ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

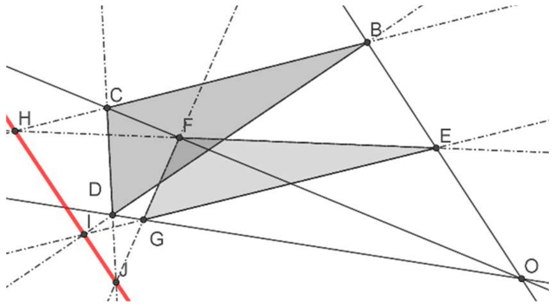
Pépinière académique de mathématiques
Stage des 24 et 25 octobre 2022
Ouvert aux collégiens élèves de troisième

Lycée Hoche	Lycée Camille Pissarro	Collège Paul Fort
VERSAILLES	PONTOISE	MONTLHÉRY

Girard Desargues, architecte et mathématicien lyonnais (il signait S.G.D.L., Sieur Girard Desargues, Lyonnais) né en 1591, mort en 1661, a laissé une œuvre mathématique reconnue par ses pairs Descartes, Pascal ou Mersenne, mais peu connue, en raison d'un style jugé obscur, car il empruntait au langage des professionnels, charpentiers ou maçons, et multipliait les définitions : « … de génération en génération, les contextes et les regards changent. Alors, ce qui passe pour essentiel et clair à une époque paraît secondaire ou confus à la suivante, si bien que les termes précis choisis pour cerner l'essentiel perdent de leur pertinence, et leur sens finit dans l'oubli. Dans la mesure où les mathématiques sont plus précises que la littérature, leurs textes sont voués à vieillir plus vite » (D. Nordon)

On doit à Desargues le *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, qui traite des coniques, et des études sur la perspective qui font de Desargues l'inventeur reconnu de la *géométrie projective.* Son travail fut publié sous une forme plus abordable par le célèbre graveur Abraham Bosse.

Le théorème de Desargues : si deux triangles sont tels que les droites joignant leurs sommets homologues sont concourantes, alors les points d'intersection des supports de leurs côtés homologues sont alignés.



La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : le niveau troisième en octobre, première en décembre, terminale (en vue du concours général) en février et seconde en avril. Nous remercions chaleureusement les établissements qui nous accueillent.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». **Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine HUET, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christophe VITALIS, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF

Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Bernard POIGT, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Guy SEGUIN, Proviseur du lycée Hoche.

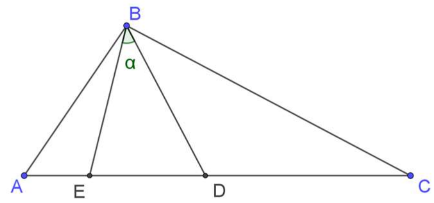
Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sylvain MAGNE (Lycée Suger, VAUCRESSON), Rémi NIGUÈS (Collège Auguste Renoir à ASNIÈRES SUR SEINE), Tony PAQUET (Collège Magellan, CHANTELOUP-LES-VIGNES), Emmanuel PERE (collège Paul Fort, MONTLHERY), Sébastien PORCHER (Collège Jacqueline Auriol, BOULOGNE-BILLANCOURT).

Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves :

Géométrie plane – calculs d'aires

Exercice 1

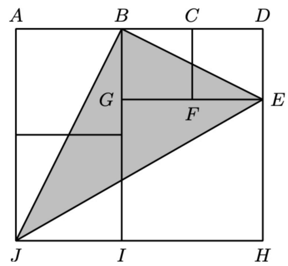
Soit ABC un triangle dont le plus grand côté est [AC]. Le cercle de centre A passant par B coupe (AC) en D et le cercle de centre C passant par B coupe (AC) en E.
Exprimer la mesure α de l'angle $\widehat{EBD}$ en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

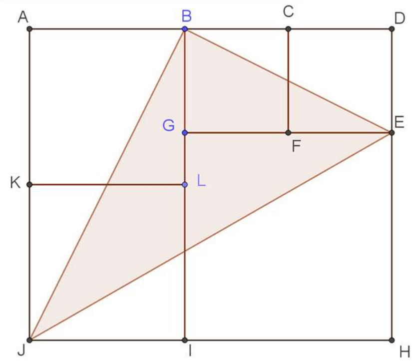


Comme [AC] est le plus grand côté du triangle ABC, les points D et E sont sur le segment [AC]. On en déduit que $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \alpha + \widehat{EBD}$.
Par construction des points D et E, AD = AB et CE = CB.
On en déduit que :
$\widehat{EDB} = \widehat{ADB} = \widehat{ABD} = \widehat{ABE} + \alpha$ et $\widehat{DEB} = \widehat{CEB} = \widehat{EBC} = \alpha + \widehat{DBC}$.
On en tire les égalités :
$\widehat{ABE} + \alpha + \alpha + \widehat{DBC} = \widehat{EDB} + \widehat{DEB} = 180° - \alpha$ soit $2\alpha + \left(\widehat{ABC} - \alpha\right) = 180° - \alpha$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{180° - \widehat{ABC}}{2}$.

Exercice 2

On considère un carré AJDH composé de cinq carrés juxtaposés comme dans la figure ci-contre.
On suppose que BC = 16.
Calculer l'aire du triangle BJE.



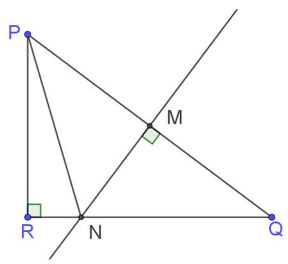


BC = 16 et BCFG est un carré donc GF = FC = 16.
CFED est un carré donc FE = DE = CD = 16. On en déduit que BD = GE = 32.
GIHE est un carré donc GI = IH = HE = EG = 32.
On en déduit que BI = BG + GI = 16 + 32 = 48.
ABLK et KLIJ sont des carrés donc BL = KL = LI d'où L est le milieu de [BI].
On en déduit que BL = 24 et AJ = 48.
$A_{BJE} = A_{ADHJ} - A_{ABJ} - A_{BDE} - A_{JEH}$
Soit $A_{BJE} = AJ \times AD - \frac{1}{2}(AB \times AJ + BD \times DE + JH \times HE)$
Soit $A_{BJE} = 48 \times (24 + 32) - \frac{1}{2}(24 \times 48 + 32 \times 16 + (24 + 32) \times 32)$

Ce qui donne $A_{BJE} = 960$.

