académie Versailles

RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Lycée Camille Pissarro
Pontoise

Inria
inventeurs du monde numérique


Lycée La Bruyère
Versailles

« La plus commune opinion dérive le mot *Mathématique* d'un mot grec qui signifie *science* ; parce qu'en effet, on peut regarder, selon eux, les *Mathématiques* comme étant la science par excellence, puisqu'elles renferment les seules connaissances certaines accordées à nos lumières naturelles ; nous disons à *nos lumières naturelles*, pour ne point comprendre ici les vérités de foi et les dogmes théologiques. »

Jean le Rond d'Alembert, article MATHÉMATIQUE de l'Encyclopédie

Stage ouvert aux élèves de terminale présentés au Concours général des lycées – 19 et 20 février 2018

« La vérité n'est pas pour le *philosophe* une maîtresse qui corrompe son imagination, et qu'il croie trouver partout ; il se contente de la pouvoir démêler où il peut l'apercevoir. Il ne la confond point avec la vraisemblance ; il prend pour vrai ce qui est vrai, pour faux ce qui est faux, pour douteux ce qui est douteux, et pour vraisemblable ce qui n'est que vraisemblable. Il fait plus, et c'est ici une grande perfection du *philosophe*, c'est que lorsqu'il n'a point de motif propre pour juger, il sait demeurer indéterminé. »

Extrait de l'article « PHILOSOPHE » de l'Encyclopédie (article écrit par César Chesneau Dumarsais)

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril. La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, cette année le collège Jean-Philippe Rameau et le lycée La Bruyère de Versailles et le lycée de la Vallée de Chevreuse à Gif- sur-Yvette. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, ce qui est nécessairement le cas pour le stage réservé aux candidats désignés pour le Concours général.

Pour la première fois, le stage est ouvert aux candidats au Concours général en mathématiques série ES/L.
Le programme prévu pour ces élèves comporte des séances spécifiques et, sur les thèmes communs, des exercices n'utilisant pas de connaissances spécifiques liées au cursus S.

Philippe JULIEN,
professeur au lycée International de Saint Germain en Laye, animateur du club de mathématiques du lycée, est décédé en juillet dernier.
Il aimait faire des mathématiques avec les élèves.
La Pépinière académique lui doit beaucoup.
Les stages 2017-2018 lui sont dédiés

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (insp. Honoraire), Jean-François REMETTER, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET
Les intervenants professeurs : Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY) Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), François-Xavier DUTHOIT (Lycée Hoche, VERSAILLES), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Pascal RÉMY (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE)
Professeurs accompagnants : Tahar EL ALAMI (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Benoît HUMBERT (Lycée Le Corbusier, POISSY), Karim KATEB (Lycée Richelieu, RUEIL MALMAISON), François REGUS (Lycée Eugène Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Monique TALEB (Lycée Hoche, VERSAILLES), Fadi TAMIM (Lycée Hoche, VERSAILLES), Gwenaëlle THOMAS (Lycée Alain, LE VESINET)

Emploi du temps

Lundi 19 février 2018

Pontoise		Versailles 1	Versailles 2	Versailles 3	Versailles 4
		10 heures Film Le dernier théorème de Fermat			
Angles et distances CH		11 h 10 Angles et distances NF	Probabilités Combinatoire PR+CD	Suites et fonctions HC	Miscellanées CW
Repas		12 h 40 Repas			
Probabilités Combinatoire BB		13 h 30 Suites et fonctions HC	Angles et distances NF	Probabilités Combinatoire PR+CD	Suites et fonctions
Nombres CH+BB		15 heures Probabilités Combinatoire PR+CD	Suites et fonctions HC	Angles et distances NF	Probabilités Combinatoire

Mardi 20 février 2018

Pontoise		V1	V2	V3	V4
Paradoxes ?		10 heures Équations SM	Aires et volumes MA+CD	Nombres FXD	Nombres
Équations RC		11 h 30 Repas			
Repas		12 h 30 Nombres FXD	Équations SM	Aires et volumes MA+CD	Miscellanées MS
Suites et fonctions JM		14 heures Aires et volumes MA+CD	Nombres FXD	Équations SM	Équations
Aires et volumes KR		15 h 30 Paradoxes ?			

