ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Lycée Marie Curie
Versailles

Une femme des Lumières

Gabrielle-Emilie Le Tonnelier de Breteuil, marquise du Châtelet (1706-1749) a bénéficié des mêmes enseignements que ses frères et s'est montrée rapidement brillante en tout, sciences, langues, chant, musique, danse. Elle aime particulièrement les mathématiques.
Maupertuis puis Voltaire, avec lequel elle partage son existence durant 15 ans, l'aident à découvrir l'œuvre d'Isaac Newton. Sa traduction des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* sera publiée après son décès.
« J'ai perdu un ami de vingt-cinq années, un grand homme qui n'avait de défaut que d'être femme (…) On ne lui a pas peut-être rendu justice pendant sa vie » (Voltaire)

Stage préolympique ouvert aux lycéennes et lycéens de première désignés par leurs établissements, les 19 et 20 décembre 2022

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christophe VITALIS, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Michel ABADIE (lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sylvain MAGNE (Lycée Suger, VAUCRESSON), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES)
… Et les professeurs accompagnant leurs élèves :

Emploi du temps

Lundi 19 décembre 2022

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Accueil		
10 h 10	Arithmétique D.C.	Géométrie S.Ma.	Calcul littéral C.D.
12 h 10	Repas		
13 h 10	Dénombrement M.A.	Arithmétique D.C.	Géométrie S.Ma.
15 h 10	Films		

Mardi 20 décembre 2022

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Accueil		
10 h 10	Géométrie S. Ma.	Calcul littéral C.D.	Arithmétique S.Mo.
12 h 45	Repas		
13 h 15	Calcul littéral C.D.	Dénombrements M.A.	Dénombrement S. Mo.
15 h 10	Bijections		

Arithmétique

Exercice 1 $2\ 022$ comme produit

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers tels que $1 < a < b$ et $ab = 2\ 022$.

Comme la décomposition en facteurs premiers de 2 022 est $2\ 022 = 2 \times 3 \times 337$, les seules décompositions en produit de deux entiers vérifiant les conditions imposées sont $2\ 022 = 2 \times 1\ 011, 2\ 022 = 3 \times 674$ et $2\ 022 = 6 \times 337$. Les couples cherchés sont donc les couples $(2{,}1\ 011), (3{,}674)), (6{,}337)$.

Exercice 2 « On n'est pas sérieux quand on a 17 ans »

Soit c et d deux entiers strictement positifs tels que $\frac{2c+1}{2d+1} = \frac{1}{17}$. Quelle la la valeur minimale de l'entier d ?

L'égalité $\frac{2c+1}{2d+1} = \frac{1}{17}$ s'écrit aussi $17(2c + 1) = 2d + 1$ soit, après simplifications, $d = 17c + 8$.
Comme c est un entier strictement positif et la fonction affine $c \mapsto 17c + 8$ est croissante sur **R**, la valeur minimale de d est obtenue pour $c = 1$ soit $d = 25$.

Exercice 3 On fabrique un nombre non décimal

1. Montrer que si a, b et c sont trois entiers naturels non nuls consécutifs alors la somme $ab + bc + ca$ n'est pas un multiple de 3.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ n'est pas un nombre décimal.

1. Si trois entiers sont consécutifs, il existe un entier k tel que ces entiers puissent s'écrire $3k - 1, 3k, 3k + 1$.
   La somme étant commutative, le produit $ab + bc + ca$ peut donc s'écrire
   $S = 3k(3k - 1) + 3k(3k + 1) + (3k - 1)(3k + 1) = 3k(3k - 1 + 3k + 1) + (3k^2 - 1)$
   Soit $S = 3k(6k) + 3k^2 - 1 = 3(7k^2 - 1) + 2$.
   Comme $(7k^2 - 1)$ est un entier, cela signifie que le reste de la division euclidienne de S par 3 est 2 et donc S n'est pas un multiple de 2.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, $N = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)+n(n+2)+n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$.
   D'après la question précédente la somme $S = (n + 1)(n + 2) + n(n + 2) + n(n + 1)$ n'est pas un multiple de 3. Si le nombre N était un nombre décimal, il existerait un entier A et un entier k tel que $N = \frac{A}{10^k}$. On aurait alors $A \times n(n + 1)(n + 2) = 10^k \times S$. Cette égalité est incompatible avec le fait que $A \times n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3 alors que $10^k \times S$ ne l'est pas.
   Donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 4 - Carrés parfaits

1. Quelle est le plus petit entier strictement positif k tel que l'entier $84 \times k$ soit un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).
2. Quel est le plus grand entier naturel l tel que $0 < l \leq 6\ 000$ et $572 \times l$ est un carré parfait ?
3. Démontrer que si m est un entier strictement positif et inférieur à 200 alors $525\ 000 \times m$ ne peut être un carré parfait.
4. On considère les cinquante premières puissances impaires de 10 $(10, 10^3, 10^5, \ldots, 10^{99})$. Démontrer que la somme de trois quelconques de ces puissances (différentes) n'est pas un carré parfait.

   On commence par rappeler que tout entier naturel peut se décomposer en produit de puissances de nombres premiers et remarquer qu'un entier naturel est un carré parfait si et seulement si la puissance de chaque facteur premier de sa décomposition est paire.

1. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. L'entier k est donc le plus petit entier naturel tel que le produit $84k$ soit un carré parfait si et seulement si 3 et 7 sont élevés à la plus petite puissance paire supérieure ou égal à 1 soit 2. On a donc $k = 3 \times 7 = 21$ et $84k = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = 42^2$.
2. $572 = 2^2 \times 11 \times 13$. Par le même raisonnement, on cherche donc le plus grand entier l tel qu'il existe un entier n tel que $0 < l \leq 6\ 000$ et $l = 11 \times 13 \times n^2 = 143n^2$.

Comme $\frac{6\,000}{143} \approx 41{,}96$, l'inégalité $0 < l \leq 6\,000$ se traduit par $n^2 \leq 41$ soit $n \leq 6$ puisque n est un entier. Le plus grand entier l cherché est donc $l = 11 \times 13 \times 6^2 = 5\,148$.

3. $525\,000 = 2^3 \times 3 \times 5^5 \times 7$. Le nombre $525\,000 \times m$ est un carré parfait (non nul) si et seulement s'il existe un entier strictement positif n tel que $m = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n^2 = 210n^2$, ce qui est incompatible avec la condition $m < 200$.
4. Considérons trois puissances impaires de 10 : $10^a, 10^b, 10^c$ où $a < b < c$. Soit $S = 10^a + 10^b + 10^c$.
   $S = 10^a + 10^b + 10^c = 10^a\left(1 + 10^{b-a} + 10^{c-a}\right)$. Comme $a < b < c$, 10^{b-a} et 10^{c-a} sont des entiers strictement positifs pairs et donc $1 + 10^{b-a} + 10^{c-a}$ est un entier impair d donc ne contenant pas 2 dans sa décomposition en facteurs premiers. Comme $S = 10^a \times d = 2^a \times 5^a \times d$, le facteur 2 reste à la puissance impaire a dans la décomposition de S qui ne peut donc pas être un carré parfait.

Remarque : le résultat se généralise à trois puissances quelconques deux à deux distinctes de 10. En effet, si $S = 10^a + 10^b + 10^c$. Comme a, b , c sont distincts, la somme s des chiffres de S est 3 donc 3 divise S. Si S était un carré parfait, S serait donc divisible par 9 ce qui n'est pas le cas.

Exercice 5 Somme des diviseurs

Soit n un entier naturel, on note $S(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Par exemple $S(21) = 1 + 3 + 7 + 21 = 32$.

1. Déterminer le nombre premier impair p tel que $S(2p^2) = 2\,613$.
2. Déterminer tous les couples d'entiers naturels consécutifs (m, n) tels qu'il existe deux nombres premiers p et q supérieurs ou égaux à 3 pour lesquels $m = 2p, n = 9q$ et $S(m) = S(n)$.
3. Déterminer le nombre de couples d'entiers premiers distincts p et q inférieurs à 30 pour lesquels $S(p^3q)$ n'est pas divisible par 24.