Exercice 3

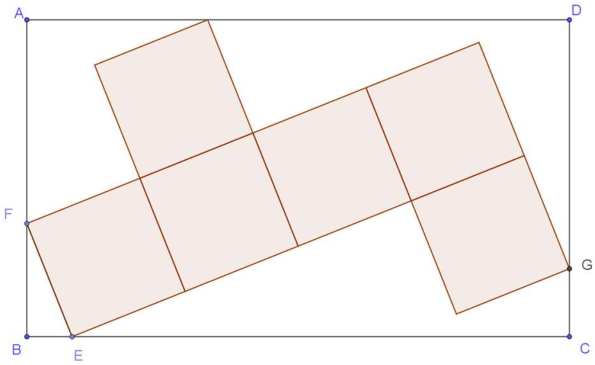
On considère un triangle PQR rectangle en R et tel que PR = 12 et RQ = 16. Soit M le milieu du segment [PQ] et N le point d'intersection de la perpendiculaire à (PQ) et de la droite (RQ).
Calculer l'aire du triangle PRN.



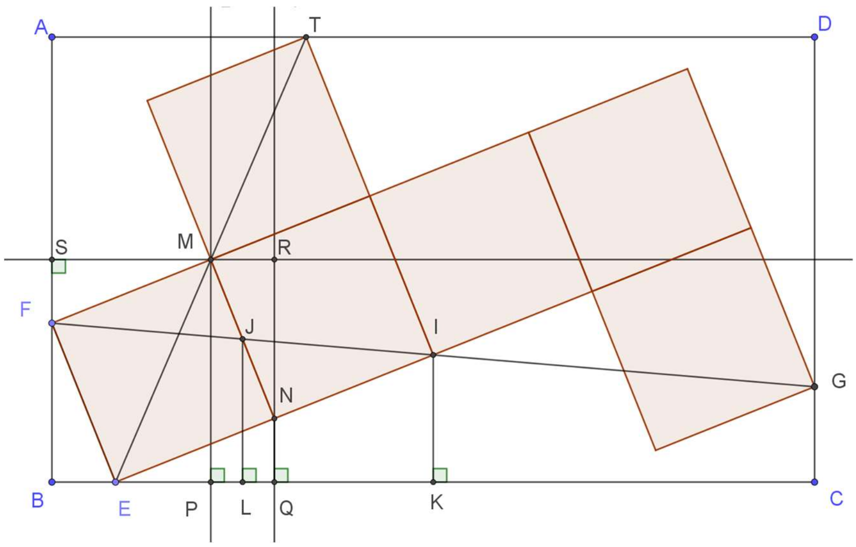
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle PQR, on a $PQ^2 = PR^2 + RQ^2 = 144 + 256 = 400$ donc $PQ = 20$.
D'autre part, les triangles PQR et NQM sont semblables car ils sont tous les deux rectangles et ont l'angle en Q en commun.
Donc $\frac{MQ}{RQ} = \frac{NQ}{PQ}$ soit $NQ = \frac{PQ \times MQ}{RQ} = \frac{10 \times 20}{16} = \frac{25}{2}$.
On en déduit $RN = RQ - NQ = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}$.
L'aire du triangle PRN est donc égale à $\frac{1}{2} PR \times RN = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{7}{2} = 21$.

Exercice 4

On considère la figure ci-dessous constituée d'un rectangle de côtés 12 et 7 circonscrit à l'assemblage des six carrés identiques juxtaposés. Quelle est l'aire de l'un des six carrés ?

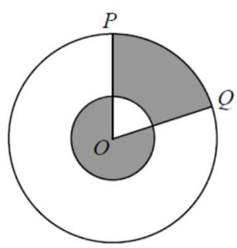


On complète la figure donnée :



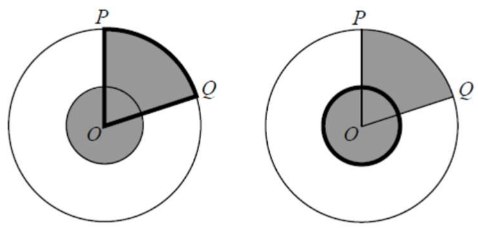
Si on construisait trois carrés supplémentaires identiques, on obtiendrait un rectangle de centre I et dont une diagonale serait le segment [FG]. Donc I est le milieu de [FG].
De même J est le milieu de [FI] comme diagonale d'un rectangle constitué de deux petits carrés et M est le milieu de [ET] comme diagonale d'un carré de côté [EI.
En considérant des projetés orthogonaux sur (BC) puis sur (AB), on en déduit que BK = 6, BP = 3 et BS = 3,5.
Le carré BNMF est inscrit dans le carré BQRS donc BQ = 3,5.
De plus le projeté orthogonal L sur (BC)de J, milieu de [MN], est le milieu de [PQ] puisque P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur (BC) donc L est le milieu de [PQ].
Comme LQ = BQ – BL = $3{,}5 - 3 = 0{,}5$, PQ = 1 = MR.
Les triangles rectangles BEF, QNE, RMB et SFM sont superposables (mêmes mesures d'angles et même hypoténuse) donc BE = MR = 1 et BF = EQ = BQ – PQ = $3{,}5 - 1 = 2{,}5$.
Si c désigne la longueur commune des côtés des petits carrés, le théorème de Pythagore permet alors d'écrire : $c^2 = \mathrm{BE}^2 + \mathrm{BF}^2 = 2{,}5^2 + 1^2 = 7{,}25$, ce qui correspond à l'aire de chacun des six carrés.

Exercice 5



On considère, comme dans la figure ci-contre, deux cercles de même centre O.
Le petit cercle a pour rayon 1 tandis que le grand cercle a pour rayon 3.
Les points P et Q sont des points du grand cercle tels que les deux régions ombrées aient des aires égales.
Déterminer la mesure x de l'angle $\widehat{POQ}$.

Si on ombre la région au départ non ombrée du petit disque, les deux régions nouvellement ombrées ont encore des aires égales, c'est-à-dire, l'aire du petit disque est égale à l'aire du secteur angulaire du grand disque.
L'aire du petit disque vaut π^2, celle du grand disque vaut $9\pi^2$.
L'aire du secteur angulaire du grand disque est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{POQ}$ et est égale à $\frac{1}{9}$ de l'aire du grand disque.



