académie Versailles

RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
E L'ÉDUCATION NATIONALI
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIE
ET DE LA RECHERCHE


Lycée Camille Pissarro Pontoise

Inria
inventeurs du monde numérique

Lycée La Bruyère Versailles

*"Aucun arc de cercle n'est si petit que deux corps se déplaçant avec des vitesses uniformes mais incommensurables ne puissent s'y rencontrer dans le futur ou n'aient pu s'y rencontrer dans le passé."*

**Nicole ORESME (1320? – 1382)**

*Tractatus de commensurabilitate vel incommensurabilitate motuum cell*

## *Stage ouvert aux élèves de terminale présentés au Concours général des lycées – 10 et 11 février 2020*

---

**« La vérité n'est pas pour le *philosophe* une maîtresse qui corrompe son imagination, et qu'il croie trouver partout ; il se contente de la pouvoir démêler où il peut l'apercevoir. Il ne la confond point avec la vraisemblance ; il prend pour vrai ce qui est vrai, pour faux ce qui est faux, pour douteux ce qui est douteux, et pour vraisemblable ce qui n'est que vraisemblable. Il fait plus, et c'est ici une grande perfection du *philosophe*, c'est que lorsqu'il n'a point de motif propre pour juger, il sait demeurer indéterminé. »**

**Extrait de l'article « PHILOSOPHE » de l'Encyclopédie (article écrit par César Chesneau Dumarsais)**

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : collégiens de troisième en octobre, lycéens de première en décembre, lycéens de terminale présentés au Concours général en février et lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : cette année, l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Hoche et le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée de la Vallée de Chevreuse à Gif- sur-Yvette. La Pépinière a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les actions de la Pépinière sont institutionnelles : les élèves sont recensés et désignés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus, ce qui est nécessairement le cas pour le stage réservé aux candidats désignés pour le Concours général.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (insp. Honoraire), Vincent PANTALONI, Jean-François REMETTER, Évelyne ROUDNEFF, Charles SEVA, Christine WEILL.

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY) Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), François-Xavier DUTHOIT (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Vincent MONCEAU (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE), Jérôme MORAND (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), François REGUS (Lycée Viollet le Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Martine SALMON (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE), Gabriel ZLATKINE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS)

**Professeurs accompagnants :** Frédéric ALLIOT (Lycée Gustave Monod, ENGHIEN LES BAINS), Aurélie PORCHER (Lycée Notre Dame *Les Oiseaux*, VERNEUIL SUR SEINE), Oumar GUEYE (Lycée Maurice Eliot, EPINAY SOUS SENART), Lydie WAGNER (Lycée Charles de Gaulle, POISSY)

# *Emploi du temps*

## *Lundi 10 février 2020*

<table>
<tr><th>Pontoise</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th><th>Versailles 4</th></tr>
<tr><td>10 heures<br>Nombres<br>K.R.</td><td colspan="4">10 heures<br>Films : La quadrature de la cycloïde (Thierry Lambre)<br>Mathématiques électorales (Barbara Schapira) Les dés du diable (Bernard Delyon)</td></tr>
<tr><td>11 H 45<br>Repas</td><td>11 heures<br>Aires et volumes<br>F.-X. D.+ N.F.</td><td>Équations<br>M.A. + G.Z.</td><td>Dénombrement, probabilités<br>C.D. + X.G.</td><td>Équations<br>C.W.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">12 h 30<br>Équations<br>J.M.<br><br>14 h 15<br>Dénombrement<br>Probabilités<br>V. M.<br>16 heures<br>Exposé<br>P.M.</td><td colspan="4">12 h 45<br>Repas</td></tr>
<tr><td>13 h 15<br>Dénombrement, probabilités<br>C.D. + X.G.</td><td>Aires et volumes<br>F.X. D.+ N.F.</td><td>Équations<br>M.A. + G.Z.</td><td>Organisation<br>Gestion de données<br>C.W.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Pause</td></tr>
<tr><td>15 h 15<br>Équations<br>M.A. + G.Z.</td><td>Dénombrement, probabilités<br>C.D. + X.G.</td><td>Aires et volumes<br>F.X. D.+ N.F.</td><td>OGD suite</td></tr>
</table>

