académie Versailles

RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Lycée Camille Pissarro Pontoise

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES ST-QUENTIN-EN-YVELINES

université PARIS-SACLAY

LYCÉE DE LA VALLÉE DE CHEVREUSE LVC 1987

Inria inventeurs du monde numérique

Le stage prévu pour les lycéennes et lycéens de seconde au mois d'avril 2020 est évidemment annulé

Vous pouvez trouver ci-dessous les énoncés et des éléments de solution des exercices prévus pendant ce stage

« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir » - Henri Poincaré *La science et l'hypothèse*

« La ruse de la crédulité est évidemment de se faire passer pour de l'intelligence » - Gérald Bronner *Déchéance de rationalité*

Frontispice du traité « Brook Taylor's perspective… » de Joshua Kirby (1754) par William Hogarth (1697 – 1764)

La légende dit : « Quiconque fait une conception sans connaissance de la perspective sera passible d'absurdités telles celles montrées dans ce frontispice ».

Le programme du stage prévoyait un exposé sur la perspective, de Piero della Francesca à Girard Desargues… Vous pouvez commencer par dénombrer les erreurs volontaires commises par Hogarth dans cette gravure.

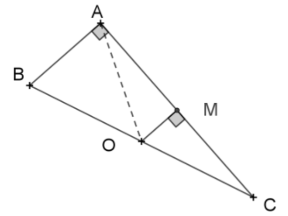
Nos remerciements à Frédérique Chauvin, qui rassemblait les candidatures, à Madame la Directrice de l'UFR des sciences de l'UVSQ, Madame le Proviseur du lycée Vallée de Chevreuse de Gif sur Yvette, Monsieur le Proviseur du lycée Camille Pissarro de Pontoise, qui devaient accueillir le stage, et aux professeurs qui devaient en assurer l'animation : Hélène Cochard, Carine Simondet, Catherine Houard, Antoine Boutrois, Bruno Baudin, Konrad Renard, Nicolas Fixot, Jean-Pierre Vallon-Hoarau, Christophe Deguil, Sébastien Moulin et Vincent Monceau

Les inspecteurs pédagogiques régionaux : Anne Allard, Joëlle Déat, Xavier Gabilly,
Anne Menant, Vincent Pantaloni, Jean-François Remetter, Evelyne Roudneff,
Charles Séva et Christine Weill

Thème : Angles et distances

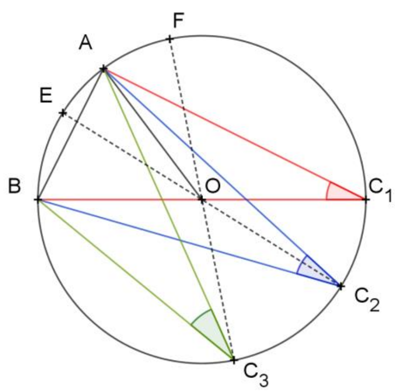
Pour commencer, deux « rappels » qui n'en sont pas

Premier rappel : Si le triangle ABC est rectangle en A, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse (résultat connu sous le nom de « théorème de Thalès » dans beaucoup de langues…)



Appelons O le milieu de [BC] et M le projeté orthogonal de O sur (AC). Les triangles ABC et MOC sont en situation de Thalès, ce qui entraîne en particulier que M est le milieu de [AC]. Le triangle OAC est donc isocèle de sommet principal O, ce qui entraîne l'égalité des longueurs OC et OA et aussi OB. O est le centre d'un (du) cercle passant par A, B et C

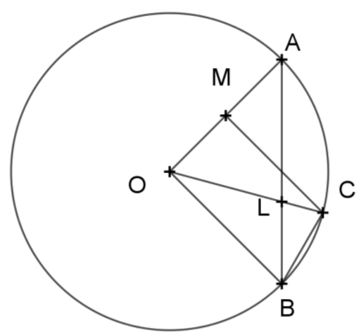
Deuxième rappel : Si les points A, B, C sont situés sur un même cercle de centre O, alors la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ (*angle inscrit dans le* cercle) est la moitié de celle de l'angle $\widehat{AOB}$ (*angle au centre interceptant l'arc* $\widehat{AB}$.



La figure ci-contre montre trois dispositions possibles : ou bien C_1 est le point diamétralement opposé à B sur le cercle, on est dans la situation précédente, un triangle rectangle est découpé en deux triangles isocèles. Ou bien le point diamétralement opposé à C_2 est un point de l'arc $\widehat{AB}$, et alors on regarde les triangles C_2AE et C_2BE (et on fait des sommes d'angles. Ou bien le point diamétralement opposé à C_3 est en dehors de l'arc $\widehat{AE}$ et on fera des différences de mesures d'angles.

Exercice 1 Première utilisation du théorème de l'angle inscrit

On donne un cercle de centre O et deux points A et B de ce cercle tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit droit. Par le milieu M de [OA] on mène la perpendiculaire à (OA) qui coupe le petit arc $\widehat{AB}$ en C. Les droites (AB) et (OC) se coupent en L. Montrer que le triangle BCL est isocèle.

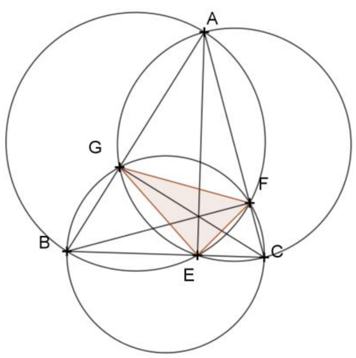


Observons d'abord que le triangle AOC est équilatéral : en effet, il est d'une part isocèle de sommet principal O (A et C sont des points d'un cercle de centre O) et d'autre part isocèle de sommet principal C (la hauteur issue de C est médiatrice de [AO]. Par conséquent, la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ est 60° et celle de $\widehat{COB}$ est 30°. Les angles $\widehat{OBC}$ et $\widehat{OCB}$ ont donc pour mesure 75°.

C'est là où intervient le *théorème de l'angle inscrit* : l'angle $\widehat{ABC}$ est inscrit dans le cercle. Son sommet est B et il intercepte l'arc $\widehat{AC}$. Cet arc est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOC}$. La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc la moitié de celle de $\widehat{AOC}$. $\widehat{ABC} = 30°$. On connaît donc deux angles du triangle BCL, qui mesurent respectivement 30° et 75°. Le troisième, $\widehat{CLB}$, a donc lui aussi pour mesure 75°. Le triangle BCL est isocèle de sommet principal B.

Exercice 2 Orthique et semblable

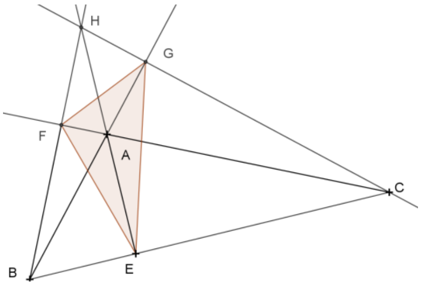
Le triangle EFG a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle ABC. Quelles peuvent être les mesures des angles du triangle ABC pour que ces deux triangles soient semblables ?



L'expression « *triangle orthi*que » associé à un triangle ABC désigne en effet le triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs du triangle ABC. Nous souhaitons que les deux triangles soient semblables, c'est-à-dire que leurs angles soient deux à deux de même mesure.