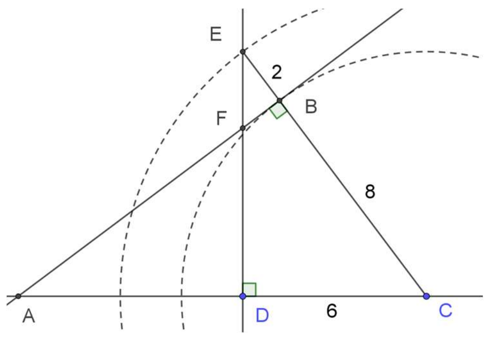
On en déduit que $x = \frac{1}{9} \times 360° = 40°$.

Exercice 6

On considère un triangle ABC rectangle en B et tel que BC = 8. On place sur [AC] le point D tel que DC = 6. La perpendiculaire à (AC) passant par D coupe la droite (BC) en un point E tel que BE = 2.
On note F le point d'intersection des droites (ED) et (AC).

a. Faire une figure respectant ces proportions.
b. Déterminer la longueur AF.

a. Pour faire la figure, on commence par tracer le triangle DEC rectangle en D et tel que DC = 6, CE = 10. Puis on place le point B, on trace la perpendiculaire à (EC) passant par B. Elle coupe la droite (DC) en A.
b. Dans le triangle EDC rectangle en D, $\mathrm{ED}^2 = \mathrm{EC}^2 - \mathrm{DC}^2 = 64$
donc ED = 8.
Les triangles EDC et EBF sont semblables (tous les deux rectangles et l'angle E en commun) donc $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}}$ soit $\mathrm{BF} = \frac{\mathrm{DC}\times\mathrm{EB}}{\mathrm{ED}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.
Les triangles ABC et EDC sont semblables (tous les deux rectangles

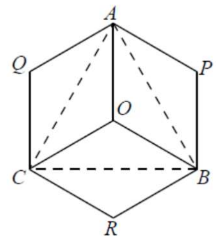


Et l'angle C en commun) donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DC}}$ soit $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{ED}\times\mathrm{BC}}{\mathrm{DC}} = \frac{8\times 8}{6} = \frac{32}{3}$.
On en tire $\mathrm{AF} = \mathrm{AB} - \mathrm{BF} = \frac{32}{3} - \frac{3}{2} = \frac{55}{6}$.

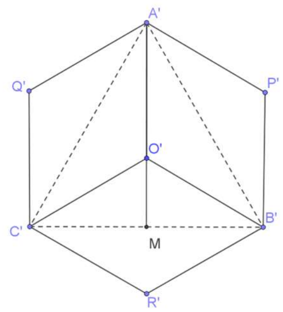
Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Un cube dont les arêtes ont pour longueur 8 est posé en équilibre sur l'un de ses sommets sur une table horizontale de telle manière que la diagonale reliant ce sommet au sommet O le plus éloigné (à l'intérieur du cube) soit verticale.
On suppose que le soleil est situé verticalement au-dessus du sommet supérieur. L'ombre du cube est alors un hexagone régulier.
Déterminer l'aire de cet hexagone.



Soit A, B et C les sommets reliés au point por des arêtes du cube.
Alors $OA = OB = OC = 8$ et $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COB} = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore, on en déduit $AB = BC = CA = 8\sqrt{2}$.
Soit P, Q et R les sommets du cube tels que $PAOB, QCOA, RBOC$ soient des faces du cube, la figure ci-contre donne une représentation de la vue du cube d'en haut.
L'ombre du cube correspond alors à l'hexagone « aplani » $A'Q'C'R'B'P'$ qui est la projection de $AQCRBP$ sur le plan de la table de cet hexagone.



Les points A, B, C sont situés dans un plan horizontal
donc $A'B' = AB = B'C' = BC = C'A' = CA = 8\sqrt{2}$.
D'autre part, $(A'B'), (B'C'), (C'A')$ sont des axes de symétrie respectivement de $A'O'B'P, B'O'C'R', C'O'A'Q'$ dont l'aire cherchée est le double de l'aire du triangle $A'B'C'$.
Soit M' le milieu de $[B'C']$, le théorème de Pythagore dans le triangle $A'M'B'$, rectangle en M' (car $A'B'C'$ est équilatéral) permet d'écrire :

$$A'M' = \sqrt{A'B'^2 - M'B'^2} = \sqrt{128 - 32} = \sqrt{96}$$

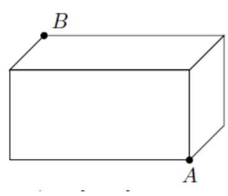
L'aire du triangle $A'B'C'$ vaut donc $\frac{1}{2} \times A'M' \times B'C' = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times \sqrt{96}$ et celle de l'hexagone vaut $8\sqrt{2} \times \sqrt{96}$.

Exercice 2

Une canette en aluminium est modélisée par un cylindre. La canette est fermée aux deux extrémités et a une aire totale de 300 cm².
Sachant que la canette aurait une aire totale de 900 cm² si l'on doublait son rayon, que serait son aire totale si l'on doublait plutôt sa hauteur ?

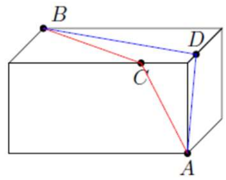
On note respectivement r et h le rayon et la hauteur de la canette. L'aire totale de cette canette est alors :
$300 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
Si on double le rayon de la canette, l'aire totale devient :
$900 = 2\pi(2r)^2 + 2\pi(2r)h = 8\pi r^2 + 4\pi rh$
On en déduit que $600 = 4\pi r^2 + 4\pi rh = 4\pi r^2 + 900 - 8\pi r^2 = 900 - 4\pi r^2$ d'où $\pi r^2 = \frac{900-600}{4} = 75$.
D'autre part, $300 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ donc $900 = 6\pi r^2 + 6\pi rh = 8\pi r^2 + 4\pi rh$
Ce qui entraine $2\pi rh = 2\pi r^2 = 150$
Si on double la hauteur de la canette, l'aire totale en cm² devient $2\pi r^2 + 2\pi r(2h) = 150 + 300 = 450$.

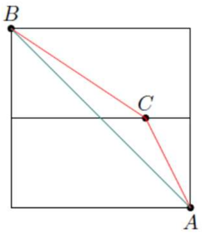
Exercice 3



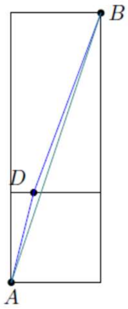
On considère un parallélépipède rectangle ayant deux faces carrées et deux sommets A et B de ce parallélépipède comme sur la figure ci-contre.
On suppose que les côtés des carrés mesurent 1 m et les côtés les plus longs des rectangles mesurent 2 m.
Quelle est la distance minimale que doit parcourir une fourmi se rendant du point A au point B en se déplaçant sur la surface du parallélépipède ?