## *Mardi 11 février 2020*

<table>
<tr><th>Pontoise</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th><th>Versailles 4</th></tr>
<tr><td>10 heures<br>Angles et distances<br>R.C.</td><td colspan="4">10 heures<br>Exposé : « Well, Papa, can you multiply triplets ? »<br>P.M.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">11 h 45<br>Repas<br><br>12 h 30<br>Suites et fonctions<br>B.B.<br><br>14 h 15<br>Aires et volumes<br>C.H.<br><br>16 heures<br><br>Films</td><td>11 heures<br>Angles et distances<br>H.C. + C.W.</td><td>Suites et fonctions<br>S.M. + C.D.</td><td>Nombres<br>F.R. + V.P.</td><td>Suites et fonctions<br>M.S.</td></tr>
<tr><td colspan="4">12 h 45<br>Repas</td></tr>
<tr><td>13 h 15<br>Nombres<br>F.R. + V.P.</td><td>Angles et distances<br>H.C. + C.W.</td><td>Suites et fonctions<br>S.M. + C.D.</td><td>Graphes<br>Organisation<br>Gestion de données<br>M.S.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>15 h 15<br>Suites et fonctions<br>S.M. + C.D.</td><td>Nombres<br>F.R. + V.P.</td><td>Angles et distances<br>H.C. + C.W.</td><td>OGD Suite</td></tr>
</table>

*Il est rappelé que les stagiaires ne sont pas autorisés à sortir. Les repas sont pris sur place, mais cette place doit rester propre après le repas.*

# *Thème : Nombres*

**Exercice 1 Une série sans carré parfait**
On donne deux entiers premiers, $p$ et $q$, et on suppose que $p+q^2$ est un carré parfait. Montrer que la suite de terme général $p^2+q^n$ ne contient aucun carré parfait.

**Exercice 2 On fait le produit, on prend son inverse, on somme tout…**
Étant donné un entier naturel $n$, on considère l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ et les $2^n-1$ parties non vides de cet ensemble. Pour chacune de ces parties, on fait le produit de ses éléments. On additionne enfin tous les inverses des produits obtenus.
Par exemple, pour $n=4$, il y a 15 parties non vides et les calculs proposés figurent dans le tableau suivant :

| Eléments | 1, 2, 3, 4 | 1, 2, 3 | 1, 2, 4 | 1, 3, 4 | 2, 3, 4 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 2, 3 | 2, 4 | 3, 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Produit | 24 | 6 | 8 | 12 | 24 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Inverse | 1/24 | 4/24 | 3/24 | 2/24 | 1/24 | 12/24 | 8/24 | 6/24 | 4/24 | 3/24 | 2/24 | 24/24 | 12/24 | 8/24 | 6/24 |
| Cumul | 1/24 | 5/24 | 8/24 | 10/24 | 11/24 | 23/24 | 31/24 | 37/24 | 41/24 | 44/24 | 46/24 | 70/24 | 82/24 | 90/24 | 96/24 |

Dans cet exemple, on a trouvé que la somme des inverses des produits des éléments des parties non vides est égale au cardinal de l'ensemble. Ce résultat est-il général ?

**Exercice 3 Un degré de plus que le voisin, c'est tout**
On demande quels sont les entiers $n$ pour lesquels il existe un polygone convexe à $n$ côtés dont les mesures en degrés des angles sont des entiers consécutifs.

**Exercice 4 Racines**

Quelle est la partie entière du nombre $N=\sqrt{2\,020+\sqrt{2\,019+\sqrt{\dots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}$ ?

**Exercice 5 Diviseurs positifs impairs d'un entier**
Soit $n$ un entier naturel et soit $k(n)$ le nombre de manières d'écrire $n$ comme la somme d'un ou plusieurs entiers naturels consécutifs. Montrer que $k(n)$ est égal au nombre de diviseurs positifs impairs de $n$.

**Exercice 6 Encore des fractions égyptiennes**
L'entier naturel $n$ est tel qu'il existe exactement 101 couples d'entiers naturels $(a, b)$ tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{n}$. Montrer que $n$ est un carré parfait.

