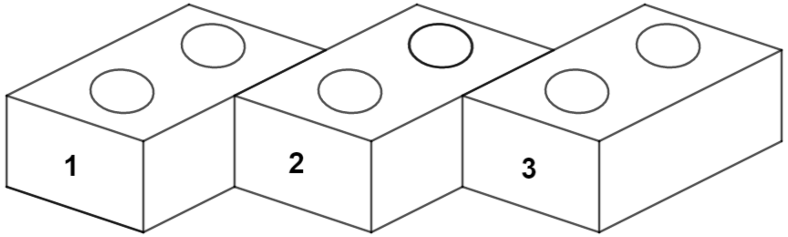
Cours A				Cours B			
	Effectif	Reçus	%		Effectif	Reçus	%
Femmes	142	56	39,4	Femmes	347	274	79
Hommes	54	22	40,7	Hommes	109	87	79,8

Le taux de réussite des femmes est 330/489 soit 67,5%, celui des hommes 109/163 soit 66,9%

Le jeu de Monty Hall

… à l’origine le paradoxe des boîtes de Bertrand





Trois boîtes contiennent l’une deux pièces d’or, la deuxième une pièce d’or et une pièce d’argent, la troisième deux pièces d’argent. Vous choisissez une boîte et une pièce. Si cette pièce est en or, vous pouvez parier sur le métal dont est faite l’autre pièce contenue dans cette boîte. Quel pari faites-vous?

Où on se trompe de calcul

1. Jouons à la marchande

Deux fermières vendent des pommes au marché le samedi. Chacune des deux a 30 kg de pommes à vendre. La première les vend 5€ les 2 kg, la seconde 5€ les 3 kg. Tout est vendu. Le dimanche, elles s'associent pour aller plus vite et vendent leurs 60 kg de pommes 10€ les 5 kg. Au lieu des 125€ attendus, elles ne récupèrent que 120 €...

2. Un classique de comptoir

Trois amis prennent un café. L'addition se monte à 30€ (les croissants…). Le cafetier leur fait une remise de 5€ ; chacun prend un euro et on donne 2€ au serveur. Ils ont donc payé 3x9=27€, plus 2 au serveur. Cela fait 29…

Problèmes de définition (1)

1. Que dire de $\mathbf{1-1+1-1+\cdots-1+1-\cdots}$?

Si cette somme a une valeur, disons S, alors on a :

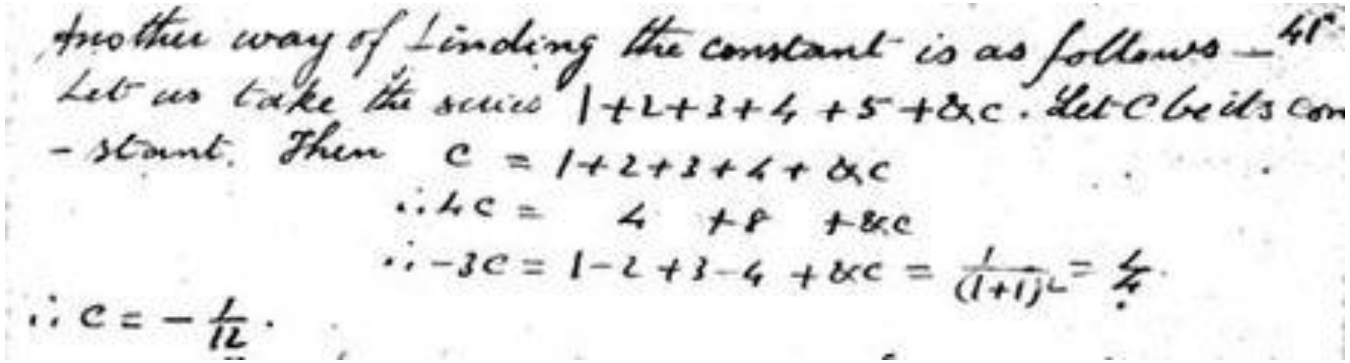
$$S=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0$$

Mais aussi $S=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots=1$

Ou encore $S=1-(1-1+1-1+\cdots)$ et de $S=1-S$ vient $S=\frac{1}{2}$

2. Comment expliquer

$\underline{\mathbf{1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}}}$**?**

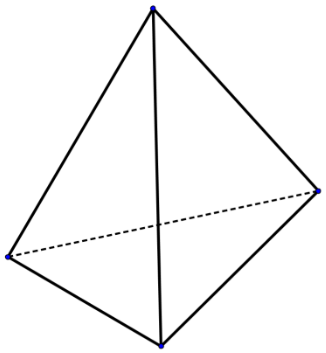


Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its con-
-stant. Then $C = 1+2+3+4+\&c$
$\therefore 4C = \quad 4 \quad +8 \quad +\&c$
$\therefore -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$
$\therefore C = -\frac{1}{12}$.