Les chemins les plus courts pour aller de A vers B sont, de manière évidente, ceux du type A, C, B ou A, D, B.
Dans un cas comme dans l'autre, on détermine le chemin le plus court en dépliant le parallélépipède pour obtenir soit un carré soit un rectangle comme dans les figures ci-dessous.





Dans les deux cas, d'après l'inégalité triangulaire, le chemin le plus court est obtenu en restant sur le segment $[AB]$ et la distance d cherchée est la longueur AB.
Dans le premier cas, la figure obtenue est un carré de côté 2 et le théorème de Pythagore donne :
$AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ donc $AB = \sqrt{8}$.
Dans le deuxième cas, la figure obtenue est un rectangle de côtés 1 et 32 et le théorème de Pythagore donne :
$AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ donc $AB = \sqrt{10}$.
La distance minimale est donc $d = \sqrt{8}$



Exercice 4

Une bouteille fermée, contenant de l'eau, est constituée de deux cylindres de révolution de même axe posés l'un sur l'autre comme sur la figure A ci-dessous. On suppose que le petit cylindre a pour rayon 1 cm et le grand pour rayon 3 cm.
Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm (vue de face de la Figure B.
Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm (Figure C).
Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres ?

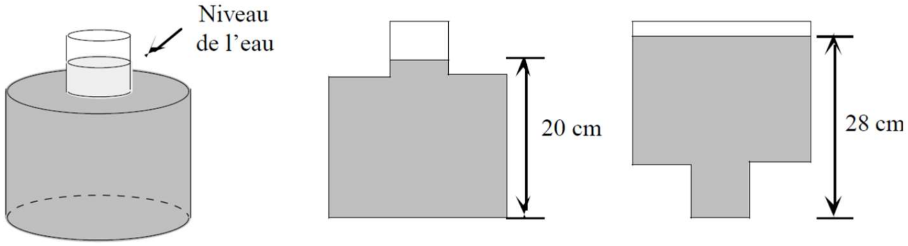


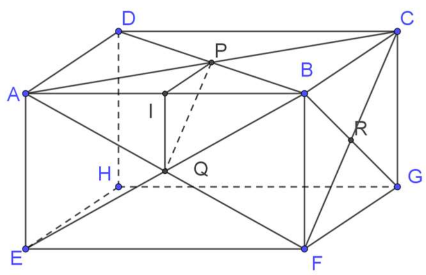
Figure A Figure B Figure C

Soit h la hauteur totale de la bouteille. Comme le volume des parties vides est le même quelle que soit la position de la bouteille, on exprime ces deux volumes en fonctions de h :
$V_B = (h - 20) \times \pi \times 1^2$ et $V_C = (h - 28) \times \pi \times 3^2$
Le nombre h est donc la solution de l'équation $(h - 20) \times \pi = (h - 28) \times 9\pi$ soit $h - 20 = 9h - 252$
soit $8h = 232$. La hauteur totale de la bouteille est donc de 29 cm.

Exercice 5

On considère une boîte parallélépipédique. On sait que les centres de trois faces de cette boite ayant un coin en commun (un sommet du parallélépipède) sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4 cm, 5 cm et 6 cm.
Déterminer le volume de cette boite.

Soit ABCDEFGH le parallélépipède modélisant la boite ci-contre, on considère le sommet B point commun aux faces ABCD, AEFB et BFGC dont les centres sont respectivement P, Q et R.
On a PQ = 4, QR = 5 et RP = 6.
Si on pose $\text{AB} = 2a, \text{AE} = 2b, \text{BC} = 2c$, le volume de la boite est égal à $V = 8abc$.
Or si le point I désigne le milieu de [AB], comme P et I sont les mil :ieux respectifs de [DB] et [AB], $\text{PI} = \frac{1}{2}\text{AD} = \frac{1}{2}\text{BC} = c$.
De même $\text{QI} = \frac{1}{2}\text{AE} = b$.



Les faces du parallélépipède sont des rectangles donc la droite (PI) qui est parallèle à la droite (BC) est perpendiculaire aux droites (BF) et (BA) donc au plan (AEF) et en particulier à la droite (IQ) incluse dans ce plan.
Le triangle PIQ est donc rectangle en I et l'application du théorème de Pythagore permet d'écrire :
$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PI}^2 + \mathrm{IQ}^2 = c^2 + b^2$ soit $c^2 + b^2 = 16$.
On démontrerait de même que $a^2 + c^2 = 25$ et $b^2 + a^2 = 36$.
En additionnant membre à membre ces trois égalités, on obtient $2(a^2 + b^2 + c^2) = 77$ soit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{77}{2}$.
En retranchant membre à membre l'égalité $c^2 + b^2 = 16$ à $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{77}{2}$ on obtient $a^2 = \frac{45}{2}$ et en procédant de même, on a $b^2 = \frac{27}{2}$ et $c^2 = \frac{5}{2}$. On en déduit que $a^2 b^2 c^2 = \frac{6075}{8}$ et $V = 8abc = 8\sqrt{\frac{6075}{8}}$.

Nombres

Exercice 1
Soit $\overline{abc}$ l'écriture décimale d'un nombre N, ce qui signifie que $N = 100a + 10b + c$. On suppose que $a \neq 0$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note $n!$ le produit $n(n-1) \dots 2 \times 1$ et on convient que $0! = 1$.
Déterminer les entiers a, b, c tels que $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