1. Comme p est un nombre premier impair, $p \neq 2$ et les diviseurs positifs de $2p^2$ sont $1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2$.
   $S(2p^2) = 1 + 2 + p + 2p + p^2 + 2p^2 = 3 + 3p + 3p^2$
   On cherche donc un nombre premier p impair tel que $3 + 3p + 3p^2 = 2\,613$ c'est-à-dire $1 + p + p^2 = 871$ soit $p^2 + p - 870 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 3\,481 = 59^2$ et pour solutions 29 et 30.
   Seul le nombre 29 est bien un nombre premier impair et donc la solution cherchée.
2. Si $n = 2p$ avec $p \geq 3$ donc $p \neq 2$, alors les diviseurs positifs de n sont $1, 2, p, 2p$ et $S(n) = 1 + 2 + p + 2p = 3p + 3$.
   Si $m = 9q$ avec de même $q \neq 2$, alors les diviseurs positifs de m sont $1, 3, 9, q, 3q, 9q$ d'où $S(m) = 13q + 13$.
   $S(n) = S(m)$ s'écrit donc $3p - 13q = 10$.
   De plus n et m sont des entiers consécutifs ce qui signifie que $n = m + 1$ ou $n = m - 1$.
   Dans le cas où $n = m + 1$, on aboutit à la résolution du système $\begin{cases} 3p - 13q = 10 \\ 2p - 9q = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6p - 26q = 20 \\ 6p - 27q = 3 \end{cases}$
   Soit $\begin{cases} q = 17 \\ 2p = 154 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} p = 77 \\ q = 17 \end{cases}$. Or 77 n'est pas un nombre premier donc ce cas est impossible.
   Dans le cas où $n = m - 1$, on aboutit à la résolution du système $\begin{cases} 3p - 13q = 10 \\ 2p - 9q = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6p - 26q = 20 \\ 6p - 27q = -3 \end{cases}$
   Soit $\begin{cases} q = 23 \\ 2p = 206 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} p = 103 \\ q = 23 \end{cases}$. 23 et 103 sont bien des nombres premiers.
   Il existe donc un unique couple d'entiers (m, n) qui convient : le couple $(206{,}207)$.
3. Les diviseurs positifs (deux à deux distincts) de p^3q sont $1, p, q, pq, p^2, p^3, p^2q, p^3q$
   donc $S(p^3q) = 1 + p + q + pq + p^2 + p^3 + p^2q + p^3q = q(p^3 + p^2 + p + 1) + (p^3 + p^2 + p + 1)$
   soit $S(p^3q) = (q + 1)(p^3 + p^2 + p + 1) = (q + 1)(p^2(p + 1) + (p + 1)) = (q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.
   Les nombres premiers inférieurs à 30 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Ils sont au nombre de 10.
   Le nombre total de couples (p, q) d'entiers premiers distincts et inférieurs à 30 est donc égal à $10 \times 9 = 90$.
   On cherche donc d'abord le nombre de couples (p, q) d'entiers premiers distincts et inférieurs à 30 pour lesquels le nombre entier $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ est divisible par 24 et on retranchera ce nombre à 90.
   On remarque que $24 = 2^3 \times 3$. Pour chaque valeur de p, on doit donc trouver les valeurs de q (inférieures à 30) qui permettent d'avoir au moins trois 2 et un 3 dans la décomposition de $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.
   On peut résumer les différents cas dans un tableau :

p	$(p+1)(p^2+1)$	$q+1$ doit être un multiple de	Valeurs de q (différentes de p)	Nbre de couples (p, q)
2	3×5	$2^3 = 8$	7, 23	2
3	$4 \times 10 = 2^3 \times 5$	3	2, 5, 11, 17, 23, 29	6
5	$6 \times 26 = 2^2 \times 3 \times 13$	2	3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	8
7	$8 \times 50 = 2^3 \times 50$	3	2, 5, 11, 17, 29	6
11	$12 \times 122 = 2^3 \times 3 \times 61$	1	2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29	9
13	$14 \times 170 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 17$	$2 \times 3 = 6$	5, 11, 17, 23, 29	5
17	$18 \times 290 = 2^2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 29$	2	3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29	8
19	$20 \times 362 = 2^3 \times 5 \times 181$	3	2, 5, 11, 17, 23, 29	6
23	24×530	1	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29	9
29	$30 \times 842 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 421$	2	3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23	8

Au total on a donc $2+6+8+6+9+5+8+6+9+8 = 67$ couples pour lesquels le nombre entier $(q+1)(p+1)(p^2+1)$ est divisible par 24 et donc $90 - 67 = 23$ couples (p, q) d'entiers premiers distincts et inférieurs à 30 pour lesquels le nombre entier $(q+1)(p+1)(p^2+1)$ n'est pas divisible par 24.

Remarque : On peut vérifier les résultats avec un programme Python :

```
L = [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29]
couples = []
for p in L:
    for q in L:
        if p != q and (p + 1) * (q + 1) * (p**2 +1) % 24 != 0:
            couples.append((p, q))
print(len(couples))    # affiche 23
print(couples)  # éventuellement pour voir les 23 couples solutions
```

Exercice 6 – Nombres *refactorisables*

Soit N un entier naturel non nul. On rappelle que si $N > 1$, alors il existe une unique décomposition en facteurs premiers de N s'écrivant $N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ où k est un entier strictement positif, $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers vérifiant $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et $r_1, r_2, \dots, r_k$ sont des entiers strictement positifs.

On note $f(N)$ le nombre des diviseurs positifs de l'entier N.

1. Montrer que $f(N) = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_k)$.
2. Un entier naturel non N tel que $N > 1$ est *refactorisable* s'il admet $f(N)$ comme diviseur. Par exemple, 6 et 8 admettent tous les deux 4 diviseurs positifs. 4 est diviseur de 8 donc 8 est rfactorisable mais 4 n'est pas diviseur de 6 donc 6 n'est pas refactorisable.
   Déterminer tous les nombres refactorisables N tels que $f(N) = 6$.
3. Déterminer le plus petit nombre refactorisable N tel que $f(N) = 256$.

1. Si $N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ alors un diviseur d de N est un nombre s'écrivant $d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$ où pour tout entier i compris entre 1 et k, $0 \leq s_i \leq r_i$. Il y a donc $1 + r_1$ valeurs pour s_1, $1 + r_2$ valeurs pour s_2, …, $1 + r_k$ valeurs pour r_k, ce qui donne bien $f(N) = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_k)$ (principe multiplicatif dans un arbre de dénombrement).
2. Supposons que N est refactorisable et tel que $f(N) = 6$. N est donc un multiple de 6, ce qui signifie avec les notations adoptées que $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$. Si N possède un diviseur premier p autre que 2 et 3, alors on aura
   $f(N) \geq (1+1)(1+1)(1+1)$ ce qui contredit $f(N) = 6$.
   Le nombre N s'écrit donc $N = 2^a 3^b$ et $f(N) = (1+a)(1+b) = 6$ ce qui donne seulement deux possibilités $a = 1$ et $b = 2$ ou $a = 2$ et $b = 1$ soit $N = 2 \times 9 = 18$ ou $N = 4 \times 3 = 12$.
3. Supposons de même que N est refactorisable et tel que $f(N) = 256$. N est donc un multiple de $256 = 2^8$ et N s'écrit $N = 2_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ où $r_1 \geq 8$ et $2 < p_2 < \dots < p_k$.

De plus, $2^8 = 256 = f(N) = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_k)$ donc chacun des facteurs $1+r_i$ est une puissance de 2 et chaque r_i est une puissance de 2 à laquelle on a retiré 1.

Comme $r_1 \geq 8$, $1+r_1 \geq 9$ d'où $1+r_1 \geq 2^4$.