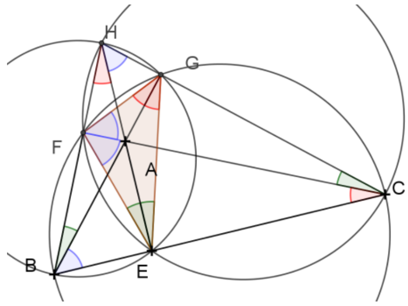
On peut établir facilement au préalable un résultat : *les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures des angles du triangle orthique*. Observons que les triangles ABE et ABF sont rectangles, ce qui se traduit par le fait que les points E et F appartiennent au cercle de diamètre [AB]. Dans le cas de figure représenté ci-contre, le triangle ABC a tous ses angles aigus (on dit qu'il est acutangle) et le théorème de l'angle inscrit (encore lui) indique que :

$\widehat{BAF} = 180 - \widehat{BEF} = 90 - \widehat{AEF}$. On établirait de même (en considérant des angles inscrits dans le cercle de diamètre [AC] que $\widehat{CAG} = 180 - \widehat{CEG} = 90 - \widehat{AEG}$. Comme $\widehat{CAG} = \widehat{BAF}$, on en déduit que $\widehat{AEG} = \widehat{AEF}$ ce qui caractérise la droite (AE) comme bissectrice de $\widehat{FEG}$.



Dans le cas où le triangle ABC possède un angle obtus, si on appelle H son orthocentre, remarquons que l'orthocentre du triangle HBC n'est autre que A (les points A, B, C et H forment ce qu'on appelle un *quadrangle orthocentrique*), que les triangles ABC et HBC ont le même triangle orthique, et que les hauteurs de l'un comme de l'autre (ce sont les mêmes) sont les bissectrices des angles du triangle orthique.

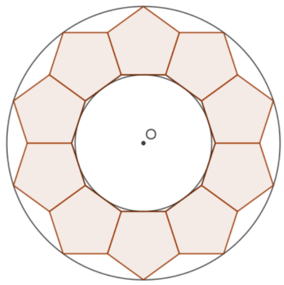
Revenons à nos moutons. Si on appelle α, β, γ les angles en A, B, C du triangle ABC, nous avons prouvé que $\widehat{GEF} = 180 - 2\alpha$ **dans le cas où le triangle ABC est acutangle**. On prouverait de même que $\widehat{EGF} = 180 - 2\gamma$ et $\widehat{EFG} = 180 - 2\beta$. Les deux triplets donnant les mesures des angles doivent être égaux. En rangeant les angles par ordre de grandeur, on obtient $\gamma = 180 - 2\alpha, \beta = 180 - 2\beta$ et $\alpha = 180 - 2\gamma$. Ces trois conditions conduisent à $\alpha = \beta = \gamma = 60$.

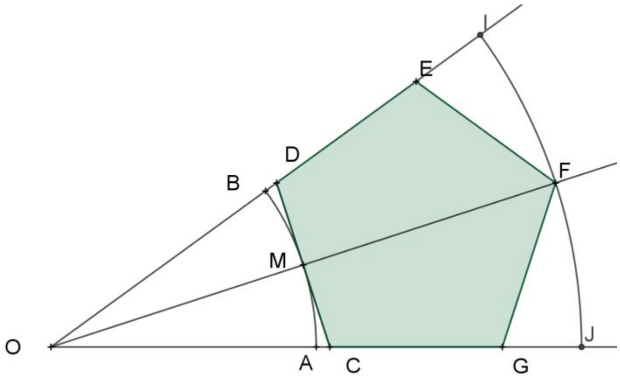


Dans le cas où le triangle ABC possède un angle obtus, la figure ci-contre montre que l'angle H du triangle HBC et l'angla A du triangle ABC sont supplémentaires. On parvient aux lettres près à des égalités comme $\alpha = 2\beta, \beta = 2\gamma$ et $\gamma = 2\alpha - 180$. Les angles mesurent $\frac{180}{7}, \frac{360}{è}, \frac{720}{è}$.

Exercice 3 Tournesol

Sur les côtés d'un décagone régulier, on place dix pentagones réguliers accolés. Quel est le rapport entre le rayon du cercle inscrit dans le décagone initial et celui du cercle circonscrit à la figure ?





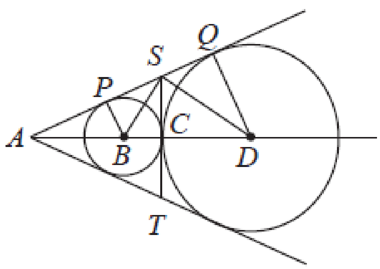
Le côté de chaque pentagone est égal au côté du décagone. Les angles du pentagone régulier ont pour mesure 108°, l'angle au centre du décagone a pour mesure 36°. Il s'ensuit que les points O, B, D et E sont alignés, tout comme les points O, A, C et G. Le triangle DEF est isocèle d'angle au sommet 108°. Les angles à la base mesurent donc 36°. L'angle $\widehat{DFM}$ mesure donc 18° (108/2−36 du fait de la symétrie). Il s'ensuit que le triangle DOF est isocèle de sommet principal D et que M est le milieu de [OF]. Le rayon du cercle circonscrit aux pétales est donc le double du rayon du cercle inscrit dans le cœur.

Exercice 4 Cercles tangents

On considère, comme dans la figure ci-contre, deux cercles (C_1) et (C_2) de centres respectifs B et D et de rayons respectifs 1 et r. Ces deux cercles sont tangents en C. La perpendiculaire en C à la droite (BD) coupe les tangentes communes aux deux cercles passant par A en S et T. La tangente commune passant par S touche les deux cercles (C_1) et (C_2) respectivement aux points P et Q.

a. Déterminer la valeur de r telle que $AS = ST = AT$.

b. Déterminer la valeur de r telle que $DQ = QP$.



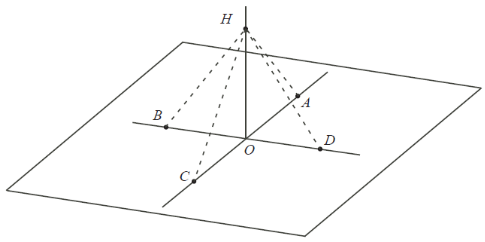
a. Le triangle AST est équilatéral et ses trois angles mesurent 60°.

Les deux triangles SPB et SBC sont rectangles respectivement en P et C avec l'hypoténuse en commun et deux côtés PB et BC de même longueur (rayon du même cercle). Ils sont donc isométriques et $\widehat{BSC} = \frac{1}{2}\widehat{AST} = 30°$.
Dans le triangle PSC rectangle en C, on a donc $\frac{CB}{SC} = \tan 30°$ dont on tire $SC = \sqrt{3}$.
Les triangles SCD et SDQ sont de même isométriques. Dans le triangle SDQ rectangle en Q, $\tan\widehat{QSD} = \frac{QD}{SQ} = \frac{r}{SC}$.
Or $\widehat{QSD} = \frac{1}{2}\widehat{QSD} = \frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$. On en tire $r = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$.
b. Les triangles SPB et SBC sont toujours isométriques de même que les triangles SQD et SCD.
On a donc $SP = SC = SQ$ et donc $PS = SQ = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}QD = \frac{1}{2}r$. D'autre part, si on pose $\widehat{BSC} = \theta°$, alors $\widehat{PSC} = 2\theta°$ d'où, successivement, $\widehat{CSQ} = 180° - 2\theta°$, $\widehat{DSQ} = 90° - \theta°$ et $\widehat{SDQ} = \theta°$. Les deux triangles rectangles BPS et SQD ont donc un angle de même mesure : ils sont donc semblables et $\frac{SQ}{PB} = \frac{QD}{PS}$ ce qui donne $r = 4$.