Thème : nombres

Exercice 1 Deux irrationnels pour un rationnel ?
Montrer que, a et b étant des nombres entiers positifs et c un nombre rationnel,
l'égalité $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$ implique que a et b sont des carrés d'entiers.
Si $c=0$, les trois nombres sont nuls. Si $c\neq 0$, écrivons $a+b+2\sqrt{ab}=c^2$. Cette égalité prouve que $\sqrt{ab}$ est un nombre rationnel. Son carré ab est donc le carré d'un rationnel, et comme c'est un entier, c'est le carré d'un entier. Posons $ab=m^2$. Il vient $c=\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}+\frac{m}{\sqrt{a}}$ et donc $\sqrt{a}=\frac{m+a}{c}$ ce qui prouve que $\sqrt{a}$ est rationnel, et donc que a est le carré d'un entier. b aussi.

Exercice 2 Bataille de radicaux
Trouver trois entiers a, b et c tels que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{219+\sqrt{10\,080}+\sqrt{12\,600}+\sqrt{35\,280}}$
On peut commencer par transformer l'écriture des radicaux : $\sqrt{10\,080}=12\sqrt{70}, \sqrt{12\,600}=30\sqrt{14}$ et $\sqrt{35\,280}=84\sqrt{5}$. Façon de vérifier qu'on a bien affaire à des irrationnels. Élevons au carré les deux membres de l'égalité : $a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}=219+12\sqrt{70}+30\sqrt{14}+84\sqrt{5}$
Les trois radicaux irrationnels du second membre doivent correspondre aux trois radicaux du premier membre. Et si on suppose que $a\leq b\leq c$, on obtient : $ab=2\,520$, $ac=3\,150$, $bc=8\,820$
On a donc $abc=264\,600$ et donc $a=30, b=84, c=105$.
On vérifie que $a+b+c=219$

Exercice 3 Et si la différence de deux cubes est un carré ?
La différence entre les cubes de deux entiers consécutifs est le carré d'un entier. Montrer que cet entier est une somme de deux carrés.
Considérons l'égalité $(m+1)^3-m^3=n^2$. Elle peut être écrite $3m^2+3m=n^2-1$ ou encore, en multipliant les deux membres par 4 : $3(2m+1)^2=4n^2-1$
De $3(2m+1)^2=(2n+1)(2n-1)$, on déduit que les deux facteurs du second membre, qui sont premiers entre eux (ils sont impairs consécutifs), sont l'un un carré (le carré d'un nombre impair, car il est impair), l'autre le produit de 3 par un carré. Nous savons que n est impair (différence des cubes d'un impair et d'un pair ou d'un pair et d'un impair). Si $2n+1$ est un carré, le carré d'un nombre impair a, on a alors $2n=a^2-1$, mais le membre de droite de cette dernière égalité est multiple de 4, ce qui rendrait n pair. Donc on doit supposer que $2n-1$ est le carré d'un entier (impair) : $2n-1=(2p+1)^2$, et donc $n=p^2+(p+1)^2$

Exercice 4 Dans le désordre
Les chiffres utilisés pour écrire l'entier N dans le système décimal sont réordonnés pour écrire l'entier M. Quelles sont les affirmations vraies :
1. La somme des chiffres de $2N$ est la même que la somme des chiffres de $2M$.
2. La somme des chiffres de $3N$ est la même que la somme des chiffres de $3M$.
3. La somme des chiffres de $5N$ est la même que la somme des chiffres de $5M$?