Au final, on aboutit à l'encadrement $2^4 \leq 1+r_1 \leq 2^8$, ce qui donne comme valeurs possibles de r_1 (puissances de 2 moins 1) : 15, 31, 63, 127, 255.

Le produit $(1+r_2)\dots(1+r_k)$ vaut alors respectivement 16, 8, 4, 2, 1 (1 si $r_1 = 2^8 - 1$).

Quelques remarques pour trouver le plus petit entier N qui convienne :

- Les plus grands exposants doivent paraitre sur les plus petits nombres premiers ;
- En cas d'exposants égaux, les petits facteurs premiers donnent les plus petites valeurs de N ;
- Chaque exposant est une puissance de 2 moins 1 ;
- On ne peut avoir plus de 5 facteurs premiers distincts (lorsque $r_1 = 15$ car $256 = 16 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

On peut alors rassembler les différentes possibilités dans un tableau, suivant le nombre de facteurs premiers distincts (de 1 à 5) de N.

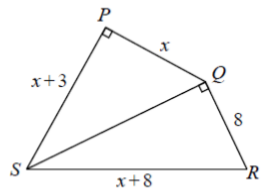
Nombre de facteurs premiers distincts de N	Valeurs de N susceptibles d'être minimales
1	2^{255}
2	$2^{15}3^{15} < 2^{31}3^7 < 2^{63}3^3 < 2^{127}3^1$
3	$2^{15}3^3 5^3 < 2^{15}3^7 5^1 < 2^{31}3^7 5^1 < 2^{63}3^1 5^1$
4	$2^{15}3^3 5^1 7^1 < 2^{31}3^1 5^1 7^1$
5	$2^{15}3^1 5^1 7^1 11^1$

En comparant les plus petites valeurs de chaque ligne entre elles, comme on vérifie que :
$2^{15}3^3 5^1 7^1 < 2^{15}3^1 5^1 7^1 11^1 < 2^{15}3^3 5^3 < 2^{15}3^{15} < 2^{255}$, on en déduit que le plus petit entier N refactorisable et tel que $f(N) = 256$ est $N = 2^{15}3^3 5^1 7^1 = 30\,965\,760$.

Géométrie

Exercice 1 Périmètre inconnu

On considère, comme dans la figure ci-contre, deux triangles PQS et QRS rectangles respectivement en P et Q.
On suppose que $PQ = x$, $QR = 8$, $PS = x + 3$ et $SP = x + 8$.
Déterminer les valeurs possibles du périmètre du quadrilatère $PQRS$.

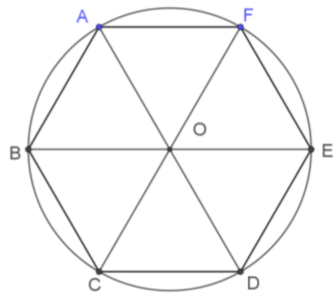


En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles PQS et QRS, on obtient :
$SQ^2 = (x+3)^2 + x^2 = 2x^2 + 6x + 9$ et $(x+8)^2 = SQ^2 + 642x^2 + 6x + 9 + 64$
Soit $x^2 + 16x + 64 = 2x^2 + 6x + 9 + 64$ c'est-à-dire $x^2 - 10x + 9 = 0$.
Une solution évidente de cette équation est 1. Le produit des deux solutions étant 9 les deux solutions de l'équation sont 1 et 9.
Le périmètre du quadrilatère est $P(x) = x + 3 + x + 8 + x + 8 = 3x + 19$.
Les valeurs possibles du périmètre sont donc 22 et 46.

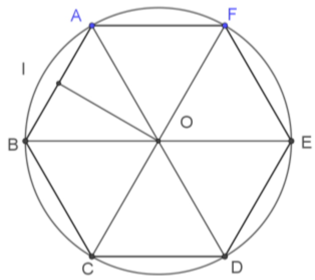
Exercice 2 Autour d'un hexagone

On considère, comme sur la figure ci-contre, un hexagone régulier ABCDEF (polygone ayant six côtés tous de même longueur et six angles de même mesure).
On suppose que la longueur de chaque côté vaut $2x$ et on note O le centre du cercle circonscrit à l'hexagone.

1. Déterminer l'aire de l'hexagone ABCDEF en fonction de x.
2. On considère la région située entre l'hexagone et le cercle et on suppose que cette région a pour aire 123. Déterminer un encadrement de x d'amplitude 10^{-1}.



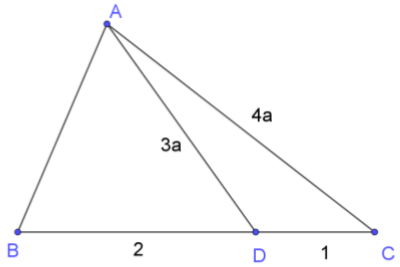
1. L'hexagone étant régulier, son aire est six fois l'aire du triangle AOB. De plus, le triangle AOB est isocèle en O ([OA] et [OB] sont deux rayons du cercle circonscrit) et $\widehat{\mathrm{AOB}} = \frac{1}{6} \times 360° = 60°$. Le triangle AOB est donc un triangle équilatéral de côté de longueur $2x$. Si I désigne le milieu de [AB], le triangle OIA est rectangle en I et, d'après me théorème de Pythagore,
$\mathrm{OI}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{IA}^2 = (2x)^2 - x^2 = 3x^2$ d'où $\mathrm{OI} = x\sqrt{3}$.
L'aire du triangle AOB vaut donc :
$\frac{1}{2} \times AB \times OI = \frac{1}{2} \times 2x \times x\sqrt{3} = x^2\sqrt{3}$.
On en déduit que l'aire de l'hexagone vaut $6x^2\sqrt{3}$.
2. L'aire de la région située entre l'hexagone et le cercle est :
$\pi(2x)^2 - 6x^2\sqrt{3} = \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right)x^2$. Cette aire valant 123, on a $x^2 = \frac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}$ d'où $x = \sqrt{\frac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}}$.
La calculatrice affiche $\sqrt{\frac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}} \approx 7{,}521704$. On en déduit que $7{,}5 \leq x \leq 7{,}6$.



Exercice 3 Longueur inconnue

On considère un triangle ABC et D un point du segment [AC]. On suppose que $\mathrm{BD} = 2$, $\mathrm{DC} = 1$, $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4}$ et $\cos\widehat{\mathrm{ADC}} = -\frac{3}{5}$.
Déterminer la longueur AB.

Comme $\frac{\text{AD}}{\text{AC}} = \frac{3}{4}$, il existe un réel positif a tel que $\text{AD} = 3a$ et $\text{AC} = 4a$.
Dans le triangle ADC, on peut donc écrire :
$\text{AC}^2 = \text{AD}^2 + \text{DC}^2 - 2\text{AD} \times \text{DC} \times \cos\widehat{\text{ADC}}$
Soit $(4a)^2 = (3a)^2 + 1 - 2 \times 3a \times 1 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$
Soit $16a^2 = 9a^2 + 1 + \frac{18}{5}a$
Soit $35a^2 - 18a - 5 = 0.$



Le discriminant de cette équation est égal à $1024 = 32^2$ et ses solutions sont $-\frac{1}{5}$ et $\frac{5}{7}$. Comme a est un nombre positif, la seule valeur retenue est $a = \frac{5}{7}$. On en déduit que $\text{AD} = 3a = \frac{15}{7}$.

