ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

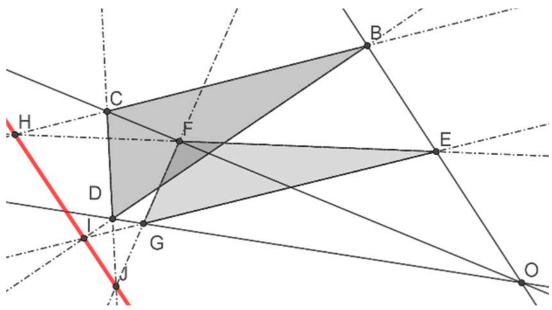
Pépinière académique de mathématiques
Stage des 24 et 25 octobre 2022
Ouvert aux collégiens élèves de troisième

Lycée Hoche	Lycée Camille Pissarro	Collège Paul Fort
VERSAILLES	**PONTOISE**	**MONTLHÉRY**

Girard Desargues, architecte et mathématicien lyonnais (il signait S.G.D.L., Sieur Girard Desargues, Lyonnais) né en 1591, mort en 1661, a laissé une œuvre mathématique reconnue par ses pairs Descartes, Pascal ou Mersenne, mais peu connue, en raison d'un style jugé obscur, car il empruntait au langage des professionnels, charpentiers ou maçons, et multipliait les définitions : « … de génération en génération, les contextes et les regards changent. Alors, ce qui passe pour essentiel et clair à une époque paraît secondaire ou confus à la suivante, si bien que les termes précis choisis pour cerner l'essentiel perdent de leur pertinence, et leur sens finit dans l'oubli. Dans la mesure où les mathématiques sont plus précises que la littérature, leurs textes sont voués à vieillir plus vite » (D. Nordon)

On doit à Desargues le *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, qui traite des coniques, et des études sur la perspective qui font de Desargues l'inventeur reconnu de la *géométrie projective.* Son travail fut publié sous une forme plus abordable par le graveur Abraham Bosse.

Le théorème de Desargues : si deux triangles sont tels que les droites joignant leurs sommets homologues sont concourantes, alors les points d'intersection des supports de leurs côtés homologues sont alignés.



La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : le niveau troisième en octobre, première en décembre, terminale (en vue du concours général) en février et seconde en avril. Nous remercions chaleureusement les établissements qui nous accueillent.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». **Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine HUET, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christophe VITALIS, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF
Les responsables des établissements d'accueil : Isabelle BAUDE, Principale du collège Paul Fort, Bernard POIGT, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Guy SEGUIN, Proviseur du lycée Hoche.
Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sylvain MAGNE (Lycée Suger, VAUCRESSON), Rémi NIGUÈS (Collège Auguste Renoir à ASNIÈRES SUR SEINE), Tony PAQUET (Collège Magellan, CHANTELOUP-LES-VIGNES), Emmanuel PERE (collège Paul Fort, MONTLHERY), Sébastien PORCHER (Collège Jacqueline Auriol, BOULOGNE-BILLANCOURT).
Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves : Rémi MOURTERON, collège Descartes, FONTENAY LE FLEURY, Gaël SIMON, collège Frania Esenbach-Haverland, MENUCOURT, Khalid ZAOUI, collège Albert Camus, BOIS COLOMBES

Géométrie plane – calculs d'aires

Exercice 1 ***Deux cercles déterminent un angle***

Soit ABC un triangle dont le plus grand côté est [AC]. Le cercle de centre A passant par B coupe (AC) en D et le cercle de centre C passant par B coupe (AC) en E.

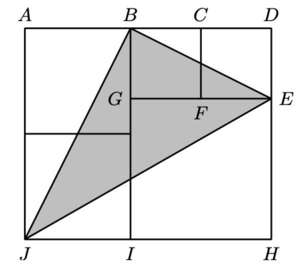
Exprimer la mesure α de l'angle $\widehat{\mathrm{EBD}}$ en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

Exercice 2 ***Cinq carrés pour un carré***

On considère un carré AJDH composé de cinq carrés juxtaposés comme dans la figure ci-contre.

On suppose que BC = 16.

Calculer l'aire du triangle BJE.



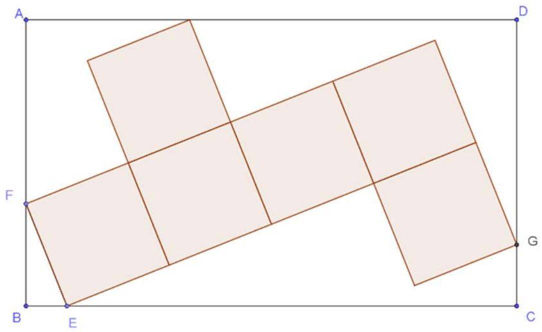
Exercice 3 ***Ablation d'un triangle isocèle***

On considère un triangle PQR rectangle en R et tel que PR = 12 et RQ = 16. Soit M le milieu du segment [PQ] et N le point d'intersection de la perpendiculaire en M à (PQ) et de la droite (RQ).

Calculer l'aire du triangle PRN.