1. Les chiffres servant à l'écriture de N sont de deux types : ceux qui donnent lieu à retenue dans le produit par 2 (les « longs » 5, 6, 7, 8, 9) et ceux qui ne donnent pas lieu (les « courts » 0, 1, 2, 3, 4).
Dans le produit par 2, les « 0 » ne donnent pas lieu à modification de la somme des chiffres. Les « courts » sont multipliés par 2. Pour un chiffre « long », qui s'écrit par exemple $x=5+a$, le produit par 2 est $10+2a$. Pour la somme S des chiffres, l'incidence est $+1+a-5=a-4=x-9$.
Appelons $S(N)$la somme des chiffres de N (respectivement $2N$), $C(N)$la somme de ses chiffres « courts » hormis 0 et $L(N)$la somme de ses chiffres « longs ». Soit $\tau(N)$ le nombre de chiffres « longs » de N.
On a $S(2N)=2\times C(N)+L(N)-9\tau(N)$. Comme N et M ont les mêmes chiffres, Il y a égalité terme à terme pour les sommes donnant $S(2N)$ et $S(2M)$. La première affirmation est donc vraie pour tout N.
2. Cette affirmation est fausse. Les nombres 34 et 43 ont les mêmes chiffres, cependant les sommes des chiffres de 102 et 129 ne sont pas les mêmes.
3. Quand on multiplie un des dix premiers entiers par 5, on obtient 0, 5 ou un nombre de deux chiffres terminé par 0 ou 5 et dont le chiffre des dizaines est inférieur à 4 : dans le produit d'un entier quelconque par 5, il n'y a donc pas répercussion de la retenue. Dans la somme des chiffres d'un entier et de son produit par 5, 0 devient 0, 1 devient 5, 2 devient 1 (10, donc seule la retenue compte), 3 devient 6, 4 devient 2, 5 devient 7, 6 devient 3, 7 devient 8, 8 devient 4 et 9 devient 9. L'ordre dans lequel ces chiffres apparaissent n'intervient pas. L'affirmation est correcte.

Exercice 5 Sommes de fractions
Pour tout entier n supérieur à 2, on considère les couples (a,b) pour lesquels $a<b\leq n$, $a+b>n$ et a et b sont premiers entre eux. Par exemple, pour $n=5$, ces couples sont :

$$(1,5),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)$$

Cela fait, on calcule la somme de toutes les fractions $\frac{1}{ab}$.

Pourquoi cette somme est-elle égale à $\frac{1}{2}$?

On peut commencer par vérifier que le résultat annoncé est vrai pour $n=3$ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\right)$ et 4 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\right)$.

On se donne un entier n quelconque vérifiant la propriété $\sum_{(a,b)\in C_n}\frac{1}{ab}=\frac{1}{2}$, où C_n désigne l'ensemble des couples (a,b) d'entiers inférieurs ou égaux à n premiers entre eux, rangés dans cet ordre et dont la somme est strictement supérieure à n.

On s'intéresse à l'entier suivant, $n+1$.

Pour obtenir l'ensemble C_{n+1} à partir de l'ensemble C_n, il faut ôter les couples (a,b) dont la somme est égale à $n+1$ (les autres vérifient toujours $a<b\leq n$, donc $a<b\leq n+1$, et $a+b>n+1$) et ajouter les couples $(a,n+1)$ pour lesquels a est premier avec $n+1$.

Les couples « sortants » ont pour somme : $S=\sum_{\substack{0<a<\frac{n+1}{2}\\ \text{pgcd }(a,n+1-a)=1}}\frac{1}{a(n+1-a)}$

Les couples « ajoutés » ont pour somme : $T=\sum_{\substack{0<a<n+1\\ \text{pgcd}(a,n+1)=1}}\frac{1}{a(n+1)}$

Dans la deuxième somme, on peut regrouper les termes pour avoir une indexation identique à celle de la première : $T=\sum_{\substack{0<a<\frac{n+1}{2}\\ \text{pgcd }(a,n+1-a)=1}}\left(\frac{1}{a(n+1)}+\frac{1}{(n+1-a)(n+1-a)}\right)$ (évidemment, on a remarqué que si, de deux nombres, l'un est premier avec leur somme, l'autre l'est aussi). Les deux sommes S et T sont les mêmes. On peut achever la récurrence.