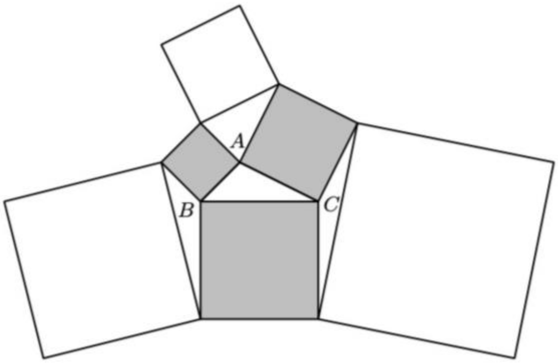
Dans le triangle ABC, on a de plus, $\cos\widehat{\text{ADB}} = \cos\left(180° - \widehat{\text{ADC}}\right) = -\cos\widehat{\text{ADC}} = \frac{3}{5}$ d'où :

$\text{AB}^2 = \text{AD}^2 + \text{BD}^2 - 2\text{AD} \times \text{BD} \times \cos\widehat{\text{ADB}} = \left(\frac{15}{7}\right)^2 + 4 - 2 \times \frac{15}{7} \times 2 \times \frac{3}{5} = \frac{225}{49} + 4 - \frac{36}{7}$

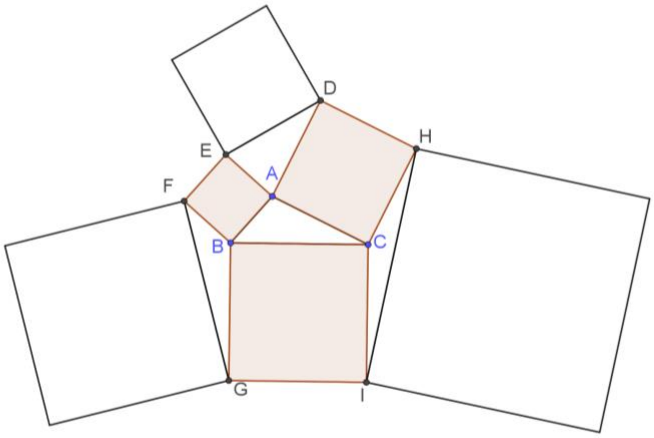
Soit $\text{AB}^2 = \frac{225+196-252}{49} = \frac{169}{49}$ c'est-à-dire, puisque $\text{AB} > 0$, $\text{AB} = \frac{13}{7}$.

Exercice 4 Carambolage

Dans la figure ci-contre, trois carrés ombrés sont construits sur les côtés d'un triangle ABC, à l'extérieur de ce triangle. Les trois carrés non ombrés sont construits à partir de sommets des carrés ombrés.
Déterminer le rapport de la somme des aires des carrés non ombrés à la somme des aires des carrés ombrés ?

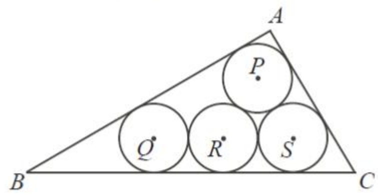


Notons $\text{BC} = a$, $\text{CA} = b$, $\text{AB} = c$. Les relations métriques dans le triangle ABC donnent :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\text{BAC}}$.
D'autre part,
$\widehat{\text{EAD}} = 360° - \left(90° + \widehat{\text{BAC}} + 90°\right) = 180° - \widehat{\text{BAC}}$
donc $\cos\widehat{\text{EAD}} = -\cos\widehat{\text{BAC}}$ et, en se plaçant dans le triangle ADE :
$\text{DE}^2 = \text{AE}^2 + \text{AD}^2 - 2\text{AE} \times \text{AD} \times \cos\widehat{\text{EAD}} = \text{c}^2 + \text{b}^2 + \cos\widehat{\text{BAC}}$
puisque AEGB et ACHD sont des carrés.
On en tire $a^2 + \text{DE}^2 = 2b^2 + 2c^2$
On montrerait de même que $b^2 + \text{FG}^2 = 2\text{c}^2 + 2a^2$ et $\text{c}^2 + \text{HI}^2 = 2a^2 + 2b^2$.



En additionnant membre à membre les trois dernières égalités, on obtient :
$a^2 + \text{DE}^2 + b^2 + \text{FG}^2 + \text{c}^2 + \text{HI}^2 = 4(a^2 + b^2 + \text{c}^2)$ soit $\text{DE}^2 + \text{FG}^2 + \text{HI}^2 = 3(a^2 + b^2 + \text{c}^2)$.
Cela signifie que le rapport de la somme des aires des carrés non ombrés à la somme des aires des carrés ombrés est égal à 3.

Exercice 5 Cercles rangés dans un triangle



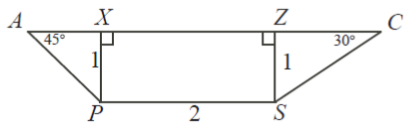
On considère la figure ci-contre dans laquelle quatre cercles de rayon 1 sont tangents extérieurement l'un à l'autre et tangents chacun à l'un des côtés du triangle ABC.

1. Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle PQS.
2. Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.
3. On diminue le rayon du cercle de centre R de manière que :

- le cercle de centre R demeure tangent au côté $[BC]$;
- le cercle de centre R demeure tangent aux trois autres cercles ;
- le cerce de centre P devienne tangent aux trois autres cercles.

Déterminer le nouveau rayon r du cercle de centre R.

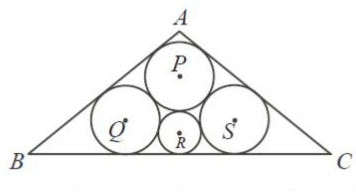
1. Les cercles de centre R et S sont tangents. Si on appelle I le point de contact alors I appartient au segment $[RS]$ et, comme ces deux cercles ont même rayon, le point I est le milieu de $[RS]$. On a donc $RS = 1 + 1 = 2$. On démontrerait de même que $QR = PS = 2$. En particulier, le triangle PRS est équilatéral et le triangle QRP est isocèle en R.
De plus, les cercles de centres Q, R et S étant tangents au côté $[BC]$ et de même rayon, les droites (QR) et (RS) sont parallèles à (BC) (en considérant les projetés orthogonaux des centres du (BC) on forme des rectangles) et le point R est en fait le milieu de $[QR]$.
On peut donc écrire $\widehat{PSQ} = \widehat{PSR} = 60°$,
$\widehat{PQR} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{QRP}) = \frac{1}{2}\left(180° - (180° - \widehat{PRS})\right) = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$
Et donc $\widehat{QRS} = 180° - (60° + 30°) = 90°$
On remarque que le triangle PQS est rectangle en P et comme on démontrerait, comme pour les droites (QR) et (RS), que (PS) est parallèle à (AC) et (PQ) est parallèle à (AB), le triangle ABC est rectangle en A et semblable au triangle PQS.
2. Comme on connait les mesures particulières des angles du triangles ABC (30°, 60°, 90°), pour connaitre les longueurs de ses côtés il suffit de connaitre la longueur du côté $[AC]$.
Si on considère les projetés orthogonaux X et Y de P respectivement sur (AC) et (AB), les triangles APX et APY sont rectangles en P, ont le côté $[AP]$ en commun et les côtés $[PX]$ et $[PY]$ de même longueur. Ils sont donc isométriques. On en déduit $\widehat{PAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45°$. De même $\widehat{SCA} = \frac{1}{2}\widehat{BCA} = 30°$.



On peut alors considérer le trapèze $APSC$ comme sur la figure ci-contre, dans lequel Z est le projeté orthogonal de S sur (AC).
Le quadrilatère $PSZX$ a ses côtés deux à deux parallèles et un angle droit. C'est un rectangle et $XZ = PS = 2$.

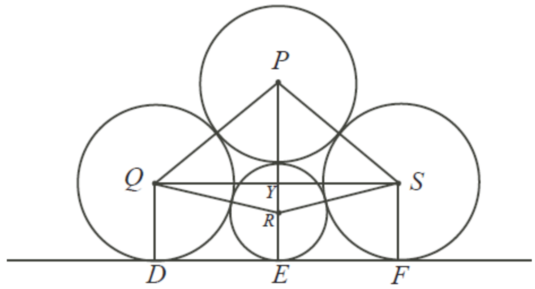
Le triangle APX est rectangle en X et $\widehat{PAX} = \widehat{PAC} = 45$ ° donc $AX = PX = 1$.
Le triangle SZC est rectangle en Z et $\widehat{ZCS} = \widehat{SCA} = 30°$ d'où $\frac{ZS}{ZC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $ZC = ZS\sqrt{3} = \sqrt{3}$.
On en déduit $AC = AX + XZ + ZC = 1 + 2 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$.
Dans le triangle ABC rectangle en A, on en tire :
$\frac{AC}{BC} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ d'où $BC = 6 + 2\sqrt{3}$ et $\frac{AB}{BC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}(6 + 2\sqrt{3}) = 3 + 3\sqrt{3}$.