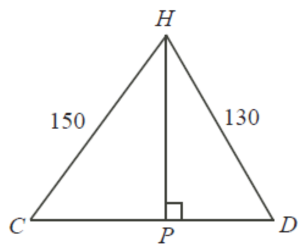
Exercice 5 Arrimer une montgolfière

a. On considère un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 60$ et $BC = 80$. On note H le pied de la hauteur issue du point B. Déterminer la distance HC.

b. On considère, comme dans la figure ci-contre, cinq points A, B, C, D et O situés dans un champ plat (modélisé par le plan Π) de telle façon que les droites (BD) et (AC) se coupent perpendiculairement en O.
On suppose que la distance de C à D est de 140 m. Une montgolfière est située au point H qui est sur la perpendiculaire au plan Π passant par le point O. Elle est retenue en place par quatre cordes $[HA]$, $[HB]$, $[HC]$ et $[HD]$. La corde $[HC]$ a une longueur de 150 m et la corde $[HD]$ a une longueur de 130 m. Déterminer la hauteur de la montgolfière au-dessus du champ.



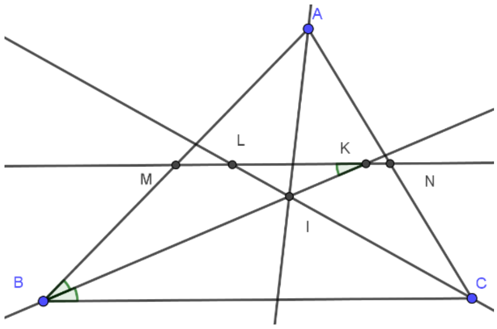
c. *Pour* réduire la quantité de corde utilisée, les cordes $[HC]$ et $[HD]$ seront remplacées par une seule corde $[HP]$, P étant un point situé sur la ligne droite qui relie C et D. (La montgolfière demeurant dans la même position H au-dessus de O que dans la question précédente). Déterminer la plus grande longueur de corde qu'il est possible d'épargner.



a. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on obtient $AC = 100$.
En calculant de deux manières différentes l'aire du triangle ABC, on obtient $BH = \frac{60 \times 80}{100} = 48$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HBC rectangle en H, on obtient $HC = 64$.
b. En notant $OC = c$, $OD = d$ et $OH = h$, et en se plaçant successivement dans les triangles HOC, HOD et COD tous rectangles en O, on obtient $h^2 + c^2 = 150^2$, $h^2 + d^2 = 130^2$ et $d^2 + c^2 = 140^2$. Des deux premières égalités on tire, $2h^2 + c^2 + d^2 = 150^2 + 130^2$, ce qui s'écrit, en utilisant la troisième égalité,
$2h^2 + 140^2 = 150^2 + 130^2$ soit $h = \sqrt{9900} = 30\sqrt{11}$ soit environ une hauteur de 99,5m.
c. On se place dans le triangle HCD et on pose $HP = x$ et $DP = a$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles HPD et HPC rectangles en P, on a $x^2 + a^2 = 130^2$ et $x^2 + (140 - a)^2 = 150^2$ d'où on tire après développement et simplification $280a = 14000$

Exercice 6 Bissectrices et droite des milieux

Soit ABC un triangle.
a. Montrer que les trois bissectrices intérieures du triangle sont concourantes. On notera I le point de concours.
b. *On* note M et N les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ et on note K et L les points d'intersection de la droite (MN) avec, respectivement, les droites (BI) et (CI).
Montrer que $AI + BI + CI > BC + LK$.



a. Soit O un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. SI on note E et F les projetés orthogonaux de O sur les droites (AB) et (AC), les triangles OEA et OFA sont rectangles avec l'hypoténuse commune et les angles $\widehat{EAO}$ et $\widehat{FAO}$ de même mesure puisque (OA) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. On en déduit que $OE = OF$. Soit alors I le point d'intersection de deux des trois bissectrices intérieures du triangle ABC, on montre facilement qu'il est à égale distance des trois côtés du triangle et dont sur la troisième bissectrice.

b. M et N étant les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $MN = \frac{1}{2}BC$.

On en déduit l'égalité $\widehat{MKB} = \widehat{KBC}$ (angles alternes-internes).

(KB) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, on a aussi

$\widehat{KBC} = \widehat{KBM}$. Le triangle MKB est donc isocèle en M

et $MK = MB = \frac{1}{2}AB$ (car M est le milieu de $[AB]$).

On démontrerait de même que $LN = NC = \frac{1}{2}AC$.

De plus, l'inégalité triangulaire donne $AI + IB > AB$, $BI + IC > BC$ et $CI + IA > CA$ d'où l'on tire $AI + BI + CI > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ soit $AI + BI + CI > MK + LN + MN$.

En considérant différentes positions relatives des points M, N, L et K, on montre que $MK + LN = LK + MN$.

On obtient donc $AI + BI + CI > KL + 2MN$ soit $AI + BI + CI > LK + BC$.

Thème : Nombres

Exercice 1 Répétition
Parmi les nombres entiers s'écrivant avec deux chiffres dans le système décimal, quels sont ceux dont le carré se termine par les deux chiffres de départ ?

On cherche les nombres $N = 10a + b$ pour lesquels $(10a + b)^2 = 100c + 10a + b$, où a est un chiffre compris entre 1 et 9, b un chiffre compris entre 0 et 9 et c un entier compris entre 1 et 98.
On a $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Il s'ensuit que b^2 a b pour chiffre des unités, ce qui laisse comme possibilités :

b	b^2	$20ab + b^2$	N
0	0	0	*Pas de solution ici*
1	1	$20a + 1$	*Pas de solution ici*
5	25	$100a + 25$	25
6	36	$120a + 36$	76

Exercice 2 À la queue leu leu
On fabrique un entier (assez grand…) en écrivant les uns à la suite des autres les nombres entiers, de 1 à 2 020, en omettant chaque fois qu'il pourrait apparaître le chiffre 7. Le nombre obtenu est-il divisible par 3 ?

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 interviennent chacun 202 fois comme chiffres des unités. La somme de ces chiffres, 7 excepté, est 38. Dans la division euclidienne par 3, ce nombre a pour reste 2. Multiplié par 202, cela fait 404, dont le reste par 3 est 2.
Les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 interviennent chacun 20 fois comme chiffre des dizaines, 1 et 2 intervenant une fois de plus. Comme précédemment, nous devons considérer 20x38, dont le reste par 3 est 1. On ajoute 1+2, cela ne change pas le reste, qui demeure 1. Si on l'ajoute au reste précédent, cela fait 3, dont le total est multiple de 3.
Reste à considérer les chiffres des centaines, donc 2 fois 1+2+3+4+5+6+8+9, soit 76, dont le reste par 3 est 1. Les chiffres des milliers 1 apparaît 1 000 fois (reste 1 dans la division par 3) et 2 apparaît 21 fois (multiple de 3). Le reste par 3 du nombre obtenu est donc 2.

Exercice 3 Que de propriétés !
Déterminer tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que c soit un nombre premier et $a^b + c$ et $a^b - c$ soient des carrés parfaits.

On veut qu'il existe deux entiers x et y tels que $a^b + c = x^2$ et $a^b - c = y^2$, dont on déduit l'égalité $2c = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. On en déduit que 2 (qui est premier) divise $x - y$ ou 2 divise $+y$.
Or $x + y$ et $x - y$ ont même parité (différence multiple de 2) donc 2 divise les deux, ce qui revient à dire qu'il existe un entier k tel que $2c = 4k$ ce qui signifie que c est pair. Comme c est un nombre premier, $c = 2$.
L'égalité $(x - y)(x + y) = 2c$ s'écrit alors $(x - y)(x + y) = 4$ et conduit, puisque $x + y$ et $x - y$ ont même parité, à la seule possibilité $x - y = x + y = 2$ soit $x = 2$ et $y = 0$, ce qui donne ensuite $a = 2$ et $b = 1$.
Il n'y a donc qu'un triplet solution : (2,1,2).

Exercice 4 Raisonnement rationnel
Existe-t-il des valeurs de l'entier n pour lesquelles le nombre $N = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ soit rationnel ?