On commence par remarquer que si a, b, c sont, par définition, des entiers inférieurs ou égaux à 9, ils sont en fait strictement inférieurs à 7 car $7! = 5\,040$ qui a plus de trois chiffres.
On peut même affirmer qu'ils sont strictement inférieurs à 6 car $6! = 720$. Donc si l'un des nombres $a\,, b, c$ valait 6, le nombre a serait au moins égal à 7.
De plus, l'un des nombres a, b, c vaut 5 (car $4! + 4! + 4! = 72$ qui n'a que deux chiffres) et cela ne peut pas être a (car alors $N = \overline{5..}$ alors que $5! + 5! + 5! = 360$ et $360 < 500$).
Il n'y qu'un seul 5 dans l'écriture de N car sinon $N = \overline{a55}$ et, comme $5! + 5! = 240$ et $a \leq 4$ donc $a! \leq 4!$, la seule possibilité serait $N = \overline{255}$ qui ne convient pas.
On a donc $N = \overline{a5c}$ ou $N = \overline{ab5}$. La somme $a! + b! + c!$ prend alors les valeurs suivantes :
$5! + 4! + 4! = 168$, $5! + 4! + 3! = \mathbf{150}$, $5! + 4! + 2! = 146$, $5! + 4! + 1! = \mathbf{145}$, $5! + 3! + 3! = 132$,
$5! + 3! + 2! = 130$, $5! + 3! + 1! = 127$, $5! + 2! + 2! = 124$, $5! + 2! + 1! = 123$, $5! + 1! + 1! = 122$
Les seules d
Écritures décimales comportant un 5 sont 150 et 145.
Mais $1! + 5! + 0! = 121 \neq 150$ alors que $1! + 4! + 5! = 145$. La seule solution au problème est donc $N = \overline{145}$.

Exercice 2
On considère une suite de huit entiers naturels strictement positifs p, q, r, s, t, u, v, w.
On suppose que lorsqu'on fait la somme de n'importe quel groupe de quatre entiers consécutifs de cette suite, on obtient le même résultat 35.
Si $q + v = 14$, quelle est la plus grande valeur possible de p ?

Lorsqu'on fait la somme de n'importe quel groupe de quatre entiers consécutifs de cette suite, on obtient une le même résultat 35. Donc, $p + q + r + s = 35$ et $t + u + v + w = 35$,
d'où : $(p + q + r + s) + (t + u + v + w) = 35 + 35 = 70$.
On replace les huit lettres de la somme dans l'ordre suivant :
$p + q + r + s + t + u + v + w = (p + w) + (q + v) + (r + s + t + u) = 70$
Puisqu'on sait que $r + s + t + u = 35$ la somme de n'importe quel groupe de quatre entiers consécutifs de cette suite vaut 35) et que $q + v = 14$, alors on a $(p + w) + 14 + 35 = 70$, d'où $p + w = 21$.
La valeur de p est aussi grande que possible lorsque la valeur de w est aussi petite que possible.
Puisque w est un entier strictement positif, alors sa plus petite valeur possible vaut 1.
On a alors $p + 1 = 21$.
La plus grande valeur possible de p est 20.
Remarque : 20, 12, 2, 1, 20, 12, 2, 1 est un exemple de suite qui convient et on peut démontrer que toute suite qui convient s'écrit p, q, r, s, p, q, r, s.

Exercice 3
On dit qu'un entier naturel n est un carré parfait s'il existe un entier a tel que $n = a^2$.

a. Déterminer les carrés parfaits inférieurs à 100 qui ont exactement cinq diviseurs positifs.
b. Plus généralement soit N un entier, donner une méthode pour trouver des carrés parfaits inférieurs à N ayant exactement cinq diviseurs

a. Remarquons déjà que si 0 est un carré parfait, tout entier étant un diviseur de 0 (car produit de tout entier par 0 vaut 0), 0 ne convient pas (il a une infinité de diviseurs.

Les carrés parfaits non nuls inférieurs à 100 sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.
1, 4 et 9 ont au plus trois diviseurs positifs.
Les diviseurs positifs de 16 sont 1, 2, 4, 8, 16. Il y en a cinq.
25 et 49, carrés chacun d'un nombre premier p n'ont que trois diviseurs : $1, p, p^2$.

Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
64 a plus que cinq diviseurs car $64 = 4 \times 16$ et 16 a déjà cinq diviseurs.
Les diviseurs de 81 sont 1, 3, 9, 27, 81. Il y en a cinq.
Les solutions de l'exercice sont donc 16 et 81.
a. Il suffit de considérer tous les carrés parfaits qui sont une puissance quatrième d'un nombre premier p et inférieurs à N.

Exercice 4
Déterminer les entiers naturels x et y tels que $20x + 11y = 881$.

$20x + 11y = 881$ s'écrit aussi $20x = 881 - 11y$. Le chiffre des unités de $20x$ zqt 0 et celui de 881 est 1 donc celui de $11y$ est 1. On en déduit que le chiffre de y est aussi 1.
D'autre part, $20x + 11y = 881$ implique $11y \leq 881$ (car $x \geq 0$), d'où $y < 80$.
Les seules possibilités pour y sont donc 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71. Le tableau ci-dessous donne les valeurs correspondantes de x.

y	$11y = 881 - 20x$	$20x = 881 - 11y$	x
1	11	870	43,5
11	121	760	38
21	231	650	32,5
31	341	540	27
41	451	430	21,5
51	561	320	16
61	671	210	10,5
71	781	100	5

Les couples solutions sont donc $(38,11), (27,31), (16,51), (5,71)$.

Exercice 5
On découpe une pizza en 10 parts. Parmi les parts, deux correspondent chacune à $\frac{1}{24}$ de la pizza entière, quatre correspondent chacune à $\frac{1}{12}$, deux correspondent chacune à $\frac{1}{8}$ et deux correspondent chacune à $\frac{1}{6}$.
Un groupe de n amis se partage la pizza en distribuant toutes ces parts. Ils ne coupent aucune de ces parts.
Chacun des n amis reçoit, au total, une fraction égale de la pizza entière.
Quelles sont les valeurs de n $(2 \leq n \leq 10)$ pour lesquelles ceci n'est pas possible ?

Chacun des amis reçoit $\frac{1}{n}$ de la pizza.
On vérifie que $2 \times \frac{1}{24} + 4 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2+8+6+8}{24} = 1$.
Comme deux parts correspondent à $\frac{1}{6}$ de la pizza et on ne peut pas recouper les parts déjà faites, chacun doit recevoir au moins $\frac{1}{6}$ de la pizza d'où $n \leq 6$.
On peut avoir $n = 2$ car il y a un nombre pair de parts de chaque taille.
On peut avoir $n = 3$ car $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ donc le regroupement des parts restantes donnera aussi $\frac{1}{3}$ de la pizza.
On peut avoir $n = 4$ car $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ (ce qu'on utilise deux fois) donc le regroupement des parts restantes donnera aussi $\frac{1}{4}$ de la pizza.
On peut avoir $n = 6$ car on a deux parts correspondant à $\frac{1}{6}$ de la pizza, $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$ (ce qu'on utilise deux fois) et $2 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$ (ce qu'on utilise deux fois).
En revanche, on ne peut avoir $n = 5$ car on ne peut former un regroupement correspondant à $\frac{1}{5}$ de la pizza car l'un des regroupements devrait contenir $\frac{1}{6}$. Or $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ et aucune part de départ ne correspond à $\frac{1}{30}$ de la pizza.
En résumé, les valeurs impossibles pour n sont 5, 7, 8, 9 et 10.