3. Après les modifications données dans l'énoncé, on obtient la figure ci-contre.



Soit alors D, E et F les projetés orthogonaux respectifs sur la droite (BC) des centre Q, R et S des trois cercles. Ces points sont aussi les points de contact de ces cercles avec la droite (BC).

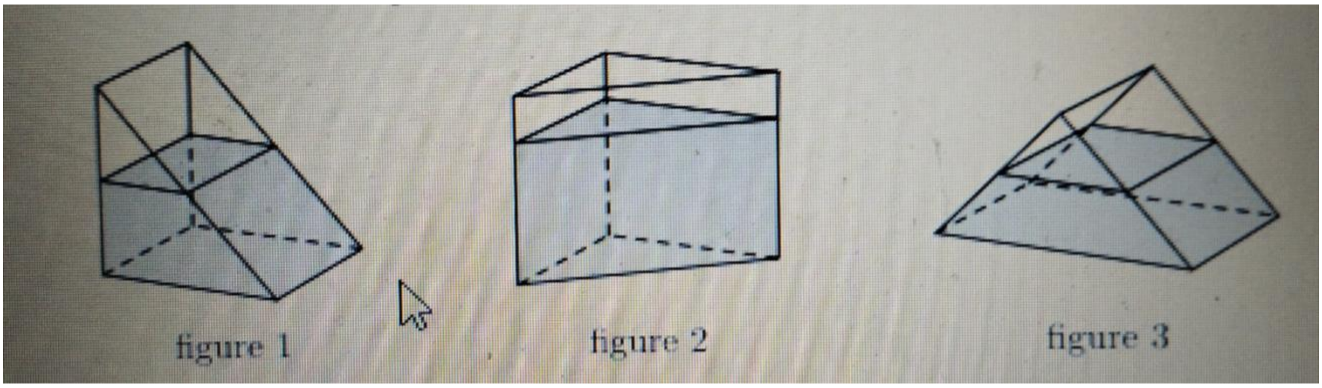
On a donc $QD = SF = 1$ et $RE = r$.
On a aussi toujours $PQ = PS = 2$ et, cette fois-ci, $QR = RS = 1 + r$.
La figure obtenue est symétrique par rapport à la droite (PE) et le point R est sur cet axe de symétrie.
De plus, la droite (QS) est encore parallèle à la droite (BC) et on note Y le point d'intersection de cette droite avec (PE). Alors :
$YE = QD = 1$ et $YR = YE - RE = 1 - r$ et $QR = 1 + r$.



Le traingle QRY est rectangle en Y donc, d'après le théorème de Pythagore, $QR^2 = QY^2 + YR^2$
Soit $QY^2 = (1 + r)^2 - (1 - r)^2 = 4r$.
D'autre part $PY = PR - RY = (1 + r) - (1 - r) = 2r$ donc, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle PYQ rectange en Y, $4 = PQ^2 = PY^2 + YQ^2 = 4r^2 + 4r$.
Le nombre r est dinc solution de l'équation $r^2 + r - 1 = 0$, équation dont le discriminant vaut 5 et donc la seule solution positive est $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 6 Exercice bidon

Un récipient a la forme d'un prisme droit à base triangulaire (les bases sont des triangles rectangles isocèles dont les côtés de l'angle droit mesurent 10 cm). Les faces latérales sont des carrés de côté 10 cm et un rectangle.



Dans la position de la figure 1, la hauteur du liquide est 5 cm. À quelle hauteur est le liquide dans chacune des autres situations (l'histoire ne dit pas comment on remplit le récipient).

Le volume du récipient s'exprime ainsi : $V = \frac{10\times10}{2} \times 10 = 500$

Dans la situation de la figure 1, le volume de la partie « vide » est : $W = \frac{5\times5}{2} \times 10 = 125$. Le volume du liquide est donc $L = 375$.

La hauteur h du liquide dans le cas de la figure 2 est donnée par $375 = h \times 50$ et donc $h = 7{,}5$.

Dans le cas de la figure 3, la partie vide est un prisme droit dont les bases sont des triangles rectangles isocèles de côté x et la hauteur 10. On a donc $10 \times \frac{x^2}{2} = 125$ et donc $x = 5$. La hauteur de ces triangles est donc $\frac{5}{\sqrt{2}}$. La hauteur du liquide est donc aussi $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Équations – calcul littéral

Exercice 1
Déterminer les nombres réels p, r et t tels que, pour tout réel x, $(px+r)(x+5) = x^2+3x+t$.

Deux fonctions polynômes P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si ces polynômes ont le même degré et les mêmes coefficients.
Comme, pour tout réel x, $(px+r)(x+5) = px^2+(r+5p)x+5r$, l'égalité donnée seta vérifiée pour tout réel x si et seulement si $\begin{cases} p=1 \\ r+5p=3 \\ 5r=t \end{cases}$ soit $\begin{cases} p=1 \\ r=-2 \\ t=-10 \end{cases}$

Exercice 2
On considère une suite de quatre nombres rationnels a, b, c, d telle que si l'un des termes de la suite est égal à r, le terme suivant est égal à $1+\frac{1}{1+r}$.
Si le troisième terme de la suite est $c = \frac{41}{29}$, quel est la valeur du premier terme a ?

$\frac{41}{29} = c = 1+\frac{1}{1+b}$ d'où $\frac{1}{1+b} = \frac{41}{29}-1 = \frac{12}{29}$ c'est-à-dire $b = \frac{29}{12}-1 = \frac{17}{12}$.
De même, $\frac{17}{12} = b = 1+\frac{1}{1+a}$ d'où $1+a = \frac{17}{12}-1 = \frac{5}{12}$ c'est-à-dire $a = \frac{12}{5}-1 = \frac{7}{5}$

Exercice 3 Fabrication d'une suite
On forme une suite numérique de la manière suivante :
- on choisit le premier terme ;
- chacun des termes est obtenu comme image du précédent par une fonction f donnée.

1. On suppose dans cette question que f est la fonction qui à tout réel x associe le réel $f(x) = x^2-4x+7$ et que 7 est le troisième terme de la suite.
   Quels sont les nombres possibles pour les deux premiers termes de cette suite ?
2. On suppose dans cette question que f est la fonction qui à tout réel x associe le réel $f(x) = x^2-12x+39$ et que la suite alterne entre deux nombres différents a et b. Déterminer toutes les valeurs possibles de a et b.