Écrivons $N = \frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$ en multipliant numérateur et dénominateur (si on peut dire) par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
On voit que $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ est rationnel seulement si $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ est rationnel. S'il en est ainsi, leur somme et leur différence le sont. $2\sqrt{n+1}$ et $2\sqrt{n-1}$ doivent donc être rationnels, $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n-1}$ aussi.
Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{n+1} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré, on obtient $q^2(n + 1) = p^2$.
On fait appel à la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers : les nombres premiers intervenant dans les décompositions de q ou p y sont à des puissances paires, ceux qui ne figurent pas dans la décomposition

de q apparaissent dans la décomposition de $n+1$. $n+1$ est donc le carré d'un entier. Une démarche identique montre que $n-1$ est aussi le carré d'un entier. Il existe donc des entiers a et b tels que $(n+1)-(n-1)=a^2-b^2$ ou encore $a^2-b^2=2$ qui n'a pas de solution en entiers naturels. Nn'est pas rationnel.

Exercice 5 Différence carrée

Jean est plus âgé que Jeanne. Il observe que leurs âges sont formés des deux mêmes chiffres, intervertis. La différence entre les carrés de ces âges est elle aussi un carré parfait.
Quels âges ont-ils ?

Appelons $G=10a+b$ et $F=10b+a$ les âges de Jean et Jeanne exprimés dans le système décimal. L'énoncé indique que $a \geq b$ et que $D=100a^2+20ab+b^2-(100b^2+20ab+a^2)$ est un carré parfait. On peut écrire

$$D=99(a^2-b^2)$$

Les carrés multiples de 99 sont multiples de 1 089 = 9 x 121. On cherche les multiples de 11 parmi les valeurs de a^2-b^2. Si 11, qui est un nombre premier, est un diviseur de $(a+b)(a-b)$, il divise un des facteurs du produit, qui ne peut être que $(a+b)$, car la différence $a-b$ est plus petite que 9. On est donc ramené à la seule hypothèse acceptable $a=6, b=5$. Cela donne $G=65, F=56\ et\ F^2-G^2=1\,089=33^2$

Exercice 6 Deux très grands nombres

Quel est le chiffre des unités de $5^{2019}-3^{2019}$?

Toutes les puissances de 5 ont le même chiffre des unités, à savoir 5. On regarde sur les premières puissances et on peut voir, de proche en proche que si un nombre n est une puissance de 5 et a pour chiffre des unités 5, ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que $n=10k+5$, alors $n\times 5=50k+25=10(5k+2)+5$ qui est un nombre dont le chiffre des unités est encore 5.
Pour les puissances de 3, on peut constater par un raisonnement analogue qu'il existe une régularité cyclique pour les chiffres des unités des puissances de 3, cette régularité étant : 3,9,7,1,3,9,7,1..., dont la période est 4. Comme $2019=4\times 504+3$, le chiffre des unités de 3^{2019} est donc le même que celui de 3^3 soit 7.
On en déduit que le chiffre des unités de $5^{2019}-3^{2019}$ est 8.

Exercice 7 Calcul d'une somme

On peut former le nombre entier 2019 en « arrangeant » deux entiers positifs consécutifs de deux chiffres, soit 19 et 20, en ordre décroissant. Quelle est la somme de tous les entiers positifs à quatre chiffres qui peuvent être ainsi formés (de deux entiers positifs consécutifs de deux chiffres, en ordre décroissant) et strictement supérieurs à 2019 ?

En respectant les conditions imposées dans le problème, le plus petit entier supérieur à 2019 pouvant être ainsi formé l'est avec les entiers 20 et 21, afin d'obtenir l'entier à quatre chiffres 2120 et le plus grand entier que l'on peut former de cette manière est 9998. Donc la liste des entiers pouvant ainsi être formés est : 2120, 2221, 2322, ..., 9796, 9897, 9998. La somme S de ces entiers est :
$S=2120+2221+2322+\cdots+9796+9897+9998$
soit $S=(2100+2200+2300+\cdots+9700+9800+9900)+(20+21+22+\cdots+96+97+99)$
soit $S=100(21+22+23+\cdots+96+97+98+99)+(20+21+22+\cdots+96+97+98)$
soit $S=101(21+22+23+\cdots+97+98+99)+20-99$
soit $S=101\big((21+99)+(22+98)+\cdots+(59+61)+60\big)-79=101\times 79\times 60-79=478\,661$

Équations, égalités, inégalités, inéquations

Exercice 1 Équation à trois inconnues

Déterminer les entiers a, b, c tels que : $\begin{cases} a+b+c=18 \\ a^2+b^2+c^2=756 \\ a^2=bc \end{cases}$

Calculons $756=(a+b+c)^2-2a^2-2a(b+c)$

Donc $432=-2a^2-2a(b+c)$ ou encore $216=-a(a+b+c)$, d'où on tire $a=-12$.

On en déduit que $b+c=30$ et $bc=144$.

Écrivons les couples de nombres dont le produit vaut 144 :

b	1	2	3	4	6	8	9	12
c	144	72	48	36	24	18	16	12
$b+c$	145	74	51	40	30	26	25	24

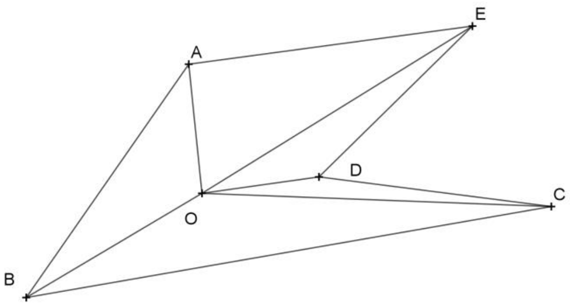
Comme b et c jouent des rôles symétriques, les triplets solutions sont $(-12, 6, 24)$ et $(-12, 24, 6)$

Exercice 2 Au pentagone

Un pentagone est tel que, parmi ses angles intérieurs :

- deux ont la même mesure ;
- un a pour mesure la somme des mesures de deux autres ;
- un a pour mesure la somme des mesures de trois autres ;
- un a pour mesure la somme des mesures des quatre autres.

Quelles sont ces mesures ?



Nous allons supposer que le pentagone est convexe ou pour le moins « étoilé », c'est-à-dire décomposable en un « puzzle » de triangles, comme sur la figure ci-contre. Il y a 5 angles intérieurs, dont la somme fait cinq fois la somme des angles d'un triangle moins 360° pour les angles tournant autour du point O. Cette somme est donc $900-360=540°$. Appelons x la mesure du plus grand angle. On a $2x=540$, donc $x=270°$. Le suivant en ordre décroissant, que nous appelons y, satisfait $2y=270$, donc $y=135°$. Le suivant vérifie donc $2z=135$, donc $z=67{,}5°$ et les deux derniers ont la même mesure (il est impossible que l'un des deux fût un de eux cités précédemment, sa mesure aurait été strictement plus grande que sa mesure…). Les deux derniers angles mesurent donc 33,75°.

Exercice 3 Combien de triplets ?

Combien de triplets (a, b, c) d'entiers compris entre 0 et 99 sont-ils solutions de l'équation $|a-b|=|b-c|$?

L'égalité $|a-b|=|b-c|$ se traduit par $a-b=c-b$, c'est-à-dire $a=c$ ou $a-b=b-c$.

De la première sorte, il y a 100×100 triplets (choix de a puis choix de b)

L'égalité $a+c=2b$ implique que $2b\geq a$. Une fois a choisi, il y a $99-a$ entiers compris entre a et 100, dont il ne faut considérer que les nombres pairs : si a est pair, il y a $99-a+1$ nombres compris entre a et 99, dont la moitié sont pairs ($\frac{100-a}{2}$, donc) ; si a est impair, les nombres pairs compris entre a et 99 sont $\frac{100-a-1}{2}$.