Problèmes de définition (2)

Il semble bien que le nombre de sommets, S, le nombre d’arêtes, a, et le nombre de faces f d’un polyèdre soient liés par la relation $S - a + f = 2$. Et cependant…

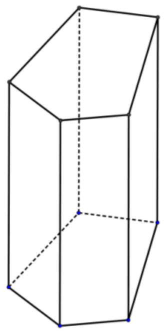
Tétraèdre



4 sommets
6 arêtes
4 faces

S –a + f =2

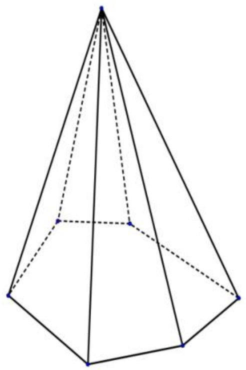
Prisme à base pentagonale



10 sommets
15 arêtes
7 faces

S –a + f =2

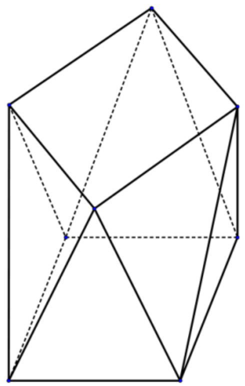
Pyramide à base hexagonale



7 sommets
12 arêtes
7 faces

S –a + f =2

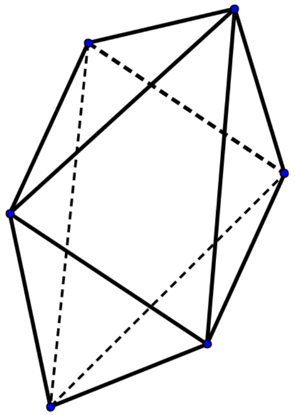
Antiprisme à base carrée



8 sommets
16 arêtes
10 faces

S –a + f =2

Octaèdre régulier

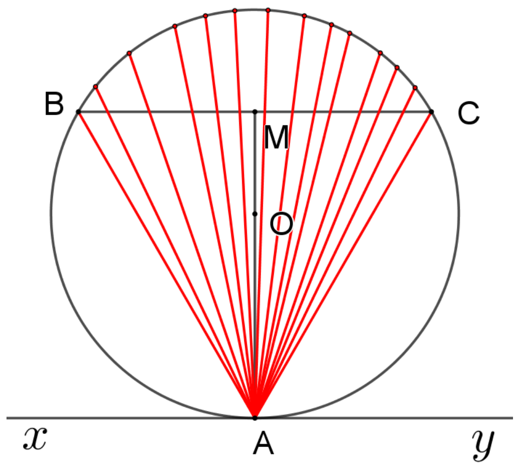
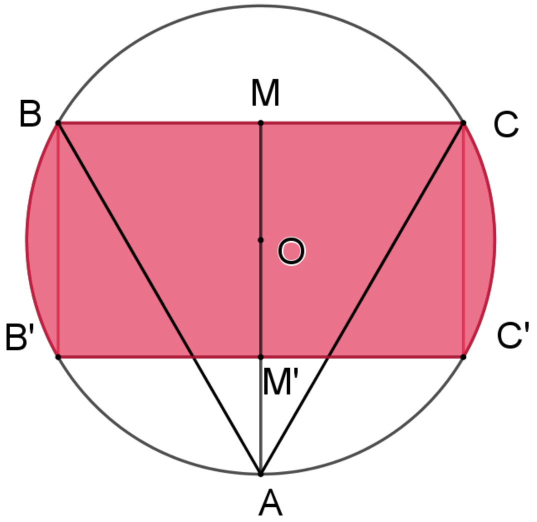
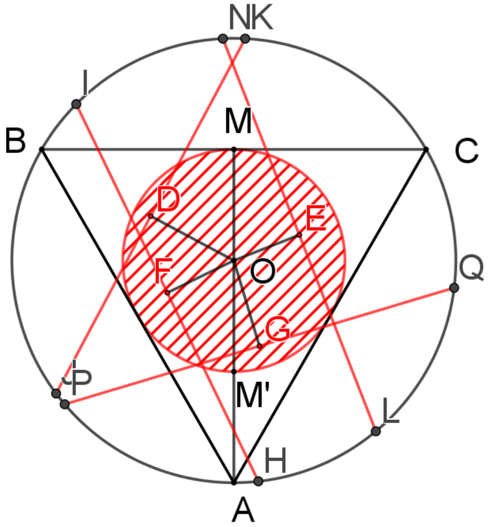


6 sommets
12 arêtes
8 faces

S –a + f =2

Problèmes de définition (3)

« Le » paradoxe de J. Bertrand (1822 – 1900)

		
Les cordes de longueur supérieure à la longueur du côté du triangle équilatéral occupent un angle de 60° sur les 180° possibles… $P = 1/3$	Les cordes de longueur supérieure à BC (et à B'C') coupent le diamètre du cercle sur la moitié de sa longueur… $P = 1/2$	Toute corde est déterminée par son milieu. Celui de celles dont la longueur est supérieure au côté est un point du disque de rayon moitié du cercle initial… $P = 1/4$

L’interdit de l’autoréférence

Ce qui est écrit au verso de cette carte est vrai

Ce qui est écrit au recto de cette carte est faux

Les paradoxes du type « menteur » (Epiménide) ont leur source dans l’autoréférence.
Le paradoxe du barbier: « Le suis barbier et je peux me vanter de raser tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes. Mais alors, qui me rase? » illustre l’interdit pour les affirmations mathématiques de porter sur elles-mêmes.