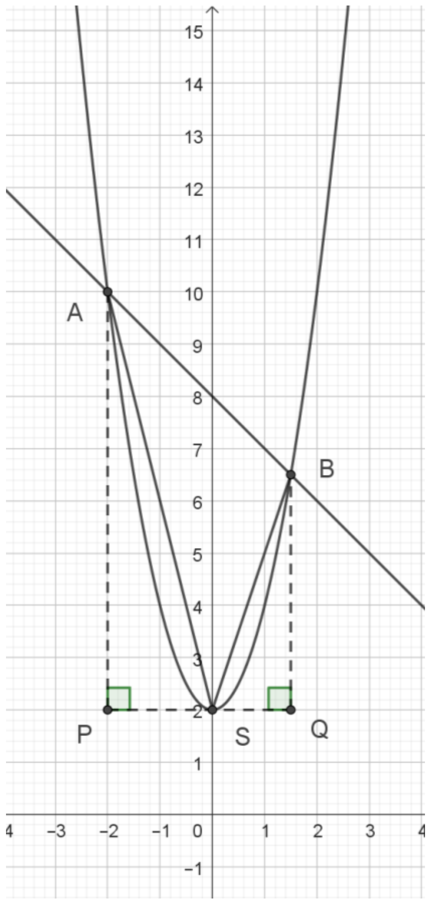
1. Notons a et b respectivement le premier et le troisième terme de la suite. On peut alors écrire :
   $7 = b^2-4b+7$ soit $b^2-4b = 0$ c'est-à-dire $b = 0$ ou $b = 4$.
   Si $b = 0$, alors a est solution de $0 = a^2-4a+7$. Cette équation a pour discriminant -12 et donc aucune solution.
   Si $b = 4$, alors a est solution de $4 = a^2-4a+7$ soit $a^2-4a+3 = 0$. Cette équation a pour solution évidente 1. Le produit des solutions vaut 3 donc l'autre solution est 3.
   Donc les nombres possibles pour les deux premiers termes de la suite sont 1,4 et 3,4
2. Le premier terme de la suite est a et le deuxième est b donc $b = a^2-12a+39$.
   Le deuxième terme de la suit est b et le troisième terme de la suite est a donc $a = b^2-12b+39$.
   On en déduit $(a^2-12a+39)-(b^2-12b+39) = b-a$
   Soit $a^2-b^2-12(a-b) = b-a$
   Soit $(a-b)(a+b-11) = 0$.
   Comme $a \neq b$, la seule possibilité est $a+b-11 = 0$ soit $b = 11-a$.
   En reportant dans la première équation, on obtient $a^2-12a+39 = 11-a$ soit $a^2-11a+28 = 0$.
   Cette équation a pour discriminant 9 et pour solutions 4 et 7.
   Donc les nombres possibles pour les deux premiers termes de la suite sont 4,7 et 7,4.

Exercice 4 Polynôme inconnu
Déterminer une fonction polynôme f telle que, pour tout réel x, $f(x)-f(x-1) = 4x-9\ et\ f(5) = 18$.

On commence par remarquer que si le degré de f est n alors le degré de $f(x) - f(x-1)$ est $n-1$ car les termes en x^n s'annulent.
On en déduit qu'il existe trois réels a, b, c tels que pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Alors $f(x) - f(x-1) = ax^2 + bx + c - (a(x-1)^2 + b(x-1) + c)$
Soit $f(x) - f(x-1) = ax^2 + bx + c - (ax^2 + (b-2a)x + a - b + c) = 2ax + b - a$
On aura donc, pour tout réel x, $f(x) - f(x-1) = 4x - 9$ si et seulement si $\begin{cases} 2a = 4 \\ b - a = 9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$.
On en déduit que $f(x) = 2x^2 - 7x + c$. Comme de plus, $f(5) = 18$ c'est-à-dire $50 - 35 + c = 18$, on trouve $c = 3$ et $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

Exercice 5 Archimède a fait mieux…

Soit a un nombre réel tel que $a > \frac{1}{2}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + 2$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 4a$.
On note S le sommet de $\mathcal{P}$ et on note A et B les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ (A étant le point d'abscisse la plus petite).
Calculer la valeur de a lorsque l'aire du triangle ASB est égale à $\frac{72}{5}$.



Le sommet S de la parabole $\mathcal{P}$ est le point de coordonnées (0,2).
D'autre part les abscisses des points A et B sont les solutions de l'équation $ax^2 + 2 = -x + 4a$ soit $ax^2 + x + 2 - 4a = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4a(2 - 4a)$
soit $\Delta = 16a^2 - 8a + 1 = (4a-1)^2$.
Comme $a > \frac{1}{2}$, $4a > 2 > 1$ donc $4a - 1 > 0$.
Les abscisses des points A et B sont donc $\frac{-1 \pm (4a-1)}{2}$.
Comme $a > \frac{1}{2}$, $4a - 2 > 0$donc $x_A = \frac{-4a}{2a} = -2$ et $x_B = \frac{4a-2}{2a} = 2 - \frac{1}{a}$.
On en tire $y_A = -x_A + 4a = 2 + 4a$ et $y_B = -x_B + 4a = 4a - 2 + \frac{1}{a}$.
Pour exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ASB en fonction de a, on considère les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la droite d'équation $y = 2$ (comme sur la figure ci-contre). L'aire $\mathcal{A}$ sera obtenue en retranchant à l'aire du trapèze $APQB$ la somme des aires des triangles APS et BQS.
$AP = |y_A - y_P| = |2 + 4a - 2| = 4a$ car $a > \frac{1}{2} > 0$.
$PS = |x_S - x_A| = 2$ car A et P ont même abscisse.
L'aire du triangle APS vaut donc $\mathcal{A}_{APS} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4a = 4a$.
$BQ = |y_B - y_Q| = \left|4a - 2 + \frac{1}{a} - 2\right| = \left|4a + \frac{1}{a} - 4\right| = \left|\frac{4a^2 - 4a + 1}{a}\right|$
Soit $BQ = \left|\frac{(2a-1)^2}{a}\right| = \frac{(2a-1)^2}{a} = \frac{4a^2 - 4a + 1}{a}$ car $a > \frac{1}{2} > 0$
$SQ = |x_Q - x_S| = \left|2 - \frac{1}{a}\right| = 2 - \frac{1}{a}$ car $a > \frac{1}{2}$.
L'aire du triangle BQS vaut donc $\mathcal{A}_{BQS} = \frac{1}{2} \times \frac{4a^2 - 4a + 1}{a} \times \left(2 - \frac{1}{a}\right)$.

Soit $\mathcal{A}_{BQS} = \frac{1}{2a^2}(4a^2 - 4a + 1)(2a - 1)$
$PQ = PS + SQ = 2 + 2 - \frac{1}{a} = 4 - \frac{1}{a}$
L'aire du trapèze $APQB$ vaut donc $\mathcal{A}_{APQB} = \frac{1}{2} \times (AP + BQ) \times PQ = \frac{1}{2} \times \left(4a + \frac{4a^2 - 4a + 1}{a}\right) \times \left(4 - \frac{1}{a}\right)$
Soit $\mathcal{A}_{APQB} = \frac{1}{2a^2}(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1)$.
Le problème revient donc à résoudre l'équation :
$\frac{1}{2a^2}(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1) - 4a - \frac{1}{2a^2}(4a^2 - 4a + 1)(2a - 1) = \frac{72}{5}$
En multipliant les deux membres d el'équation par $10a^2$, on se ramène à l'équation :
$5(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1) - 40a^3 - 5(4a^2 - 4a + 1)(2a - 1) = 144a^2$
Soit $5(32a^3 - 16a^2 + 4a - 8a^2 + 4a - 1) - 40a^3 - 5(8a^3 - 8a^2 + 2a - 4a^2 + 4a - 1) = 144a^2$

Soit $(160a^3 - 120a^2 + 40a - 5) - 40a^3 - (40a^3 - 60a^2 + 30a - 5) = 144a^2$
Soit $80a^3 - 204a^2 + 10a = 0$
Soit $2a(40a^2 - 102a + 5) = 0$ soit, puisque $a > \frac{1}{2} > 0$, $40a^2 - 102a + 5 = 0$
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9\,604 = 98^2$ et ses solutions sont $\frac{5}{2}$ et $\frac{1}{20}$.
Comme $a > \frac{1}{2}$, la seule solution à retenir est $a = \frac{5}{2}$.

Exercice 6 – Équations bicarrées

1. Résoudre l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.
2. Déterminer le plus petit entier strictement positif N pour lequel il existe quatre entiers r, s, t, u tels que $r \neq 0$ et, pour tout réel x, $x^4 + 2\,022x^2 + N = (x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u)$.
3. Soit M et N deux entiers tels que $N - M = 37$. Démontrer que l'expression $x^4 + Mx^2 + N$ ne peut pas être factorisée comme dans la question 2.