Le choix de a s'effectue entre 50 entiers pairs et 50 impairs, il est suivi du choix de b, le choix de c est univoque.

Il y a donc $50+49+49+48+48+\cdots+2+1+1$ choix possibles du couple (a, b). Rappelons qu'on peut calculer cette somme en l'écrivant sur deux lignes

49	48	47	46	…	…			2	1
1	2	3	4	…	…			48	49
50	50								50

On obtient donc 50 x 50 choix. Au total, 12 500

Exercice 4 Mobilités

Une automobile, une moto, un vélo électrique et une trottinette circulent sur une même route. L'automobile et le vélo électrique circulent dans un sens, la moto et la trottinette dans l'autre sens. Ils sont censés se déplacer tous à vitesse constante (pas la même, évidemment).

L'automobile double le vélo électrique à 12 h 00, et rencontre la trottinette et la moto respectivement à 14 h 00 et à 16 h 00.

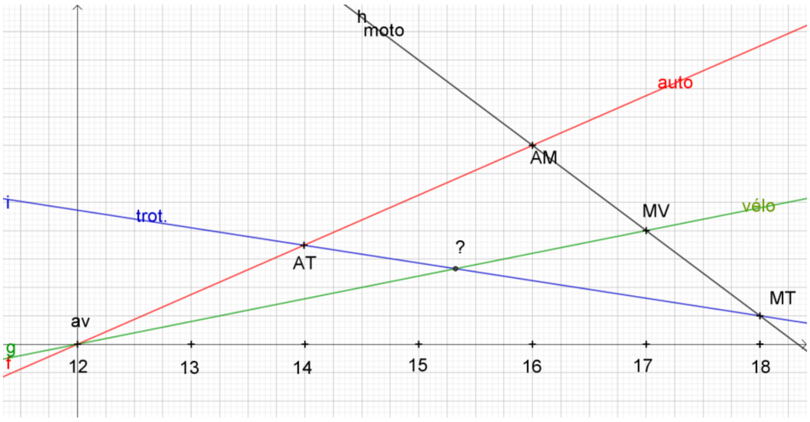
La moto croise le vélo électrique à 17 h 00 et double la trottinette à 18 h 00.

À quelle heure le vélo électrique croise-t-il la trottinette ?

Résolution graphique : on n'a pas fait figurer d'échelle des distances, elle est inconnue. On retient simplement que les droites « vélo » et « trot. » sont les médianes d'un certain triangle dont on cherche l'abscisse du centre de gravité…

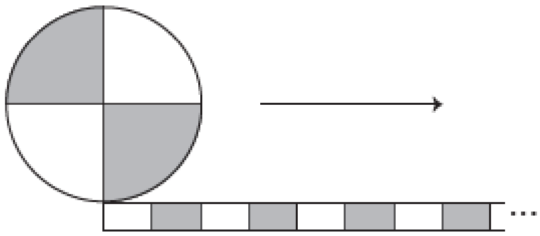
En effet, le point AT a pour abscisse 14, demi-somme de 12 et 16. Il est donc le milieu du segment d'extrémités av et AM.

De même le point MV est le milieu du segment d'extrémités AM et MT.



Exercice 5 La roue tourne, on ne gagne rien

Un chemin d'une longueur de 14 m est constitué de 7 bandes non ombrées de 1 m chacune en alternance avec 7 bandes ombrées de 1 m chacune. Une roue circulaire de rayon 2 m est divisée en quatre quarts de manière que les secteurs alternent les zones ombrées et celles non ombrées. La roue roule à une vitesse constante le long du chemin.



Si la roue fait exactement un tour complet à partir de la position de la figure, déterminer la proportion de temps pendant lequel une section ombrée de la roue touche une section ombrée du chemin.

Puisque la roue roule à la vitesse constante v, alors le temps pendant lequel une partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin sera proportionnel à la longueur totale du chemin où il y a un contact entre les zones ombrées.

La longueur totale du chemin est 14 et la circonférence de la roue (cercle de rayon 2) vaut 4π. La roue pourra donc bien faire un tour complet sur le chemin. De plus, chaque zone ombrée correspond à un arc de longueur π.

Lorsque la roue tourne une première fois, la première partie ombrée de la roue touche le chemin entre 0 et π . La roue continuant de tourner, la deuxième partie ombrée de la roue touche le chemin entre 2π et 3π.

Sur le chemin, les portions ombrées sont celles qui sont situées à des distances comprises entre $2k-1$ et $2k$ où k est un entier naturel non nul inférieur à 7.

Donc, la première partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin entre les distances 1 et 2 puis entre les distances 3 et π. La deuxième partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin entre les distances 7 et 8 et entre les distances 9 et 3π.

Donc la longueur totale de « ombré sur ombré » est égale à $1+(\pi-3)+1+(3\pi-9)$

soit $4\pi-10$. La longueur totale du chemin sur laquelle la roue tourne est 4π .

La proportion de temps cherchée est donc, puisque la roue tourne à une vitesse constante, égale au quotient $\frac{4\pi-10}{4\pi}$ ce qui vaut environ 0,20.

Exercice 6 À pied ou à trottinette ?
Aujourd'hui, Marc se rend à pied au collège. Lorsqu'il prend sa trottinette (en respectant le code de la route), il va quatre fois plus vite qu'à pied. Après avoir parcouru 1km, il calcule que pour terminer son trajet il lui faudra autant de temps que s'il était retourné (à pied) chez lui prendre sa trottinette et avait ensuite rejoint le collège.
Quelle est la distance entre son domicile et le collège ?

On raisonne avec des *vitesses moyennes* en supposant que ces moyennes sont les mêmes quel que soit le parcours. On note donc v la vitesse moyenne des déplacements à pied de Marc. La vitesse moyenne de ses déplacements à trottinette est donc $4v$. On note d la distance séparant le domicile de Marc du collège. L'énoncé se traduit donc par : $\frac{d-1}{v}=\frac{1}{v}+\frac{d}{4v}$.
Cette égalité s'écrit aussi $4d-4=4+d$ par réduction au même dénominateur (et on a fait disparaître v) et elle conduit à $3d=8$, soit $d=\frac{8}{3}$ (rappel : l'unité est le km).

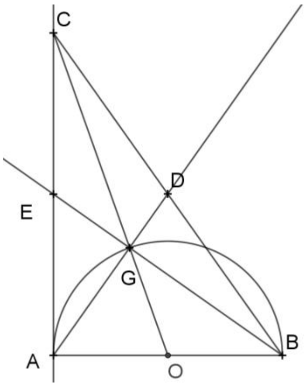
Exercice 7 En rêve ou en chocolat
Carole a un nombre de lingots d'or, tous de masses différentes. Elle donne à Benoît les 24 lingots les plus légers, qui forment 45% de la masse totale. Elle donne à Maya les 13 lingots les plus lourds, qui forment 26% de la masse totale. Elle donne les autres lingots à Blaise.
Combien de lingots Blaise reçoit-il ?

On peut supposer que les lingots ont une masse totale de 100.
Donc, les lingots que Benoît a reçus ont une masse totale de 45 et ceux que Maya a reçus ont une masse totale de 26.
Soit n le nombre de lingots que Blaise a reçus. Ces lingots ont une masse totale de 29 $(100-45-26)$.
On note $b_1, b_2, \dots, b_{24}$ les masses des lingots reçus par Benoît, masses rangées dans l'ordre croissant.
On note $m_1, m_2, \dots, m_{13}$ les masses des lingots reçus par Maya, masses rangées dans l'ordre croissant.
On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les masses des lingots reçus par Blaise, masses rangées dans l'ordre croissant.
On a alors : $b_1 < b_2 < \ \dots < b_{24} < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < m_1 < m_2 < \cdots < m_{13}$
et $b_1+b_2+\ \dots + \ b_{24}=45,\ x_1+\ x_2+\ \dots, +x_n=29\ ,\ m_1+\ m_2+\ \dots + \ m_{13}=26.$
On en tire, puisque le lingot le plus lourd reçu par Benoît a pour masse b_{24} : $45<24b_4$ soit $b_4>\frac{15}{8}$
Et, puisque le lingot le plus léger reçu par Maya a pour masse m_1, $m_1<\frac{26}{13}$ soit $m_1<2$.