# *Thème : Dénombrement, organisation, probabilités*

**Exercice 1 Ça monte ou ça descend**
Quelle est la somme de tous les nombres dont l'écriture décimale est une suite strictement croissante ou strictement décroissante de chiffres ?

**Exercice 2 Sectarisme**
Une secte, forte au départ de $2n$ membres, est minée par des questions de « pureté ». À chacune des réunions, un vote est organisé dans le but d'exclure tout membre ne réunissant pas en sa faveur la majorité ($p+1$ s'il reste $2p$ membres ou $2p+1$ membres) des votes des autres membres. Chacun – en dehors de celui qui est sur la sellette – doit s'exprimer par « oui » ou « non ». Les opinions de chacun sur les autres sont figées dans tout le processus.
Au bout de combien de temps la secte aura-t-elle perdu la moitié de ses membres ? En perdra-t-elle encore par la suite ?

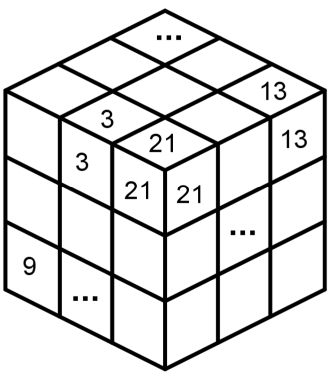
**Exercice 3 Couperet et troncature**
Mon boucher me fait toujours cadeau des centimes. Par exemple, j'ai pris 300 g de filet à 34,3 euros le kilo, 240 g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640 g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
Deux tickets d'anciens achats indiquent :
– 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
– 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.
Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

**Exercice 4 Carrés pas forcément magiques**
On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

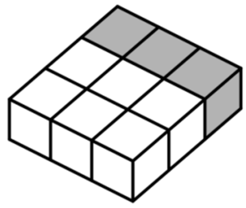
| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 |
| 9 | 2 | 4 |
| 6 | 5 | 3 |

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).
1. *a.* Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.
*b.* Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

**Exercice 5 Cube de cubes**



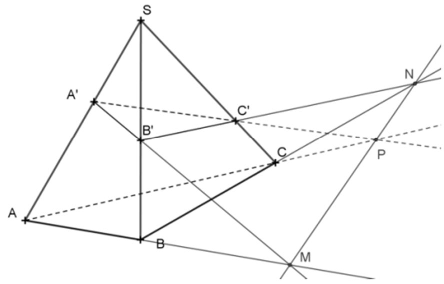

27 cubes élémentaires, numérotés de 1 à 27 aléatoirement, constituent un cube plus grand. La figure ci-contre donne un exemple (il ne faut pas prendre les nombres affichés comme des données). On calcule les sommes des numéros des trois petits cubes composant une même ligne (il y a 27 façons de le faire, longitudinalement à chacun des trois niveaux, transversalement à chacun des trois niveaux, verticalement pour chacune des neuf « piles »).
1. Montrer que, parmi les 27 sommes, il y a nécessairement un nombre pair de sommes impaires.
2. On considère une « tranche » du cube, horizontale ou verticale, et on suppose qu'une des 6 sommes correspondantes est paire (on a grisé les cubes correspondants sur la figure ci-contre, qui donne elle aussi un *exemple*).



Montrer qu'il y en a nécessairement une autre. Peut-il y avoir 26 sommes impaires ?
3. Peut-il y avoir 24 sommes impaires ?

# *Thème : Angles et distances, alignement et concours*

**Exercice 1 Le théorème de Desargues (pour la beauté de la chose)**
Dans le plan, si deux triangles ABC et A'B'C' sont tels que les droites joignant les sommets homologues soient concourantes (ici en S), alors les supports des côtés homologues sont parallèles ou se coupent en des points alignés.
(Girard Desargues, 1591 – 1661. Il signait S.G.D.L. « Sieur Girard Desargues, Lyonnais)