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à résoudre l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4$ et les solutions sont $X_1 = 2$ et $X_2 = 4$.
   Les solutions de l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ sont donc $-2, 2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.
2. Pour tout réel x, $(x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u) = x^4 + tx^3 + ux^2 + rx^3 + rtx^2 + rux + sx^2 + stx + su$
   Soit $(x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u) = x^4 + (t + r)x^3 + (u + rt + s)x^2 + (ru + st)x + su$.
   On en déduit que, pour tout réel x, $(x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u) = x^4 + 2\,022x^2 + N$ si et seulement si
   $\begin{cases} t + r = 0 \\ u + rt + s = 2\,022 \\ ru + st = 0 \\ su = N \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = -r \\ u + r(-r) + s = 2\,022 \\ ru - rs = 0 \\ su = N \end{cases}$ soit, puisque $r \neq 0$, $\begin{cases} t = -r \\ u + r(-r) + s = 2\,022 \\ u = s \\ su = N \end{cases}$
   Soit $\begin{cases} t = -r \\ 2u - r^2 = 2\,022 \\ u = s \\ N = u^2 \end{cases}$. Comme $N = u^2$, minimiser N revient à minimiser u^2.
   Or, la deuxième équation du système s'écrit $u = \frac{2\,022 + r^2}{2}$. En particulier $u > 0$ est positif et minimiser u^2 revient à minimiser u, c'est-à-dire minimiser r^2. Comme u et r sont des entiers, r doit être un nombre pair différent de 0 et u sera minimiser pour $r = \pm 2$ soit $u = 1\,013$.
   Donc le plus petit entier strictement positif N pour lequel il existe quatre entiers r, s, t, u tels que $r \neq 0$ et, pour tout réel x, $x^4 + 2\,022x^2 + N = (x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u)$ est $N = 1\,013^2 = 1\,026\,169$.
3. En adoptant la même démarche que dans la question 2., on aboutit au système $\begin{cases} t + r = 0 \\ u + rt + s = M \\ ru + st = 0 \\ su = N \end{cases}$.
   On en tire $37 = N - M = su - (u + rt + s) = u^2 - (2u - r^2) = u^2 - 2u + r^2 = (u - 1)^2 - 1 + r^2$
   Soit $38 = (u - 1)^2 + r^2$. Ceci implique $(u - 1)^2 < 38$ soit, puisque u est un entier $-6 \leq u - 1 \leq 6$ soit $-5 \leq u \leq 7$. On peut vérifier qu'aucune des valeurs entières de u comprises entre -5 et 7 ne donne une valeur entière pour r.
   L'expression $x^4 + Mx^2 + N$ ne peut donc pas être factorisée comme dans la question 2.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1 Permutations au sommet

Une permutation d'un ensemble d'objets est un classement de ces objets dans un ordre particulier.
Par exemple, 312 et 231 sont deux des permutations possibles de l'ensemble {1, 2, 3}.

1. Déterminer combien il existe de triplets (a, b, c) tels que les nombres a, b et c soient trois nombres distincts de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5} vérifiant $a < b$ et $b > c$.
2. Déterminer le nombre de permutations de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} qui contiennent les chiffres 254, dans cet ordre en positions adjacentes ?
3. On dit qu'une permutation admet un sommet local lorsqu'elle contient une suite de 3 nombres dans laquelle le nombre du milieu est supérieur à ses deux voisins.

Par exemple, la permutation 35241 de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5} contient deux sommets locaux 5 et 4.
Déterminer le nombre moyen de sommets locaux des permutations de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

1. Dans un triplet (a, b, c) où $a < b$ et $b > c$, le nombre b peut seulement prendre les valeurs de 3, 4 ou 5.

Si $b = 3$, alors a peut valoir 1 ou 2 et c vaut alors respectivement 2 ou 1. Il y a donc 2 triplets possibles.
Si $b = 4$, alors les couples (a, b) possibles sont $(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)$, ce qui donne 6 triplets possibles.
Si $b = 5$, alors de même a peut valoir 1, 2, 3 ou 4 avec à chaque fois 3 valeurs possibles pour c, ce qui donne 12 triplets possibles.
En tout, il y a donc 20 triplets vérifiant les conditions imposées.

2. Une permutation contient le bloc 254 peut s'écrire de 4 façons différentes : $254xyz$, $x254yz, xy254z$ ou $xyz254$, les nombres x, y et z étant les nombres 1, 3 et 6 dans un ordre quelconque.

Dans chaque cas, il y a $3 \times 2 \times 1 = 6$ façons de choisir x, y et z parmi 1, 3 et 6.
Le nombre de permutations contenant le bloc 254 est donc égal à $4 \times 6 = 24$.

3. Le nombre de permutations de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} est égal à $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$.

On commence par compter le nombre total de sommets locaux dans ces $40\,320$ permutations. Un sommet local est un bloc abc dans lequel $a < b$ et $b > c$.
On raisonne alors comme dans la question 1. b peut valoir 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Le nombre de sommets locaux abc est alors respectivement pour chaque cas : $2 \times 1, 3 \times 2, 4 \times 3, 5 \times 4, 6 \times 5, 7 \times 6, 8 \times 7$ ce qui donne au total 112 blocs. Pour chacun de ces blocs, il y a 6 positions du bloc dans la permutation puis $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ choix des placements des 5 autres valeurs que a, b et c. Il y a donc $112 \times 6 \times 120 = 80\,640$ sommets locaux.
Le nombre moyen de sommets locaux des permutations de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} est donc $\frac{80\,640}{40\,320} = 2$.

Exercice 2 Séparation

On donne deux ensembles d'entiers,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Et $B = \{4, 5, 9, 14, 23, 37\}$

Trouver deux parties de A disjointes et complémentaires, appelées X et Y, telles que la somme de deux éléments distincts de X ne soit pas dans B et que la somme de deux éléments distincts quelconques de Y ne soit pas dans B.

L'élément 1 est dans l'une des deux parties, disons X. Les sommes de 1 avec $2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ ne sont pas des éléments de B. Est-il possible que $3, 4, 8, 13$ soient « candidats » éléments de Y ? Oui, car leurs sommes deux à deux, $7, 11, 16, 12, 17, 21$ ne sont pas des éléments de B.
On recommence avec 2 : les sommes de 2 avec $7, 12$ sont dans B et les sommes de chacun de ces deux nombres avec $3, 4, 8, 13$ ne sont pas dans B. On élimine encore 9 et 18 dont les sommes avec 5 sont dans B et 17 dont la somme avec 6 est dans B.
Finalement, $X = \{1, 2, 5, 6, 10, 11, 14, 15, 16, 19, 20\}$ et $Y = \{3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 17, 18\}$

Exercice 3 Un entier sur onze est multiple de 11
On choisit au hasard un entier s'écrivant, dans le système décimal, avec les neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. La probabilité que ce nombre soit un multiple de 11 est-elle inférieure, égale ou supérieure à $\frac{1}{11}$?