Chacun des n lingots reçus par Blaise a une masse comprise entre b_{24} et m_1, donc
$\frac{15}{8}n<n\times b_{24}<x_1+\ x_2+\ \dots, +x_n<n\times m_1$ soit $n\times b_{24}<29<n\times m_1<2$
D'où $\frac{15}{8}n<29<2$. On ne tire $\frac{29}{2}<n<\frac{29\times 8}{15}$
Soit, puisque n est un entier $n=15$

Aires et volumes

Exercice 1 Aire d'un triangle rectangle particulier
Dans le triangle ABC rectangle en A, les médianes [AD] relative à l'hypoténuse et [BE] relative au côté [AC] sont perpendiculaires. Le côté [AB] mesure 1. Quelle est l'aire du triangle ?

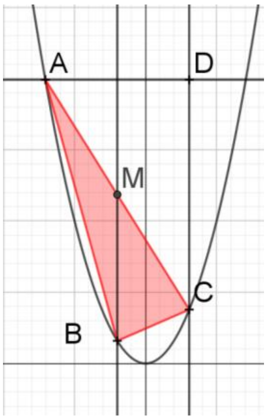


Les médianes du triangle ABC sont concourantes en G, centre de gravité du triangle, mais comme (AG) et (BG) sont perpendiculaires, on en déduit que G appartient à un demi-cercle de diamètre [AB], de centre O. D'où il ressort que $\mathrm{OG} = \frac{1}{2}$ et donc
(caractérisation des médianes) que $\mathrm{OC} \ = \frac{3}{2}$.
(caractérisation des médianes) que $\mathrm{OC} \ = \frac{3}{2}$.
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OAC rectangle en A, on obtient :

$$AC^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

On en déduit que l'aire de ABC est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Exercice 2 Archimède revu par Descartes
On considère, sur la parabole d'équation $y = x^2$, trois points A, B et C tels que les abscisses de A et B diffèrent de d ainsi que les abscisses de B et C. Quelle est l'aire du triangle ABC ?



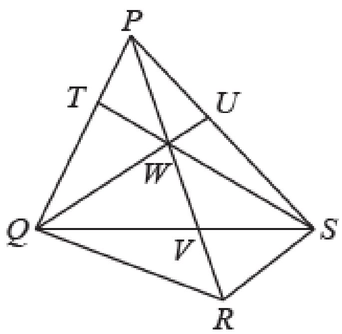
Les points A, B et C ont donc pour couples de coordonnées

$$A(x, x^2), B(x + d, (x + d)^2), C(x + 2d, (x + 2d)^2)$$

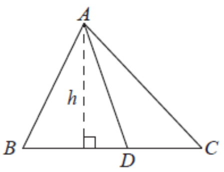
Le point M, milieu de [AC], a pour abscisse $x + d$ et pour ordonnée $\frac{x^2+(x+2d)^2}{2}$.
L'aire du triangle ABC est le double de celle de celle du triangle ABM (propriété de la médiane). Cette dernière est le demi-produit de la hauteur d par le côté BM, valeur absolue de la différence $y_M - y_B = \frac{x^2+(x+2d)^2}{2} - (x + d)^2 = d^2$
L'aire cherchée est donc $2d^2$.

***N.B.** La référence à Archimède renvoie à son évaluation de l'aire d'un segment de parabole ; il ne disposait pas, rappelons-le, d'une définition de la parabole comme courbe représentative d'une fonction.*

Exercice 3 Calculs d'aires Dans la figure ci-contre, $[PR]$ et $[QS]$ se coupent en V. Le point W est situé sur $[PV]$, le point U est situé sur $[PS]$ et le point T est situé sur $[PQ]$. De plus, $[QU]$ et $[ST]$ passent par le point W. On suppose qu'il existe un nombre réel x tel que :

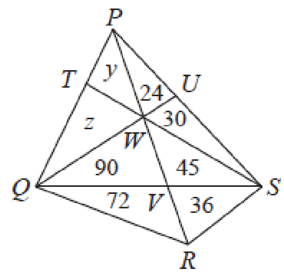


• l'aire du triangle PUW est égale à $4x + 4$,
• l'aire du triangle SUW est égale à $2x + 20$,
• l'aire du triangle SVW est égale à $5x + 20$,
• l'aire du triangle SVR est égale à $5x + 11$,
• l'aire du triangle QVR est égale à $8x + 32$,
• l'aire du triangle QVW est égale à $8x + 50$.
Déterminer l'aire du triangle PTW.



On peut démontrer que dans un triangle ABC si D est un point de la droite (BC) alors : $\frac{\text{Aire du triangle } ABD}{\text{Aire du triangle } ACD} = \frac{BD}{CD}$ car les deux triangles ont la même hauteur issue de A et que le quotient des aires est celui des bases associées.
En appliquant cela d'une part aux triangles QVW et SVW, d'autre part aux triangles

QVR et SVR, on obtient les égalités $\frac{8x+50}{5x+20} = \frac{QV}{SV} = \frac{8x+32}{5x+11}$ ce qui conduit à $(8x + 50)(5x + 11) = (5x + 20)(8x + 32)$ qui équivaut à $x = 5$.



Ceci permet de calculer les aires de certains triangles, comme sur la figure ci-contre dans laquelle y et z désignent respectivement les aires des triangles PTW et QTW.

On a $\frac{QV}{SV} = \frac{\text{Aire du triangle } QVW}{\text{Aire du triangle } SVW} = \frac{90}{45} = 2$.

Le point V appartient à la droite (QS) donc $2 = \frac{QV}{SV} = \frac{\text{Aire du triangle } PQV}{\text{Aire du triangle PSV}}$,

ce qui s'écrit $y + z + 90 = 2(24 + 30 + 45)$ soit $y + z = 108$.

Le point W appartient à la droite (TS) donc

$\frac{y}{54} = \frac{\text{Aire du triangle } PTW}{\text{Aire du triangle P}SW} = \frac{TW}{SW} = \frac{\text{Aire du triangle } QTW}{\text{Aire du triangle Q}SW} = \frac{z}{135}$,

ce qui s'écrit $135y = 54z$ soit $5y = 2z$.

On aboutit à l'équation $y + \frac{5}{2}y = 108$ soit $y = \frac{216}{7}$.

Exercice 4 La boîte de cubes

Soit n un entier naturel non nul. Un prisme rectangulaire de dimensions $8 \times 8 \times n$ est composé de cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$. On note A l'aire du prisme (somme des aires des faces) et B la somme des aires des cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dont est composé le prisme. Quelle est la somme de toutes les valeurs de n pour lesquelles $\frac{B}{A}$ est un entier ?

Le prisme rectangulaire a deux faces dont l'aire de chacune est de $8 \times 8 = 64$, et quatre faces dont l'aire de chacune est de $8 \times n$.Donc $A = 2 \times 64 + 4 \times 8 \times n = 128 + 32n$.

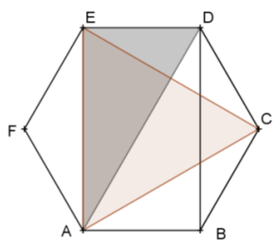
Le prisme est composé de $8 \times 8 \times n = 64 \times n$ cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ et de surface 6.