Exercice 6 Une écriture historique mais plus qu'ambiguë (voir l'exercice 5 du thème *Équations*)

Écrire plus simplement le nombre $N=\sqrt[3]{52+\sqrt{-2\,209}}+\sqrt[3]{52-\sqrt{-2\,209}}$

N.B. *Les « racines » sont à prendre au sens complexe, et avec des notations que certains mathématiciens (pas tous) n'emploieraient plus.*

Observons d'abord que $2\,209=47^2$. En écrivant $2\,209=(47\mathrm{i})^2$, on peut prendre la liberté d'écrire $\sqrt{-2\,209}=47\mathrm{i}$ (comme l'écriture de N présente une forme de symétrie, on n'a rien fait de mal). Maintenant, essayons de résoudre $(a+\mathrm{i}b)^3=52+47\mathrm{i}$. On fait confiance à l'auteur de l'énoncé pour que ce ne soit pas trop difficile, et on trouve que $a=4$ et $b=1$ conviennent. Le nombre $4+\mathrm{i}$ est donc une racine cubique de (a un cube égal à) $52+47\mathrm{i}$, et son conjugué a pour cube $52-47\mathrm{i}$. On conclut trop vite que $N=8$.

Observons que $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(4+\mathrm{i})$ a aussi pour cube $52+47\mathrm{i}$ et que finalement $-4+\sqrt{3}$ et $-4-\sqrt{3}$ pourraient aussi s'écrire sous la forme vue plus haut. L'écriture $\sqrt[3]{\ }$ est à réserver à une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans lui-même.

Exercice 7 Accommoder les restes

Dans la division euclidienne de 13 par 9, le reste est 4, par 7, le reste est 6 et par 5 le reste est 3. La somme de ces trois restes est … 13. Cela arrive-t-il souvent ?

1. Soit n un entier naturel et soient a et b deux entiers strictement inférieurs à n. Soient p et q les restes des divisions euclidiennes de n par a et b respectivement. Montrer que $p+q<n$.

2. Quels sont les entiers n strictement supérieurs à 229 dont les divisions euclidiennes par 99, 132 et 229 donnent des restes dont la somme est n ?

1. La division euclidienne de n par a s'écrit $\begin{cases}n=ax+p\\ 0\leq p<a\end{cases}$. Si $2a\leq n$, alors $2p<n$. Si $2a>n$, alors la division euclidienne s'écrit $\begin{cases}n=a+(n-a)\\ n-a<a\end{cases}$. Or, $n-a<n-\frac{n}{2}$ et donc $n-a<\frac{n}{2}$ (on a écrit $\frac{n}{2}$, pas très convenable pour un exercice sur les entiers…) On peut faire le même raisonnement pour b. Les deux restes sont inférieurs strictement à $\frac{n}{2}$. D'où la conclusion.

2. Appelons $r,s,\ t$ respectivement les restes des divisions euclidiennes de n par 99, 132 et 229. Il vient que $n-t$ est un multiple de 229, mais comme $n-t=r+s$, on en déduit que $r+s$ est un multiple de 229. Mais comme $r+s\leq 98+131=229$, on en déduit que $r+s=229$. Mais alors, la seule hypothèse possible est $r=98$ et $s=132$ et le nombre $n+1$, divisible par 99 et 132, est divisible par leur pgcd qui est 396. Mais comme $t<229$, le nombre $n+1$ est inférieur à $2\times 229=458$. Ce nombre est donc 396 et le nombre cherché 395.

Suites et fonctions

Exercice 1 Fais-moi un signe

Prouver que pour tous réels a, b et c, pourvu que a, b et c ne soient pas tous les trois égaux, $F(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ et $G(a,b,c) = a + b + c$ ont le même signe.

On a $F(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

Ou encore : $F(a,b,c) = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

Le dernier facteur est strictement positif, d'après l'hypothèse. Le résultat s'en déduit.