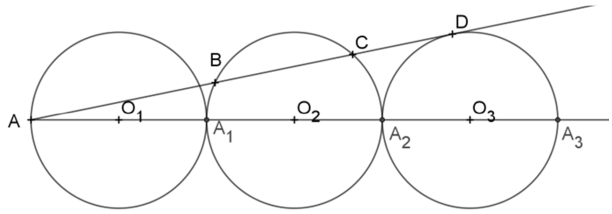



**Exercice 2 Cordes parallèles**
On considère quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur un cercle de centre O dont [AB] est un diamètre. Le cercle circonscrit au triangle DOC recoupe en P la droite (AC). Montrer que (PO) et (DB) sont parallèles

**Exercice 3 Origine de l'inégalité**
Le rayon $R$ du cercle circonscrit à un triangle ABC et l'aire $S$ de ce triangle satisfont l'inégalité $S \geq R^2$.
Prouver que la mesure de chacun des angles du triangle est supérieure à 30° et inférieure ou égale à 90°.

**Exercice 4 Triangle rectangle**
Montrer que le rayon $R$ du cercle circonscrit à un triangle rectangle et le rayon $r$ de son cercle inscrit satisfont $R \geq \left(1+\sqrt{2}\right)r$.

**Exercice 5 Alignement… de cercles**
Sur la figure ci-contre, les points $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3$ sont alignés sur une demi-droite d'origine A et sont les centres de trois cercles de même rayon $R$, le cercle de centre $\mathrm{O}_2$ étant tangent aux deux autres.
Une demi-droite issue de A est tangente en D au cercle de centre $\mathrm{O}_3$.

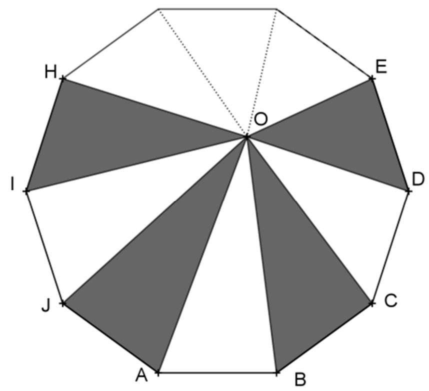



1. Montrer que [AD) coupe le cercle de centre $\mathrm{O}_2$ en deux points B et C. Calculer la distance BC.
2. Les droites ($\mathrm{A}_1$B) et ($\mathrm{A}_2$C) se coupent en P, les droites ($\mathrm{A}_1$C) et ($\mathrm{A}_2$B) se coupent en Q. Quelle est l'orientation de la droite (PQ) ?
3. Plus généralement, on considère maintenant $n$ cercles de même rayon $R$, de centres les $\mathrm{O}_i$ tous alignés et espacés régulièrement sur une demi-droite d'origine A. Une demi-droite d'origine A est tangente en D au cercle de centre $\mathrm{O}_n$ et coupe le cercle de centre $\mathrm{O}_i$ $(i \geq 2)$ en $\mathrm{B}_i$et $\mathrm{C}_i$.
Calculer la longueur $\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i$.
4. On prend $R = 1$. Montrer que la longueur $L_{n,i} = \mathrm{B}_i\mathrm{C}_i$ est rationnelle si et seulement si il existe un entier naturel $a$ tel que $n(n-1) - i(i-1) = 4a^2$

**Exercice 6 Ensembles orthocentriques**
*Le début de cet énoncé peut surprendre. Il faut admettre que la définition du produit scalaire n'introduit pas de cercle vicieux dans la géométrie élémentaire.*

Soit A, B et C trois points non alignés et M un point du plan.
1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$
En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.
2. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que le point K défini par
$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
est l'orthocentre du triangle.
Dans la suite, à toute partie $X$ du plan non incluse dans une droite, on associe l'ensemble $\mathcal{H}(X)$ des orthocentres des triangles dont les sommets sont des points de $X$. On dira qu'une partie $X$ du plan est *orthocentrique* si $\mathcal{H}(X)$ est inclus dans $X$.
3. Déterminer les parties orthocentriques à trois éléments.
4. Déterminer les parties orthocentriques à quatre éléments.
5. Soit $X$ un ensemble de quatre points situés sur un cercle.
*a.* Montrer que $\mathcal{H}(X)$ se déduit de $X$ par une transformation simple.
*b.* On pose $Y = \mathcal{H}(X)$. Déterminer $\mathcal{H}(Y)$.