Il y a 9! (factorielle 9) nombres constitués avec les neuf chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Notons $\overline{abcdefghi}$ un tel nombre, $N = a.10^8 + b.10^7 + c.10^6 + d.10^5 + e.10^4 + f.10^3 + g.10^2 + h.10 + i$. Les restes dans les divisions euclidiennes par 11 des puissances paires de 10 valent tous 1. Les restes des puissances impaires de 10 dans ces divisions euclidiennes valent tous 10. Le nombre N a donc le même reste dans la division euclidienne par 11 que $R = a + c + e + g + i + 10(b + d + f + h)$. Comme $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45$, le problème revient à déterminer les chiffres b, d, f, h tels que $R = 45 + 9(b + d + f + h)$ soit multiple de 11, ou encore que $1 + 9(b + d + f + h)$ soit multiple de 11. Ce dernier nombre est compris entre 91 et 271 et il est supérieur de 1 à un multiple de 9. Les possibilités sont :
$91, 100, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190, 199, 208, 217, 226, 235\ 244, 253, 262, 271$, ce qui limite les solutions à $b + d + f + h = 17$ et $b + d + f + h = 28$
On obtient la somme 17 avec
$(1, 2, 5, 9), (1, 2, 6, 8), (1, 3, 4, 9), (1, 3, 5, 8), (1, 3, 6, 7), (1, 4, 5, 7), (2, 3, 4, 8), (2,3,5, 7), (2, 4, 5, 6)$ et les quadruplets obtenus par permutation à partir de ceux-ci. On obtient 28 avec (9,8,7,4) et$(9, 8, 6, 5)$ et les quadruplets obtenus par permutation. Ces quadruplets sont associés à des quintuplets faisant figurer les autres chiffres (eux aussi permutables). Il y a donc $9 \times 4! \times 5! + 2 \times 4! \times 5!$ multiples de 11 parmi les nombres qui s'écrivent avec neuf chiffres distincts non nuls. La probabilité cherchée est donc :

$$p = \frac{11 \times 4! \times 5!}{9!} = \frac{11}{126}$$

Cette probabilité est inférieure à $\frac{1}{11}$.

Exercice 4 Un grand nombre
Par combien de 0 l'écriture décimale de 2 023 ! s'achève-t-elle ? Quelle est la décimale non nulle la plus à droite ?

On pose $F(n)$ le dernier chiffre non nul de $n!$ et $D(m)$ le chiffre des unités de m.
L'idée est

- de regrouper les facteurs non multiples de 5 quatre par quatre :

$$20\,! = (1 \times 2 \times 3 \times 4) \times 5 \times (6 \times 7 \times 8 \times 9) \times 10 \times (11 \times 12 \times 13 \times 14) \times 15 \times (16 \times 17 \times 18 \times 19) \times 20$$

- puis de diviser chaque groupe de 4 par 2 et de l'associer au multiple de 5 :

$$20\,! = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2} \times \frac{(6 \times 7 \times 8 \times 9)}{2} \times \frac{11 \times 12 \times 13 \times 14}{2} \times \frac{16 \times 17 \times 18 \times 19}{2} \times 10^4 \times 4!$$

chaque groupe $\frac{x \times (x+1) \times (x+2) \times (x+3)}{2}$ admet 2 pour chiffre des unités.
donc $F(20) = D(2^4) \times F(4)$ d'où $F(20) = 4$ car $D(2^4) = 6$ et $4! = 24$
En fait, $20! = 2432902008176640000$.
Plus généralement, si n est multiple de 5, on a :

$$F(n) = D\left(2^{\frac{n}{5}}\right) \times F\left(\frac{n}{5}\right)$$

Pour calculer les $D\left(2^k\right)$, on recherche un cycle :
On a $D(2) = 2$, $D(2^2) = 4$, $D(2^3) = 8$, $D(2^4) = 6$ et $D(2^5) = 2$ et le cycle a pour longueur 4.
Commençons par 2020 ! (car 2020 est multiple de 5) :
$F(2020) = D(2^{404}) \times F(404)$;
$F(400) = D(2^{80}) \times F(80)$; (ce qui nous permettra de calculer $F(404)$)
$F(80) = D(2^{16}) \times F(16)$;
$F(15) = D(2^3) \times F(3)$.
En remontant, on obtient successivement :
$F(15) = 8$ car $2^3 = 8$, $3! = 6$ et $8 \times 6 = 48$;
$F(16) = 8$ car $16! = 16 \times 15!$ et $6 \times 8 = 48$;
$F(80) = 8$ car $D(2^{16}) = D(2^4) = 6$ et $F(16) = 8$;

$F(400) = 8$ car $D(2^{80}) = D(2^4) = 6$ et $F(80) = 8$;
$F(404) = 2$ car $404! = 401 \times 402 \times 403 \times 404 \times 400!$ et que $D(401 \times 402 \times 403 \times 404) = 4$;
$F(2020) = 2$ car $D(2^{404}) = D(2^4) = 6$ et $F(404) = 2$;
Enfin, $\boldsymbol{F(2023) = 2}$ car $2023! = 2021 \times 2022 \times 2023 \times 2020!$ et que $D(2021 \times 2022 \times 2023) = 6$.

Exercice 5 Un changement presque imperceptible

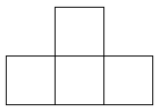
N boules, numérotées de 1 à N, sont réparties dans deux urnes. On prend une boule dans la première urne et on la place dans la deuxième. La moyenne des numéros des boules placées dans la première urne augmente de x, la moyenne des numéros des boules placées dans la deuxième urne augmente de x aussi. Quelle est la plus grande valeur possible de x ?

On commence par écrire les données, en notant n le nombre de boules placées initialement dans la première urne, m le nombre de boules placées initialement dans la deuxième urne, a la somme des numéros dans la première urne, b la somme dans la seconde. On désigne par q le numéro de la boule transférée. Le problème s'écrit :
$\frac{a-q}{n-1} = \frac{a}{n} + x$ et $\frac{b+q}{m+1} = \frac{b}{m} + x$
ou encore : $a = qn + xn(n-1)$ et $b = qm - xm(m+1)$
On sait que $a + b = \frac{N(N+1)}{2}$ (somme des N premiers entiers) et que $n + m = N$.
On en tire $\frac{N(N+1)}{2} = Nq + xN(n-m-1)$ puis $\frac{N+1}{2} = q + x(n-m-1)$
Comme $b = qm - xm(m+1)$, on en déduit $b = \frac{N+1}{2}m - xmn$
Mais $b \geq 1 + 2 + \cdots + (m-1) + m$ (puisque l'une 2 contient m boules, la somme des numéros de ces boules est supérieure à la somme des m premiers entiers). On en déduit :

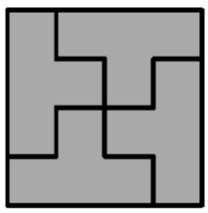
$$\frac{N+1}{2}m - xmn \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

Ou encore $\frac{n}{2} - xn \geq 0$
Et donc la plus grande valeur de x est $\frac{1}{2}$ (ce qui correspond à m boules dans l'urne 2, numérotées de 1 à m, et c'est la boule $m+1$ qui est transférée).

Exercice 6 Tétrominos



On dispose d'une quantité illimitée de tétrominos en forme de T (figure composée de quatre carrés de côtés mesurant 1) et d'un plateau $n \times n$. Il est possible de placer des tétrominos sur le plateau (éventuellement après les avoir fait pivoter) tant qu'il n'y a aucun chevauchement de tetrominos et qu'aucun tétromino ne déborde du plateau.
Pour quelle valeur de n peut-on recouvrir entièrement le plateau ?



On peut déjà remarquer qu'on peut recouvrir entièrement le plateau si et seulement si 4 divise n.
En effet, si 4 divise n, il existe un entier k tel que $n = 4k$. Alors, comme on peut couvrir un plateau 4×4 comme sur la figure ci-contre, le plateau $n \times n$ sera recouvert par k^2 plateaux 4×4.
Si 4 ne divise pas n, comme l'aire de chaque tétromino est 4, l'aire du plateau doit être un multiple de 4, et n doit donc être pair. Il existe donc, dans ce cas, un entier naturel $k \neq 0$ tel que $n = 4k + 2$. On colorie les cases du plateau $n \times n$ en alternant le noir et le blanc (comme pour un échiquier) en veillant à ce que la case située dans le coin inférieur gauche soit blanche. Comme n est pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches soit $\frac{n^2}{2} = 8k^2 + 8k + 2$ cases blanches, ce qui est un nombre pair. Or, comme les cases blanches ne partagent pas de frontière commune, chaque tétromino couvre un nombre impair de cases blanches (1 ou 3). Comme il faut positionner $\frac{n^2}{4} = 4k^2 + 4k + 1$ tétrominos, donc un nombre impair, on couvrira un nombre impair de cases blanches. On aboutit donc à une contradiction.