Donc $B = 6 \times 64 \times n = 384n$. On obtient donc $\frac{B}{A} = \frac{384n}{128 + 32n} = \frac{12n}{4+n}$.

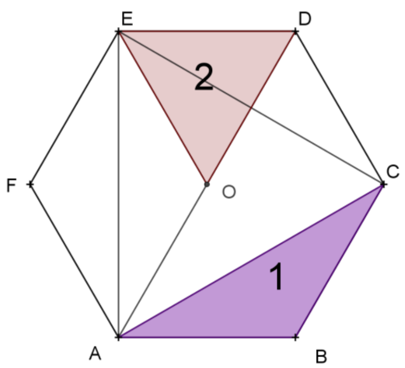
On remarque ensuite, en raisonnant par l'absurde, que si on note k l'entier (positif) $\frac{B}{A}$, alors $k \leq 11$ (sinon on obtient $0 \geq 48$). Il suffit alors de résoudre l'équation $\frac{12n}{4+n} = k$, où k est un entier compris entre 1 et 11, en ne gardant que les solutions entières c'est-à-dire 2, 4, 8, 12, 20 et 44 dont la somme vaut 90.

Exercice 5 Découpage

Trois triangles, dont les sommets sont pris parmi les sommets d'un hexagone régulier, ont des aires différentes.
Montrer que la somme de ces aires est égale à l'aire de l'hexagone.



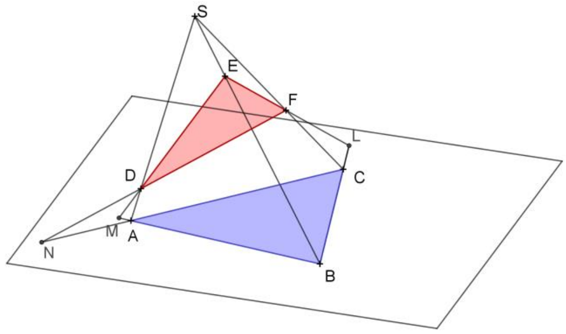
L'hexagone a pour côté R, qui est aussi le rayon de son cercle circonscrit. Une fois choisi un des sommets de l'hexagone, les deux autres sommets d'un triangle peuvent être ses deux voisins (exemple BCD), un de ses voisins et le troisième qui n'est voisin d'aucune des deux premiers (exemples EGA ou EGB), aucun de ses voisins et aucun des voisins des deux autres sommets (exemple ACE).



La figure ci-contre montre que l'hexagone est recouvert par 6 pièces de type 1 ou par 6 pièces de type 2. Le triangle ACE en prend 3, le triangle EDA en prend 2 et le triangle AFE est le dernier. 1+ 2 + 3 = 6.

Exercice 6 Le théorème de Desargues

Les points D, E, F sont respectivement situés sur les arêtes [SA], [SB] et [SC] du tétraèdre SABC. Les droites (DE) et (AB) se coupent en M, (DF) et (AC) en N, (BC) et (EF) en L.
Montrer que les points L, M et N sont alignés.



… ils sont alignés sur la droite intersection des plans (ABC) et (DEF).
Si on regarde la figure comme une figure plane (ce qu'elle est), on découvre le théorème (de géométrie plane) de Girard Desargues : « Si deux triangles ABC et DEF sont tels que les droites joignant leurs sommets homologues soient concourantes, alors les points d'intersection de leurs côtés homologues sont alignés »

Organisation de données, dénombrement, probabilités

Exercice 1 Algorithme… aléatoire
On part du nombre 1. Deux « opérations » sont autorisées :
- multiplier le nombre courant par 2 ;
- remplacer le nombre courant par un nombre s'écrivant avec exactement les mêmes chiffres en numération décimale (en s'interdisant de faire figurer un 0 comme chiffre le plus à gauche).
On peut utiliser à loisir et autant de fois qu'on veut chacune des opérations.
1. Est-il possible de parvenir au nombre 1 000 000 000 ?
2. Est-il possible de parvenir au nombre 9 876 543 210 ?

1. Le nombre 1 000 000 000 ne peut pas être obtenu par permutation des chiffres d'un autre, sinon on aurait un 0 à gauche. Il ne peut donc être obtenu que par multiplication par 2 à partir de 500 000 000. Même raisonnement, qui nous conduit à 250 000 000 . On peut parvenir à 125 000 000 et donc à 512 000 000. 512 est une puissance de 2, donc on peut parvenir à 1 000 000, puis 512 000 puis 1 000 puis 500 puis 512 et un peu plus tard remonter jusqu'à 1. La réponse est oui.
2. Pour remonter l'algorithme, on peut penser à permuter les chiffres du nombre de départ pour obtenir un nombre multiple de 8 ou de 4 ou de 2 (facile à voir). On effectue la division et on recommence. Mais on n'est pas sûr de ne pas parvenir à un nombre s'écrivant avec un seul chiffre impair…

Exercice 2 L'algorithme finit-il ?
19 balles ont été déposées, arbitrairement, dans 95 boîtes. On dispose par ailleurs d'une grande quantité de balles. Une *opération* consiste à déposer six balles, une par une, dans six boîtes.
Peut-on, en un nombre fini d'opérations, faire en sorte que toutes les boîtes contiennent le même nombre de balles ?

À la fin des opérations, on aura utilisé $19 + 6n$ balles qui seront réparties également dans 95 boîtes. On cherche donc l'entier n (le plus petit possible, on a autre chose à faire) pour lequel $19 + 6n$ est un multiple de 95.
Il existe dans ces conditions un entier k pour lequel $19 + 6n = 95k$ ou encore $6n = 19(5k - 1)$. 19 étant un nombre premier, on en déduit que $6n$, donc n sont des multiples de 19. On essaie :
$n = 19$ donne $6 = 5k - 1$ pas de solution
$n = 38$ donne $12 = 5k - 1$ pas de solution
$n = 57$ donne $24 = 5k - 1$ d'où $k = 5$.
On aura distribué 342 balles. Il y aura 19 balles dans chaque boîte.

Exercice 3 « N'oublie pas le pain ! »
Claude et Dominique font leurs comptes : parmi les 12 denrées alimentaires que le couple achète le plus souvent, chaque jour de courses leur en apporte 8. Pas toujours les mêmes : sur une période de référence, le couple a procédé k fois à des achats, chaque fois 8 denrées ont été achetées, et aucune denrée n'a été achetée le même nombre de fois qu'une autre. Quelle est la valeur minimale de k ?

Sur k jours de courses, le couple a effectué $8k$ achats et négligé $4k$ denrées.
Les 12 produits ont été négligés **au minimum** un 0 fois, un 1 fois, un 2 fois, etc., le onzième 10 fois et le douzième 11 fois. Le k minimum vérifie donc $4k \geq 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 11$
Soit $4k \geq 66$ ou encore $k \geq 17$, puisque k est entier.
On doit encore prouver qu'en 17 jours de courses, on peut retrouver le résultat. Voici :

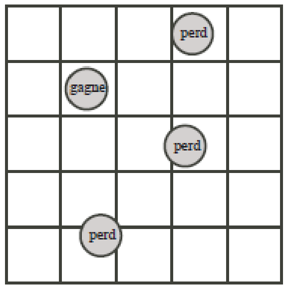
Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A																	
B																	
C																	
D																	
E																	

F																	
G																	
H																	
I																	
J																	
K																	
L																	

Les cases colorées représentent des achats effectués. Les non-achats sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 13 et on a bien 8 achats par jour.