# Thème : Aires et volumes




**Exercice 1 Domino**

Un point O étant donné à l'intérieur d'un polygone régulier possédant un nombre pair de côtés (qu'on pourra noter $2n$), on considère les triangles dont les sommets sont O et deux sommets consécutifs du polygone. On colorie ces triangles alternativement en noir et en blanc.
Montrer que l'aire totale blanche est égale à l'aire totale noire.

**Exercice 2 *a. De la formule de Héron…***

On appelle $a, b, c$ les longueurs des côtés d'un triangle et $p = \frac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre.
Montrer que l'aire $S$ du triangle vérifie $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

***b.… à la formule de Brahmagupta***

On appelle $a, b, c, d$ les longueurs des côtés d'un quadrilatère *cyclique* (cyclique = inscriptible) et $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ son demi-périmètre.
Montrer que l'aire $S$ de ce quadrilatère est $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

(Brahmagupta, 598 – 670, mathématicien et astronome indien)

**Exercice 3 Étude d'une surface**

On considère l'ensemble $(\Sigma)$ des points de l'espace dont les coordonnées dans un repère orthonormé vérifient :

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

1. On donne un réel $\lambda$ et on appelle $P_\lambda$ le plan d'équation $x = \lambda$. Quelle est la nature de l'intersection $(\Sigma) \cap P_\lambda$ ?
2. Soit $I$ le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $d$ la droite passant par $I$ et de vecteur directeur $\vec{\imath}$. Montrer que $d$ est un axe de symétrie de $(\Sigma)$ et déterminer l'intersection de $(\Sigma)$ avec le plan d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Quelle est la nature de $(\Sigma)$ ?

**Exercice 4 Quadrature d'un arc d'hyperbole**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, soit $\mathcal{H}$ la courbe ensemble des points dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient $x \geq 1$ et $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
À tout point A de $\mathcal{H}$ , de coordonnées $(r, s)$, on associe la partie du plan ensemble des points dont les coordonnées vérifient $1 \leq x \leq r$ et $y^2 \leq x^2 - 1$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de cette partie de plan.
1. Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de $r$ et $s$. On pourra utiliser une rotation du repère d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de sens indirect.
2. Soit $n$ un entier naturel non nul et $u$ un réel positif tel que$u^n = r + s$. Pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, on considère le trapèze rectangle $T_k$ (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $(u^{k-1}, 0)$ et $(u^k, 0)$ dont les bases ont pour pente $-1$ et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse $\frac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}$.
*a.* Faire un croquis.
*b.* Quelle est la limite de la somme des aires de ces trapèzes ?

**Exercice 5 Une formule pour calculer des aires planes**

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On appelle $P_0$ le plan défini par $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère un plan $P$ de vecteur unitaire orthogonal $\vec{n}$ tel que $\vec{n}.\vec{k} = \cos\gamma$.
1. On suppose dans cette question que les plans $P_0$ et $P$ ne sont pas parallèles. On appelle $D$ leur droite d'intersection, et on considère deux points A et B de cette droite. Un point C du plan $P$ pour projeté orthogonal sur $P_0$ le point C'. Le point H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
*a.* Montrer que H est aussi le projeté orthogonal de C' sur (AB).
*b.* En déduire une relation entre les longueurs CH et C'H et l'angle $\gamma$, puis entre les aires $S$ et $S'$ des triangles ABC et ABC'.

*c.* On considère un polygone $Q$ situé dans le plan $P$ et sa projection orthogonale $Q'$ dans $P_0$. Quel est le rapport des aires de $Q'$ et de $Q$ ?

2. Que dire dans le cas particulier où les plans $P_0$et $P$ sont parallèles ?

3. On pose $\vec{n}.\vec{\imath} = \cos\alpha$ et $\vec{n}.\vec{\jmath} = \cos\beta$.

*a.* Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ont pour valeurs absolues $|\cos\alpha|, |\cos\beta|, |\cos\gamma|$.

*b.* Soit $Q$ un polygone d'aire $S$ contenu dans le plan $P$ et soit $S', S''$et $S'''$ les aires de ses projetés orthogonaux respectivement sur les plans $(O,\vec{\jmath},\vec{k}), (O,\vec{k},\vec{\imath}), (O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que $S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$.