Exercice 4 ***Théorie des dominos***

On considère la figure ci-dessous constituée d'un rectangle de côtés 12 et 7 circonscrit à l'assemblage des six carrés identiques juxtaposés. Quelle est l'aire de l'un des six carrés ?



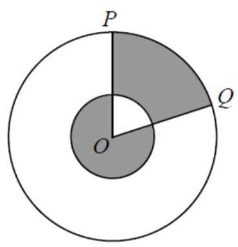
Exercice 5 ***Comme aux fléchettes***

On considère, comme dans la figure ci-contre, deux cercles de même centre O.

Le petit cercle a pour rayon 1 tandis que le grand cercle a pour rayon 3.

Les points P et Q sont des points du grand cercle tels que les deux régions ombrées aient des aires égales.

Déterminer la mesure x de l'angle $\widehat{POQ}$.



Exercice 6 ***Détermination d'une distance***

On considère un triangle ABC rectangle en B et tel que BC = 8. On place sur [AC] le point D tel que DC = 6. La perpendiculaire à (AC) passant par D coupe la droite (BC) en un point E tel que BE = 2.

On note F le point d'intersection des droites (ED) et (AC).

a. Faire une figure respectant ces proportions.

b. Déterminer la longueur AF.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 ***Marche à l'ombre***

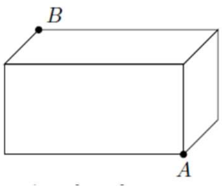
Un cube dont les arêtes ont pour longueur 8 est posé en équilibre sur l'un de ses sommets sur une table horizontale de telle manière que la diagonale reliant ce sommet au sommet O le plus éloigné (à l'intérieur du cube) soit verticale.
On suppose que le soleil est situé verticalement au-dessus du sommet supérieur. L'ombre du cube est alors un hexagone régulier.
Déterminer l'aire de cet hexagone.

Exercice 2 ***Pour le bac de tri***

Une canette en aluminium est modélisée par un cylindre. La canette est fermée aux deux extrémités et a une aire totale de 300 cm^2.
Sachant que la canette aurait une aire totale de 900 cm^2 si l'on doublait son rayon, que serait son aire totale si l'on doublait plutôt sa hauteur ?

Exercice 3 ***La baie des fourmis***

On considère un parallélépipède rectangle ayant deux faces carrées et deux sommets A et B de ce parallélépipède comme sur la figure ci-contre.
On suppose que les côtés des carrés mesurent 1 m et les côtés les plus longs des rectangles mesurent 2 m.
Quelle est la distance minimale que doit parcourir une fourmi se rendant du point A au point B en se déplaçant sur la surface du parallélépipède ?



Exercice 4 ***Bouteille retournée***

Une bouteille fermée, contenant de l'eau, est constituée de deux cylindres de révolution de même axe posés l'un sur l'autre comme sur la figure A ci-dessous. On suppose que le petit cylindre a pour rayon 1 cm et le grand pour rayon 3 cm.
Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm (vue de face de la Figure B.
Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm (Figure C).
Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres ?

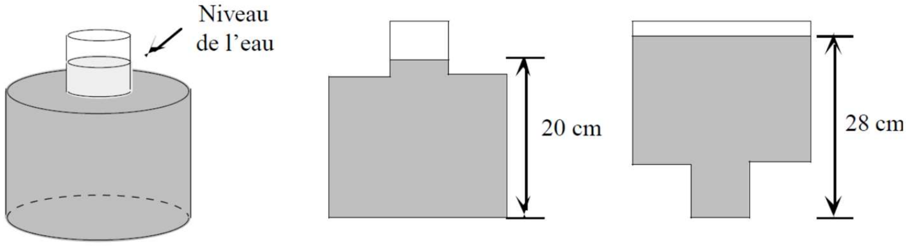


Figure A Figure B Figure C

Exercice 5 ***Un triangle dans une boîte***

On considère une boîte parallélépipédique. On sait que les centres de trois faces de cette boite ayant un coin en commun (un sommet du parallélépipède) sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4 cm, 5 cm et 6 cm.
Déterminer le volume de cette boite.

Nombres

Exercice 1 ***Rencontre avec la factorielle***
Soit $\overline{abc}$ l'écriture décimale d'un nombre N, ce qui signifie que $N = 100a + 10b + c$. On suppose que $a \neq 0$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note $n!$ le produit $n(n-1)\ldots 2 \times 1$ et on convient que $0! = 1$.
Déterminer les entiers a, b, c tels que $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Exercice 2 ***En rang par quatre***
On considère une suite de huit entiers naturels strictement positifs p, q, r, s, t, u, v, w.
On suppose que lorsqu'on fait la somme de n'importe quel groupe de quatre entiers consécutifs de cette suite, on obtient le même résultat 35.
Si $q + v = 14$, quelle est la plus grande valeur possible de p ?

Exercice 3 ***Diviseurs d'un carré parfait***
On dit qu'un entier naturel n est un carré parfait s'il existe un entier a tel que $n = a^2$.
a. Déterminer les carrés parfaits inférieurs à 100 qui ont exactement cinq diviseurs positifs.
b. Plus généralement soit N un entier, donner une méthode pour trouver des carrés parfaits inférieurs à N ayant exactement cinq diviseurs

Exercice 4 « ***Énoncé très simple… » comme aurait dit Gauss***
Déterminer les entiers naturels x et y tels que $20x + 11y = 881$.