Expression mathématique correspondante :
[il n’existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$]()

« Les maths, c'est du français ! »

Supposons que chaque nombre entier puisse être défini par une phrase rédigée en français. On peut alors considérer l'ensemble des entiers qui ne peuvent pas être définis en moins de vingt mots. Cet ensemble d'entiers admet un plus petit élément. Ce nombre est alors : **le plus petit entier qui ne peut être défini en moins de vingt mots**. Seulement voilà, la phrase qui le définit ne compte que quatorze mots. *Paradoxe dit de Berry, publié par Bertrand Russell* (1872 – 1970)

« Ils [certains logiciens] ont eux-mêmes tendu le piège dans lequel ils se sont amusés à tomber, et même ils ont été obligés de bien faire attention pour ne pas tomber à côté du piège » Henri POINCARÉ

Le paradoxe de Jules Richard (1862 – 1956)

Dans une correspondance à la *Revue générale des sciences (1905)*, Jules Richard, professeur au lycée de Dijon, montre – ici en utilisant un procédé diagonal – que les langues sont impropres à un usage mathématique

§ 1. — Mathématiques

Les principes des Mathématiques et le problème des ensembles. — Nous avons reçu de M. J. Richard, professeur au Lycée de Dijon, la lettre suivante :

« Dans son numéro du 30 mars 1905, la *Revue* signale certaines contradictions qu'on rencontre dans la théorie générale des ensembles.

« Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la théorie des nombres ordinaux pour trouver de telles contradictions. En voici une qui s'offre dès l'étude du continu, et à laquelle plusieurs autres se ramèneraient probablement :

« Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble E, à l'aide des considérations suivantes :

« Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite, tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux quatre à quatre, etc. Ces arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements avec répétition.

« Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation.

« La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

« Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

« On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, *tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.*

« Donc : Tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

« Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

« Soit p, la $n^{\text{ième}}$ décimale du $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{\text{ième}}$ décimale $p+1$, si p n'est égal ni à 8 ni à 9, et l'unité dans le cas contraire ». Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E, son $n^{\text{ième}}$ chiffre serait le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas.

« Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets.

« Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est-à-dire par un nombre fini de mots; il devrait donc appartenir à l'ensemble E. Or, on a vu qu'il n'y appartient pas.

« Telle est la contradiction.

« Montrons que cette contradiction n'est qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arrangements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement défini, et celui-ci ne l'est que par un nombre infini de mots. *Il n'y a donc pas contradiction.*

« On peut encore remarquer ceci : L'ensemble de l'ensemble E et du nombre N forme un autre ensemble. Le second ensemble est dénombrable. Le nombre N peut être intercalé à un certain rang k dans l'ensemble E, en reculant d'un rang tous les autres nombres de rang supérieur à k. Continuons à appeler E l'ensemble ainsi modifié. Alors le groupe de mots G définira un nombre N' *différent de* N, puisque le nombre N occupe maintenant le rang k, et que le $k^{\text{ième}}$ chiffre de N' n'est pas égal au $k^{\text{ième}}$ chiffre du $k^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E. »

J. Richard,
Professeur au Lycée de Dijon.

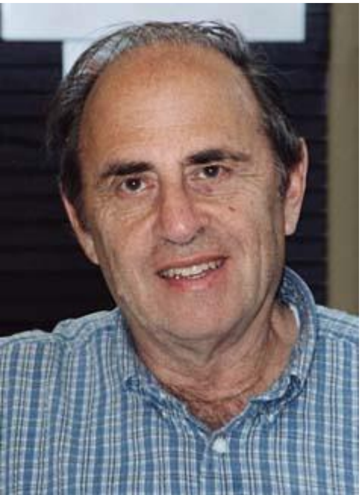
Les contradictions que nous signalions précédemment[1] dans la théorie des ensembles, et dont M. J. Richard étudie et éclaircit d'une manière définitive un autre exemple, ont, de nouveau, attiré l'attention de M. Hilbert. C'est un sujet sur lequel il revient dans sa Communication présentée en août 1904 au Congrès de

[1] *Revue* du 30 mars dernier.

« Wir müssen wissen,wir werden wissen »
David Hilbert, 1930

Über formal unentscheidbare Sätze
der Principia Mathematica
und verwandter Systeme

Titre du mémoire
de Kurt Gödel, 1931



Indécidabilité de l’hypothèse du continu
Paul Cohen, 1963