Place Royale (place des Vosges à Paris) :

Quatre mathématiciens de l'époque (manque Roberval). Ils se sont rencontrés, mais pas tous en même temps et peut-être pas là.

# *Thème : Équations*

**Exercice 1 Équation cubique**
Quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles l'équation
$x^3 + ax - 2(a + 4) = 0$
Possède exactement deux solutions réelles ?

**Exercice 2 Presque pareilles**
Deux entiers naturels non nuls $m$ et $n$ sont tels que les équations $x^2 + mx + n = 0$ et $x^2 + nx + m = 0$ n'admettent chacune que des solutions entières, et au moins une. Quels sont les couples $(m, n)$ ?

**Exercice 3 Equation polynomiale**
On donne cinq réels distincts $a, b, c, d$ et $e$.
Montrer que l'équation
$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + (x - a)(x - b)(x - c)(x - e) + (x - a)(x - b)(x - d)(x - e) + (x - a)(x - c)(x - d)(x - e) + (x - b)(x - c)(x - d)(x - e) = 0$
possède quatre racines réelles.

**Exercice 4 On cherche un couple**
Trouver tous les couples d'entiers $(m, n)$ pour lesquels : $2^{2m+1} + 9.2^m + 5 = n^2$

**Exercice 5 Second degré**
Dans cet exercice, on considère des fonctions polynômes du second degré *unitaires*, c'est-à-dire dont le coefficient du terme du second degré est égal à 1.
1. La fonction $P$ est une fonction polynôme du second degré *unitaire.* On sait que $P(1) = P(2) = 0$. Quelle est la fonction $P$ ?
2. La fonction $T$ est une fonction polynôme du second degré *unitaire*, pour laquelle on peut trouver quatre réels, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ deux à deux distincts tels que $T(\alpha) = T(\beta)$ et $T(\gamma) = T(\delta)$. Prouver que $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.
3. Avec deux fonctions polynômes du second degré *unitaires*, $Q$ et $R$, on peut construire la fonction qui à tout nombre réel $x$ associe $Q\big(R(x)\big)$ (image par $Q$ de l'image de $x$ par $R$). C'est une fonction polynôme du quatrième degré. On dit que cette fonction est la composée de $R$ par $Q$.
Trouver deux fonctions polynômes du second degré *unitaires* $Q$ et $R$ telles que les solutions de l'équation $Q\big(R(x)\big) = 0$ soient les nombres 1, 2, 3 et 4.
4. On effectue cette fois la composition de trois fonctions polynômes du second degré *unitaires*, dans l'ordre $f$ puis $g$ puis $h$.
On suppose que les solutions de l'équation $h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = 0$ sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
*a.* Prouver que parmi les nombres $f(1), f(2), f(3), \dots, f(7), f(8)$, il y a exactement quatre valeurs différentes.
*b.* Existe-t-il des fonctions polynômes du second degré $f$, $g$ et $h$ *unitaires* pour lesquelles l'équation $h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = 0$ a pour solutions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 ?

# *Thème : Suites et fonctions*

**Exercice 1 À la Oresme**

Montrer que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,019}+\frac{1}{2\,020}>\frac{13}{2}$

(Nicole Oresme, 1320 ( ?) – 1382, donne dans « Questiones super geometriam euclidis », la première preuve de la divergence de la série harmonique)

**Exercice 2 Suites périodiques**

Déterminer toutes les suites périodiques obéissant à la relation de récurrence $x_{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}}+x_n\right)$

**Exercice 3 Une fonction capricieuse**

La fonction $f$ est définie et continue sur $[0,1]$ et vérifie :

1. $f(0)=f(1)=0$ ;
2. Pour tout $x\in\left[0,\frac{7}{10}\right]$, $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins sept solutions sur $[0,1]$

Donner un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses. Une représentation graphique suffira.

**Exercice 4 Avec une hyperbole**

On donne un nombre réel $a$ compris strictement entre 0 et 1.