Exercice 5 ***Une pizza entre amis***
On découpe une pizza en 10 parts. Parmi les parts, deux correspondent chacune à $\frac{1}{24}$ de la pizza entière, quatre correspondent chacune à $\frac{1}{12}$, deux correspondent chacune à $\frac{1}{8}$ et deux correspondent chacune à $\frac{1}{6}$.
Un groupe de n amis se partage la pizza en distribuant toutes ces parts. Ils ne coupent aucune de ces parts.
Chacun des n amis reçoit, au total, une fraction égale de la pizza entière.
Quelles sont les valeurs de n ($2 \leq n \leq 10$) pour lesquelles ceci n'est pas possible ?

Exercice 6 ***Scrabble en rond***
Catherine mélange aléatoirement l'ordre des lettres L, M, N, O, P, Q, R, S et les place, dans leur nouvel ordre, sur un cercle en commençant par L en haut. Xavier écrit une liste commençant par L puis, toujours dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cercle, écrit chaque troisième lettre qu'il n'a pas encore écrite. En procédant ainsi, Xavier écrit la liste suivante : L, M, N, O, P, Q, R, S.

En commençant par L, quel est l'ordre des lettres de la liste de Catherine telles qu'elles paraissent sur le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ?

Calcul littéral – Équations

Exercice 1 ***A-t-il réfléchi avant de parler ?***
Pierre affirme que si on choisit au hasard deux nombres strictement positifs et si on divise le carré de la somme de ces deux nombres par leur produit, on obtient un nombre supérieur ou égal à 4.
A-t-il raison ?

Exercice 2 ***Deux frères***
Deux frères ont pour âges a et b (en années entières). On suppose que $a > b$. Quel âge avait l'aine quand lorsque le cadet est né sachant que a et b vérifient $a^2 + b^2 - 2ab - 10a + 10b + 25 = 0$?

Exercice 3 ***Deux polygones***
Deux polygones réguliers ont un total de 14 sommets et de 29 diagonales. Calculer le nombre de sommets de chacun de ces polygones.

Exercice 4 ***De l'utilité du calcul littéral 1***
Soit a et b deux nombres non nuls.

a. Développer le produit $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
b. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante l'égalité suivante est vérifiée : $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Exercice 5 ***De l'utilité du calcul littéral 2***
Soit a, b, c trois nombres tels que $a + b \neq 0, b + c \neq 0, c + a \neq 0$ et $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$.
Montrer que $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Exercice 6 ***Une équation***
Déterminer les entiers strictement positifs x et y tels que $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 1$.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1 ***Un 178 baladeur***
Combien d'entiers compris entre 10 000 et 100 000 contiennent le bloc 178 dans leur écriture décimale ?

Exercice 2 ***Il s'est emmêlé les pouces***
Nicolas a envoyé par SMS un entier de six chiffres à Charles. Parmi les six chiffres, deux chiffres étaient des 3. Malheureusement, les deux 3 que Nicolas a envoyés ont disparu et Charles n'a reçu qu'un entier de quatre chiffres, soit 2022.
Quel est le nombre d'entiers de six chiffres possibles que Nicolas aurait pu envoyer par SMS?

Exercice 3 ***Les chemises de Christophe sont-elles rouges ?***
Christophe a 3 chemises rouges, 3 chemises bleues et 3 chemises vertes dans un tiroir.
Sans regarder, il retire du tiroir et au hasard les chemises une par une. Il voudrait un ensemble de chemises comprenant soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes.
Quel est le nombre minimum de chemises que Christophe doit retirer pour garantir qu'il ait un tel ensemble ?

Exercice 4 ***On prépare les fêtes***
On considère une grande boite dans laquelle :
- le premier jour, on a exactement 1 boule bleue et 1 boule dorée ;
- à la fin de chaque jour, on ajoute, pour chaque boule dorée déjà dans la boite, 2 boules bleues et une boule dorée ;
- on ne retire jamais de boule.

a) Quel est le contenu exact de la boite à la fin du septième jour ?
b) Quel est le contenu exact de la boite à la fin du 25^{e} jour ?

Exercice 5 ***L'union fait… la paire***
Anne, Christine, Jean-François et Luca choisissent chacun au hasard un entier de 1 à 9.
Chacun de leurs choix est indépendant des autres entiers choisis et le même entier peut être choisi par plusieurs personnes.
Déterminer la probabilité que la somme des quatre entiers choisis soit un nombre pair.

Exercice 6 ***Jeu de mots***
On considère des mots formés uniquement des lettres A, B, C, D ou E et tels que deux lettres adjacentes sont toujours distinctes. On parlera de mots « admissibles ».
1. Combien de mots admissibles de 5 lettres commençant et finissant par la lettre A peut-on former ?
2. Combien de mots admissibles de 6 lettres contenant au moins deux fois la lettre B peut-on former ?