Exercice 4 Un jeu de palet

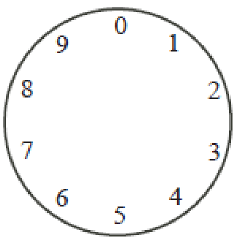
Un disque ayant un diamètre de 8 cm est lancé sur un quadrillage 5 sur 5 dont les carreaux mesurent chacun 10 cm sur 10 cm. Le disque est dans une position gagnante si aucune partie du disque ne touche ou ne traverse une ligne du quadrillage. Autrement, il est dans une position perdante. On suppose que le disque tombe toujours au hasard et qu'aucune partie du disque ne tombe à l'extérieur du quadrillage. Quelle est la probabilité pour que le disque tombe en position gagnante ?



Puisque le quadrillage 5 sur 5 est formé de carreaux mesurant chacun 10 cm sur 10 cm, le quadrillage au complet mesure 50 cm sur 50 cm. Puisque le disque a un diamètre de 8 cm, il a un rayon de 4 cm. On considère où tombe le centre du disque, puisque cela détermine la position du disque. Puisqu'aucune partie du disque ne tombe à l'extérieur du quadrillage, alors le centre du disque doit tomber à plus de 4 cm (soit 1 rayon) des bords du quadrillage. Le centre du disque doit donc tomber dans une région qui s'étend de 4 cm du bord gauche à 4 cm du bord droit (soit une largeur de 42 cm, puisque 50−4−4 = 42) et de 4 cm du bord supérieur à 4 cm du bord inférieur (soit une hauteur de 42 cm, puisque 50−4−4 = 42).
Donc pour que le disque tombe à l'intérieur du quadrillage, le centre du disque doit tomber dans un carré qui mesure 42 cm sur 42 cm. Ce carré a une aire de 1764 cm^2 (42×42).
On considère un des 25 carreaux. Le disque tombe à l'intérieur du carreau si son centre tombe à plus de 4 cm des bords. La région permise à l'intérieur du carreau a donc une largeur et une hauteur de 2 cm. ($10 - 4 - 4$). Il y a 25 telles régions, soit une par carreau. L'aire totale des régions dans lesquelles le centre du disque peut tomber en position gagnante est donc égale à $25 \times 2 \times 2$ cm^2, soit 100 cm^2.
Comme le disque tombe toujours au hasard, la probabilité pour que le disque tombe en position gagnante est égale à l'aire totale des régions gagnantes divisée par l'aire de l'intérieur du quadrillage dans lequel le centre du disque peut tomber. Elle est donc égale à $\frac{100}{1764}$ soit $\frac{25}{441}$.

Exercice 5 Où donc s'arrêtera-t-il ?

Stéphane place un jeton sur le 0 de la figure ci-contre. A chaque étape, le jeton est déplacé dans le sens des aiguilles d'une montre en respectant le processus suivant :



- à l'étape 1, le jeton est déplacé de 1^1 place,
- à l'étape 2, le jeton est déplacé de 2^2 places (aboutissant sur le 5),
- à l'étape 3, le jeton est déplacé de 3^3 places (aboutissant sur le 4…

Stéphane continue de la sorte, en déplaçant le jeton de n^n à l'étape n.
Quelle sera la position du jeton à l'issue de l'étape 1234 ?

Pour déterminer la position finale, il faut déterminer la somme des nombres de places dont le jeton a été déplacé dans chacune des étapes jusqu'à la 1234^e étape. On veut donc déterminer la somme

$$S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 1233^{1233} + 1234^{1234}.$$

Or, puisqu'il faut un déplacement de 10 places pour faire le tour, seul le chiffre des unités du nombre de places occupées successivement dans les déplacements est utile. Soit $u(n)$ le chiffre des unités de l'entier positif , il suffit donc de déterminer le chiffre des unités de la somme des nombres de déplacements, c'est-à-dire le nombre

$$u\big(u(1^1)+u(2^2)+\cdots+u(1233^{1233})+u(1234^{1234})\big)$$

Pour calculer $u(n^n)$, on ne se préoccupe que du chiffre $u(n)$ des unités de n, ce qui revient à déterminer le chiffre des unités de $(u(n))^n$ et on peut, à chaque étape du processus, s'en tenir au chiffre des unités (puisque seul le chiffre des unités a un effet sur les chiffres des unités qui suivent).

Par exemple, pour calculer $u(13^{13})=u\big((u(13)^{13})\big)=u(3^{13})$, ce qui revient à chercher le chiffre des unités de $3\times3\times3\times\ldots\times3\times3$ en ne gardant que le chiffre des unités, au fur et à masure du calcul du produit, ce qui donne :

$$3,9,27\ \rightarrow 7,21\rightarrow 1,3,9,27\rightarrow 7\ldots$$

On constate une périodicité de 4, ce qui conduite à $u(13^{13})=3$

On considère maintenant les valeurs possibles de $u(n)$ et, en calculant les valeurs successives des puissances, on constate que :

- si $u(n)$ vaut 0, 1, 5 ou 6, alors, pour tout entier k strictement positif, les valeurs respectives de $u\big(n^k\big)$ sont 0, 1, 5 et 6 car dans chaque cas, $u(n^2)=u(n)$,
- si $u(n)=2$, alors le chiffre des unités des puissances de n effectue le cycle 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6 …,
- si $u(n)=3$, alors le chiffre des unités des puissances de n effectue le cycle 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1 …,
- si $u(n)=4$, alors le chiffre des unités des puissances de n effectue le cycle 4, 6, 4, 6…,
- si $u(n)=7$, alors le chiffre des unités des puissances de n effectue le cycle 7, 9, 3, 1, 7, 9,…,
- si $u(n)=8$, alors le chiffre des unités des puissances de n effectue le cycle 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2…,
- si $u(n)=9$, alors le chiffre des unités des puissances de n effectue le cycle 9, 1, 9, 1….

On détermine maintenant $u(n^n)$:

- si $u(n)$ vaut 0, 1, 5 ou 6, les valeurs respectives de $u(n^n)$ sont 0, 1, 5 et 6,
- si $u(n)=2$, alors $u(n^n)$ sera égal à 2 ou à 4, selon la valeur (paire) de n (en position 2 ou en position 4 dans le cycle de longueur 4). Par exemple, $u(2^2)=4$ et $u(12^{12})=6$ (car 12 est multiple de 4),
- si $u(n)=3$, alors, de même $u(n^n)$ sera alternativement égal à 3 ou 7,
- si $u(n)=4$, alors $u(n^n)=6$, puisque l'exposant est pair et le chiffre des unités sera donc celui qui apparaît dans les positions paires du cycle 4, 6, 4, 6….
- si $u(n)=7$, alors $u(n^n)$ sera égal à 3 ou à 7 suivant la valeur (impair) de n(en position 1 ou en position 3 dans le cycle de longueur 4),
- si $u(n)=8$, alors $u(n^n)$ sera égal à 2 ou à 4, selon la valeur (paire) de n (voir le cas $u(n)=2$)
- si $u(n)=9$, alors $u(n^n)=9$, puisque l'exposant est impair et le chiffre des unités sera donc celui qui apparaît dans les positions impaires du cycle.

Puisque le chiffre des unités de n suit un cycle de longueur 10 et que le chiffre des unités de n^n suit un cycle de longueur 1, 2 ou 4, alors les valeurs de $u(n^n)$ suivent un cycle de longueur 20 (soit le plus petit commun multiple de 10, 1, 2 et 4).

Plus précisément :

$u(1)+u(2)+\cdots+u(20)=u(1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6+5+6+7+4+9+0)=u(94)=4$.

Pour calculer le total après 1234 étapes, on remarque qu'après 61 cycles de 20 étapes, on a effectué 1220 étapes. Après ces 1220 étapes, le chiffre des unités de la somme est égal à $u(61\times4)=u(244)=4$.

On ajoute ensuite les chiffres des unités de la somme des 14 étapes suivantes, en commençant au début du cycle. On obtient la position finale qui est égale au chiffre des unités, soit :

$$u(4+(1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6))=u(67)=7$$

Donc, la position finale du jeton est 7

.