On considère l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points du plan, rapporté à un repère orthonormé, dont les coordonnées vérifient : $(1-x)(1-y)=a$. On appelle $\mathcal{H}_1$ la partie de $\mathcal{H}$ contenu dans le carré délimité par les axes de coordonnées et les droites d'équations $x=1$ et $y=1$.

1. Préciser la nature de $\mathcal{H}$. Représenter $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$.
2. Montrer que, quand le point de coordonnées $(x,y)$ décrit $\mathcal{H}_1$, la somme $x+y$ prend toutes les valeurs d'un certain intervalle à préciser.

**Exercice 5 Somme de puissances et puissance d'une somme**

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant, pour tout entier $n$ :

$$x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+\cdots+x_n{}^3=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n$, il existe un entier naturel $m$ tel que $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=\frac{m(m+1)}{2}$.

2. Pour tous entiers naturels $n$ et $p$, on pose $S_{n,p}=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$.

Quels sont les entiers naturels $p$ pour lesquels $S_{n,p}$ est le carré d'un entier naturel ?

**Exercice 6 Des suites « géométriques »**

On donne dans le plan un triangle ABC. On considère le point $A_1$, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, puis le point $A_2$, centre du cercle inscrit dans le triangle $A_1BC$, puis le point $A_3$ centre du cercle inscrit dans le triangle $A_2BC$, etc.

1. Y a-t-il un « point limite » pour la suite ainsi définie, c'est-à-dire un point I tel que la distance $IA_n$ tende vers 0 ?
2. Même question en partant de l'orthocentre $H_1$ du triangle ABC, puis l'orthocentre du triangle $H_1BC$.

# *Thèmes divers pour les candidats en voie ES*

## *Suites et fonctions*

**Exercice 1 Une fonction capricieuse**
La fonction $f$ est définie et continue sur $[0, 1]$ et vérifie :
1. $f(0) = f(1) = 0$ ;
2. Pour tout $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right], f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins sept solutions sur $[0,1]$
Donner un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses. Une représentation graphique suffira.

**Exercice 2 À la Oresme**
Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2\,019} + \frac{1}{2\,020} > \frac{13}{2}$

(Nicole Oresme, 1320 ( ?) – 1382, donne la première preuve de la divergence de la série harmonique)

**Exercice 3 Suites périodiques**
Déterminer toutes les suites périodiques obéissant à la relation de récurrence $x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right)$

**Exercice 4 La médiane et la moyenne comme minimums**
On considère une série statistique comptant 5 valeurs (cet effectif ne sert que d'exemple) $a < b < c < d < e$.
1. Déterminer le minimum de la fonction $f : x \longmapsto |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d| + |x - e|$
2. Déterminer le minimum de la fonction $g : x \longmapsto (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 + (x - d)^2 + (x - e)^2$

## *Organisation, gestion de données, probabilités*

**Exercice 1 Problème de Frobénius version pâtissière**
Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.
**1.** Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?
**2. *a.*** Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.
***b.*** Montrer que, s'il existe un entier $n$ tel que tout achat de $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à $n$.
***c.*** Déterminer le plus petit entier $n$ réalisant la condition précédente.
**3. *a.*** Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
***b.*** Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?
Pour conditionner une commande de $n$ canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.
**4. *a.*** Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
***b.*** Et pour répartir 75 canelés ?
***c.*** Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

**Exercice 2 Dés trompeurs**
On lance deux dés $D_a$ et $D_b$ successivement et indépendamment ; on considère le total de points ainsi ramené et sa probabilité d'apparition. Les dés envisagés sont tétraédriques, comme dans le croquis ci-contre. En questions 1. et 2., leurs quatre faces sont standards, numérotées 1, 2, 3, 4. Le numéro tiré est celui de la face sur laquelle repose le dé (sur la figure, 1 ou 3).

1. Donner les trois manières d'obtenir pour total 6, en déduire que la probabilité d'obtenir un total de 6 est $\frac{1}{12}$.
3. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « somme des points obtenus ». Qu'indiquent les coefficients

de l'expression polynomiale $P(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2$ une fois développée ? Expliquer.
Pour plus d'originalité, on prend maintenant des dés non standards : un dé $D_1$ aux faces numérotées 1, 1, 2, 5 et un dé $D_2$ aux faces numérotées 1, 4, 4, 4.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 6 ?