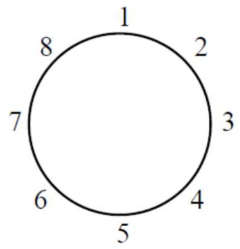
Exercice 6

Catherine mélange aléatoirement l'ordre des lettres L, M, N, O, P, Q, R, S et les place, dans leur nouvel ordre, sur un cercle en commençant par L en haut. Xavier écrit une liste commençant par L puis, toujours dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cercle, écrit chaque troisième lettre qu'il n'a pas encore écrite. En procédant ainsi, Xavier écrit la liste suivante : L, M, N, O, P, Q, R, S.

En commençant par L, quel est l'ordre des lettres de la liste de Catherine telles qu'elles paraissent sur le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ?

Catherine a placé les 8 lettres sur le cercle dans un ordre aléatoire.

On représente la position de la lettre L par le nombre 1, puis, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre, la position de la lettre suivante par le nombre 2 et ainsi de suite jusqu'à la position 8, comme dans la figure ci-contre.



À partir de la position 1, Xavier écrit une liste commençant par L, puis, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cercle, écrit chaque troisième lettre qu'il n'a pas encore écrite.

Donc, les trois premières lettres de sa liste sont celles aux positions 1, 4 et 7.

En procédant ainsi, les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 8, 2 et 3 (on a déjà écrit la lettre à la position 1),

Xavier écrit donc la lettre à la position 3.

Les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 5, 6 et 8 (on a déjà écrit les lettres aux positions 4 et 7), Xavier écrit donc la lettre à la position 8.

À ce stade, Xavier a écrit les lettres aux positions 1, 4, 7, 3 et 8.

Les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 2, 5 et 6 (on a déjà écrit les lettres aux positions 1, 3 et 4), Xavier écrit donc la lettre à la position 6.

Les seules lettres qui n'ont pas encore été écrites sont donc celles aux positions 2 et 5.

À son dernier tour, Jacques avait écrit la lettre à la position 6. Donc, il saute la lettre à la position 2, saute la lettre à la position 5, puis écrit la lettre à la position 2.

Finalement, Xavier écrit la lettre finale à la position 5.

Donc, dans l'ordre, Jacques a écrit les lettres aux positions 1, 4, 7, 3, 8, 6, 2 et 5.

Puisque Xavier avait écrit la liste L, M, N, O, P, Q, R, S, alors L est la lettre à la position 1 dans l'ordre dans lequel Catherine avait placé les lettres, M est la lettre à la position 4, N est la lettre à la position 7 et ainsi de suite.

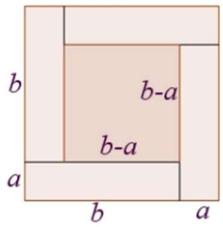
Donc, les lettres de la liste de Catherine paraissent dans l'ordre L, R, O, M, S, Q, N, P sur le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.

Calcul littéral – Équations

Exercice 1
Pierre affirme que si on choisit au hasard deux nombres strictement positifs et si on divise le carré de la somme de ces deux nombres par leur produit, on obtient un nombre supérieur ou égal à 4.
A-t-il raison ?

Soit a et b deux nombres strictement positifs quelconques. Le quotient du carré de leur somme par leur produit s'écrit $\frac{(a+b)^2}{ab}$ et $\frac{(a+b)^2}{ab} - 4 = \frac{(a+b)^2-4ab}{ab} = \frac{a^2+2ab+\ ^2-4ab}{ab} = \frac{a^2-2ab+b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$
Un carré étant toujours positif, $(a-b)^2 \geq 0$.
Comme a et b sont deux nombres strictement positifs, $ab > 0$ et un carré est toujours positif. Pierre a donc raison.

Remarque : sans perte de généralité, on peut supposer que $a < b$.
En considérant les aires qui interviennent sur la figure ci-contre, on retrouve l'égalité $(a+b)^2 = 4ab + (b-a)^2$ et donc $\frac{(a+b)^2}{ab} = 4 + \frac{(b-a)^2}{ab}$.



Exercice 2
Deux frères ont pour âges a et b (en années entières). On suppose que $a > b$. Quel âge avait l'aîné quand le cadet est né sachant que a et b vérifient $a^2 + b^2 - 2ab - 10a + 10b + 25 = 0$?

$a^2 + b^2 - 2ab - 10a + 10b + 25 = (a-b)^2 - 10(a-b) + 25$
L'égalité donnée s'écrit donc $(a-b)(a-b-10) + 25 = 0$ soit $-(a-b)(a-b-10) = 25$.
Comme a et b sont des entiers, $a - b$ est un entier positif qui divise 25. Donc $a - b$ vaut 1, 5 ou 25.
Si $a - b = 1$ alors $a - b - 10 = -9$ et $-(a-b)(a-b-10) = 9$. Ce n'est donc pas une solution.
Si $a - b = 5$ alors $a - b - 10 = -5$ et $-(a-b)(a-b-10) = 25$. C'est donc une solution.
Si $a - b = 25$ alors $a - b - 10 = 15$ et $-(a-b)(a-b-10) = -375$. Ce n'est donc pas une solution.
L'aîné avait donc 5 ans lorsque le cadet est né.

Exercice 3
Deux polygones réguliers ont un total de 14 sommets et de 29 diagonales. Calculer le nombre de sommets de chacun de ces polygones.

Soit x et y les nombres de sommets de ces deux polygones.
Le nombre total de sommets est $x + y = 14$ soit $y = 14 - x$.
Chaque diagonale de chaque polygone a pour extrémités deux sommets non consécutifs. Chaque sommet du polygone à x sommets est donc relié par une diagonale à $x - 3$ sommets. Le nombre de diagonales est donc, pour ce polygone $\frac{x(x-3)}{2}$ (on divise par 2 pour ne pas compter deux fois chaque diagonale). De même pour l'autre polygone. On a donc $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 29$.
On est ramené à résoudre l'équation $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{(14-x)(11-x)}{2} = 29$
ce qui s'écrit $x^2 - 3x + 154 - 11x - 14x + x^2 = 58$ soit $2x^2 - 28x + 96 = 0$ soit $x^2 - 14x + 48 = 0$ c'est-à-dire $(x-7)^2 - 49 + 48 = 0$ soit $(x-7)^2 - 1 = 0$ soit $(x-7-1)(x-7+1) = 0$ soit $(x-8)(x-6) = 0$.
Les deux polygones ont donc l'un 6 sommets, l'autre 8 sommets.