De manière générale, le dé $D_a$ a quatre faces dont les valeurs $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ et sont stockées dans un tableau $t_a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4]$. De même, le dé $D_b$ a quatre faces $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ vérifiant $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ et stockées dans le tableau $t_b = [b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4]$. On définit les quantités polynomiales $A(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3} + x^{a_4}$ et $B(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + x^{b_3} + x^{b_4}$. Par exemple, les dés de la question 3. donnent lieu à $t_a = [1,\ 1,\ 2,\ 5]$, $t_b = [1,\ 4,\ 4,\ 4]$, $A(x) = 2x + x^2 + x^5$ et $B(x) = x + 3x^4$.

**4.** Déterminer $t_a$, $t_b$, $A(x)$, $B(x)$ attachés aux dés $D_a$ et $D_b$ de faces 1, 2, 2, 3 et 1, 3, 3, 5.

**Exercice 3 La raison du plus fort…**
Deux loups, immobiles, sont placés aux extrémités d'un chemin rectiligne fréquenté par des agneaux. À chaque étape, un agneau double la distance qui le sépare du loup le plus proche, quitte à se rapprocher éventuellement de l'autre loup. On suppose que le chemin a pour longueur l'entier $2n + 1$ et que, sur ce chemin, les agneaux ne peuvent se trouver qu'aux points d'abscisses entières comprises entre 1 et $2n$. Par exemple, pour $n = 2$, on a un chemin de longueur 5, et si l'agneau se trouve en 3, il passe en 1, puis en 2, puis en 4 et revient en 3.
**Déplacement d'un agneau**
On suppose dans cette partie que le chemin est de longueur 9 ($n = 4$).
**1.** ***a.*** L'agneau se trouve initialement en position 4. Quelles sont toutes les positions qu'il peut atteindre ?
***b.*** Et s'il part de la position 3 ?
***c.*** Est-il vrai, quand $n = 4$, que l'agneau retrouve un jour sa position initiale quel que soit son point de départ ?
**Un agneau en orbite**
On appelle orbite d'un entier $k$ compris entre 1 et $2n$ l'ensemble des positions possibles pour un agneau se trouvant initialement en position $k$.
**2.** On suppose dans cette question que $n = 5$.
***a.*** Quelle est l'orbite de 2 ?
***b.*** En déduire les orbites des entiers compris entre 1 et 10.
**3.** On suppose dans cette question que $n = 7$.
Combien y a-t-il d'orbites distinctes dans ce cas ?
**4.** Au cours de ses déplacements, un agneau se trouve en position $k$. Quelle était sa position précédente ?
**5.** Montrer que, pour tout $n$ et tout $k$, où $1 \leq k \leq 2n$, quand un agneau part de la position $k$, il retrouvera à nouveau cette position dans son périple

**Exercice 4 Généalogie**
Dans un bourg assez isolé qui compte 2 020 habitants, on observe que :
- Chaque habitant connaît au moins un autre habitant portant le même nom que lui ;
- Dans tour groupe de 192 habitants, il y en a au moins trois qui portent le même nom.
Montrer qu'il existe un groupe de 22 personnes ayant le même nom.

# *Équations*

**Exercice 1 Couperet et troncature**
Mon boucher me fait toujours cadeau des centimes. Par exemple, j'ai pris 300 g de filet à 34,3 euros le kilo, 240 g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640 g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
Deux tickets d'anciens achats indiquent :
– 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
– 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.
Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

**Exercice 2 Presque pareilles**

Deux entiers naturels non nuls $m$ et $n$ sont tels que les équations $x^2 + mx + n = 0$ et $x^2 + nx + m = 0$ n'admettent chacune que des solutions entières, et au moins une. Quels sont les couples $(m, n)$ ?

## *Graphes*

Un graphe complet compte 30 sommets. Ses arêtes sont de l'une des deux couleurs, rouges ou bleues. Une *opération* consiste à choisir deux arêtes de même couleur d'un sous-graphe à 3 sommets et leur donner la couleur de la troisième arête pour obtenir un sous-graphe monochromatique.

Est-il possible, en répétant ces *opérations*, d'obtenir un graphe monochromatique ?