Exercice 4
Soit a et b deux nombres non nuls.

a. Développer le produit $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
b. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante l'égalité suivante est vérifiée : $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

a. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + ba^2 - a^2b - bab + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$

b. En réduisant au même dénominateur, l'égalité $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ équivaut à $\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{a+b}{ab}$
c'est-à-dire $ab(a^3+b^3)=a^2b^2(a+b)$. Comme a et b sont non nuls, ceci s'écrit aussi $a^3+b^3=ab(a+b)$.
En s'appuyant sur le résultat de la question a., on se ramène à $(a+b)(a^2-ab+b^2)= ab(a+b)$
Soit $(a+b)(a^2-2ab+b^2)=0$ soit $(a+b)(a-b)^2=0$.
L'égalité donnée est donc vérifiée si et seulement si $a=b$ ou $a=-b$.

Exercice 5

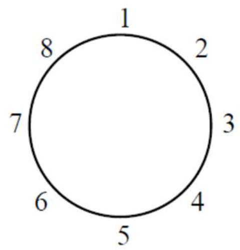
Soit a, b, c trois nombres tels que $a+b\neq 0, b+c\neq 0, c+a\neq 0$ et $a^3+b^3+c^3+abc=0$.
Montrer que $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$.

Posons $X=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$
Alors $X=\frac{a^2(c+a)(a+b)+b^2(b+c)(a+b)+c^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
Soit $X=\frac{a^2(ca+a^2+cb+a\ \ )+b^2(ba+ca\ \ ^2+cb)+c^2(bc+c^2+ba+c\ \ )}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
Soit $X=\frac{(ca^3+a^4+cba^2+a^3b)+(b^3a+cab^2+b^4+cb^3)+(bc^3+c^4+bac^2+c^3a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
Soit $X=\frac{bac(a+b+c)+a(a^3+b^3+c^3)+b(a^3+b^3+c^3)+c(a^3+b^3+c^3)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
Soit $X=\frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
On en déduit bien d'après les données de l'exercice que $X=0$.

Exercice 6

Catherine mélange aléatoirement l'ordre des lettres L, M, N, O, P, Q, R, S et les place, dans leur nouvel ordre, sur un cercle en commençant par L en haut. Xavier écrit une liste commençant par L puis, toujours dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cercle, écrit chaque troisième lettre qu'il n'a pas encore écrite. En procédant ainsi, Xavier écrit la liste suivante : L, M, N, O, P, Q, R, S.
En commençant par L, quel est l'ordre des lettres de la liste de Catherine telles qu'elles paraissent sur le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ?

Catherine a placé les 8 lettres sur le cercle dans un ordre aléatoire.
On représente la position de la lettre L par le nombre 1, puis, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre, la position de la lettre suivante par le nombre 2 et ainsi de suite jusqu'à la position 8, comme dans la figure ci-contre.



À partir de la position 1, Xavier écrit une liste commençant par L, puis, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cercle, écrit chaque troisième lettre qu'il n'a pas encore écrite.
Donc, les trois premières lettres de sa liste sont celles aux positions 1, 4 et 7.
En procédant ainsi, les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 8, 2 et 3 (on a déjà écrit la lettre à la position 1), Xavier écrit donc la lettre à la position 3.
Les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 5, 6 et 8 (on a déjà écrit les lettres aux positions 4 et 7), Xavier écrit donc la lettre à la position 8.
À ce stade, Xavier a écrit les lettres aux positions 1, 4, 7, 3 et 8.
Les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 2, 5 et 6 (on a déjà écrit les lettres aux positions 1, 3 et 4), Xavier écrit donc la lettre à la position 6.
Les seules lettres qui n'ont pas encore été écrites sont donc celles aux positions 2 et 5.
À son dernier tour, Jacques avait écrit la lettre à la position 6. Donc, il saute la lettre à la position 2, saute la lettre à la position 5, puis écrit la lettre à la position 2.
Finalement, Xavier écrit la lettre finale à la position 5.
Donc, dans l'ordre, Jacques a écrit les lettres aux positions 1, 4, 7, 3, 8, 6, 2 et 5.
Puisque Xavier avait écrit la liste L, M, N, O, P, Q, R, S, alors L est la lettre à la position 1 dans l'ordre dans lequel Catherine avait placé les lettres, M est la lettre à la position 4, N est la lettre à la position 7 et ainsi de suite.
Donc, les lettres de la liste de Catherine paraissent dans l'ordre L, R, O, M, S, Q, N, P sur le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dénombrement - Probabilités

Exercice 1

Combien d'entiers compris entre 10 000 et 100 000 contiennent le bloc 178 dans leur écriture décimale ?

100 000 ne contient pas le bloc 178 donc on cherche les entiers N dont l'écriture décimale contient 5 chiffres (celui de gauche non nul) contenant le bloc 178 c'est-à-dire les entiers pour lesquels il existe deux entiers x et y compris entre 0 et 9 (x étant non nul s'il correspond au chiffre de gauche) tels que :
$N = \overline{xy178}$ ou $N = \overline{x178y}$ ou $N = \overline{178xy}$.
Dans le 1er cas, il y a 9 choix pour x (pas le 0) et 10 pour y donc 90 entiers solutions.
Dans le deuxième cas, il y de la même façon 90 entiers solutions.
Dans le troisième cas, il y a 10 choix pour x comme pour y donc 100 entiers solutions.
Au total on a donc 280 entiers compris entre 10 000 et 100 000 et contenant le bloc 178 dans leur écriture décimale

Exercice 2

Nicolas a envoyé par SMS un entier de six chiffres Charles. Parmi les six chiffres, deux chiffres étaient des 3. Malheureusement, les deux 3 que Nicolas a envoyés ont disparu et Charles n'a reçu qu'un entier de quatre chiffres, soit 2022.
Quel est le nombre d'entiers de six chiffres possibles que Nicolas aurait pu envoyer par SMS?

L'entier de six chiffres que Nicolas a envoyé comprenait les chiffres 2,0,2,2 dans cet ordre ainsi que deux 3. Si les deux 3 étaient des chiffres consécutifs, alors il y a 5 entiers possibles :
332022, 233022, 203322, 202332, 202233
Dans les cinq entiers ci-dessus, remarquons que les deux 3 semblent se décaler de gauche à droite dans l'entier.
Si les deux 3 ne sont pas des chiffres consécutifs, alors il existe 10 couples de positions possibles pour ces chiffres dans l'entier : 1er/3e, 1er/4e, 1er/5e, 1er/6e, 2e/4e, 2e/5e, 2e/6e, 3e/5e, 3e/6e, 4e/6e.
On a donc les entiers suivants :
323022, 320322, 320232, 320223, 230322, 230232, 230223, 203232, 203223, 202323
(On peut penser au fait de déplacer le 3 le plus à gauche de gauche à droite dans l'entier tout en identifiant toutes les positions possibles pour le second 3.)
Donc, il y a 5 + 10 = 15 entiers de six chiffres possibles que Nicolas aurait pu envoyer par SMS.

Exercice 3

Christophe a 3 chemises rouges, 3 chemises bleues et 3 chemises vertes dans un tiroir.
Sans regarder, il retire du tiroir et au hasard les chemises une par une. Il voudrait un ensemble de chemises comprenant soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes.
Quel est le nombre minimum de chemises que Christophe doit retirer pour garantir qu'il ait un tel ensemble ?

Il est évident que Christophe doit retirer au moins 3 chemises.
Retirer 3 chemises ne suffit pas car 2 d'entre elles pourraient rouges et 1 pourrait être bleue.
Retirer 4 chemises ne suffit pas car 2 d'entre elles pourraient rouges et 2 pourraient être bleues.
En revanche, s'il retire 5 chemises :

- si 3 sont de la même couleur, les conditions imposées sont remplies ;
- s'il n'y a pas 3 chemises de la même couleur, alors Christophe a retiré au plus 2 chemises de chaque couleur. Pour arriver à un total de 5 chemises retirées, on ne peut qu'avoir une répartition 2, 2, 1 soit 3 couleurs différentes.

Exercice 4

On considère une grande boite dans laquelle :

- le premier jour, on a exactement 1 boule bleue et 1 boule dorée ;
- à la fin de chaque jour, on ajoute, pour chaque boule dorée déjà dans la boite, 2 boules bleues et une boule dorée ;
- on ne retire jamais de boule.

a. Quel est le contenu exact de la boite à la fin du septième jour ?
b. Quel est le contenu exact de la boite à la fin du 25e jour ?

a. On peut décrire le processus de remplissage de la boite à l'aide d'un tableau, en commençant par remarquer le nombre de boules dorées est multiplié par 2 chaque fin de journée :

Fin du jour n°	Nombre de boules dorées	Nombre de boules bleues
1	2	$1+2\times 1=3$
2	4	$3+2\times 4=7$
3	8	$7+2\times 8=15$
4	16	$15+2\times 16=31$
5	32	$31++2\times 32=63$
6	64	$63++2\times 64=127$
7	128	$127++2\times 128=255$

Ce qui nous donne le contenu exact de la boite à la fin du septième jour.

b. Plus généralement, si on note $D(n)$ et $B(n)$ les nombres respectifs de boules dorées et bleues à la fin du jour n°n, on a facilement $D(n)=\underbrace{2\times 2\times \ldots.\times 2}_{n\,facteurs}=2^n$.

D'autre part, $B(n)=B(n-1)+2\times D(n)$.
On peut alors écrire successivement :
$B(15)=B(14)+2\times D(14)$
$B(14)=B(13)+2\times D(13)$
$B(13)=B(12)+2\times D(12)$
.....
$B(3)=B(2)+2\times D(2)$
$B(2)=B(1)+2\times D(1)$
En ajoutant toutes ces égalités membre à membre et en simplifiant l'égalité obtenue, on en tire
$B(15)=B(1)+2(D(14)+D(13)+D(12)+\cdots+D(2)+D(1))$
Soit $B(15)=3+2(2^{14}+2^{13}+2^{12}+\cdots+2^2+2)=3+(2^{15}+2^{14}+2^{13}+\cdots+2^3+2^2)$
La calculatrice donne alors, $B(15)=65\,535$
Remarque : l'étude des suites au lycée permettra d'exprimer $B(n)$ en fonction de n, et cela pour tout entier n.

Exercice 5
Anne, Christine, Jean-François et Luca choisissent chacun au hasard un entier de 1 à 9.
Chacun de leurs choix est indépendant des autres entiers choisis et le même entier peut être choisi par plusieurs personnes.
Déterminer la probabilité que la somme des quatre entiers choisis soit un nombre pair.

Il y a 9 choix possibles pour chaque personne et les choix sont indépendants les uns des autres donc le nombre total de possibilités des quatre choix, c'est-à-dire le nombre de quadruplets (a,b,c,d) d'entiers compris entre 1 et 9, vaut $9^4=6\,561$.
Si N désigne le nombre de quadruplets (a,b,c,d) dont la somme $a+b+c+d$ est un nombre pair, la probabilité cherchée est $\frac{N}{6\,561}$.
Parmi les entiers a,b,c,d on en a 0, 1, 2, 3 ou 4 qui sont pairs (les autres entiers étant impairs). Leur somme sera donc paire si et seulement si soit 0 soit 2 soit 4 de ces entiers sont pairs.

- Si aucun n'est pair, les quatre entiers sont impairs, il y a 5 choix (1, 3, 5, 7, 9) pour chacun de ces entiers soit $5^4=625$ quadruplets qui conviennent;
- Si deux de ces entiers sont pairs, les deux autres étant impairs, on a 5 choix pour chaque entier impair et 4 choix pour chaque entier pair (0, 2, 4, 6). Il y a de plus 6 possibilités de répartitions des entiers pairs (ab,ac,ad,bc,bd,cd). On a dans ce cas $5^2\times 4^2\times 6=2\,400$ quadruplets solutions;
- Si les quatre entiers sont pairs, on a 4 choix pour chacun d'où $4^4=256$ quadruplets solutions.

On en déduit que la probabilité que la somme des quatre entiers choisis soit un nombre pair est
$\frac{625+2\,400+256}{6\,561}=\frac{3\,281}{6\,561}$.