Exercice 2 Une équation fonctionnelle

Déterminer les foncions f, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, pour lesquelles :

1. Pour tout couple (m, n) d'entiers, $f(mn) = f(m)f(n)$;
2. Pour tout entier n, $f^{(n)}(n) = n$, écriture dans laquelle $f^{(n)}$désigne la composée de f $(n-1)$ fois par elle-même

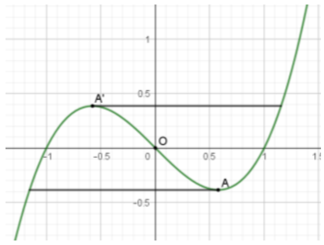
1. L'image de tout entier est le produit des images des facteurs premiers de sa décomposition, chacun représenté avec son exposant ;
2. L'orbite de tout entier n (c'est-à-dire l'ensemble de ses images successives par f) est un ensemble fini dont le cardinal est un diviseur de n. En effet, comme $f^{(n)}(n) = n$, l'orbite de n possède au plus n éléments. Appelons $a_0 = n, a_1, a_2, \text{etc.}, a_{n-1}$ les éléments de l'orbite de n et d le plus petit entier pour lequel on peut trouver k compris entre 0 et $n-1$ tels que $a_{k+d} = a_k$. Un tel entier existe, puisque n lui-même a cette propriété. En prenant un certain nombre de fois l'image de chacun des membres de cette égalité par f, on obtient $a_0 = a_d$. On en déduit que d est un diviseur de n et que l'orbite de n contient exactement d éléments.
3. L'image de tout nombre premier p par f est lui-même. En effet, l'orbite de p contient 1 élément (p) ou p éléments. Dans ce dernier cas, il existe un entier x dont l'orbite contient p.

Exercice 3 Cordes d'une cubique

On dit que la représentation graphique d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ présente une *corde horizontale de longueur* a $(a > 0)$ s'il existe un réel x tel que $f(x+a) = f(x)$. À quelle condition (sur a) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x$ présente-t-elle une corde horizontale de longueur a ?

Il s'agit de savoir si l'équation $(x+a)^3 - (x+a) = x^3 - x$ admet des solutions.
Cette équation s'écrit aussi :$(x+a)^3 - x^3 = (x+a) - x$, ou encore (en simplifiant par a, qu'on peut de toutes façons supposer non nul, car une corde de longueur nulle, il y en a partout…) $3x^2 + 3ax + a^2 = 1$

Finalement, l'équation s'écrit $3\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 1 = 0$. Elle a des solutions si et seulement si $\frac{a^2}{4} \leq 1$, c'est-à-dire $0 < a \leq 2$



Les cordes « extrêmes » passant par les sommets de la courbe.

Exercice 4 Rien que des 1 et des – 1

Les nombres $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ valent tous 1 ou -1 et on sait que
$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$
Montrer que n est un multiple de 4.

La somme de ces n produits de n nombres valant tous 1 ou -1 est nulle. Cela entraîne qu'il y en a autant valant 1 que -1. Donc n est pair. Posons $n = 2p$

Posons $S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$

$S = x_1(x_2 + x_{2p}) + x_3(x_2 + x_4) + x_5(x_4 + x_6) + \cdots + x_{2p-1}(x_{2p-2} + x_{2p})$ $(*)$

Notons $a_0 = x_2 + x_{2p}$; $a_i = x_{2i} + x_{2i+2}, i \in \{1, .. p-1\}$. Chaque $a_i$vaut 0, 2 ou –2. Les coefficients par lesquels ils sont multipliés valent 1 ou –1.

Comme $S = 0$, dans la somme $(*)$ il y a autant de terme valant 2 que de terme valant -2. Autrement dit le nombre de a_i non nuls est pair. Notons k le nombre de a_i positifs et k' le nombre de a_i négatifs. $k + k'$ est pair. Autrement dit k et k' sont de même parité.

Posons alors : $H = a_a + a_1 + \cdots + a_{p-1}$

(1) On a $H = 2k - 2k' = 2(k - k')$. k et k' ayant même parité, $H/2$ est pair
(2) On a aussi $H = 2(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2p})$ et $\frac{H}{2} = (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2p})$. Chaque x_i valant 1 ou -1, cette somme a même parité que p.

D'après (1) et (2) p est pair et donc $n = 2p$ est un multiple de 4.

Exercice 5 Du sol au plafond…

La fonction *floor* (en français *partie entière* mais il peut y avoir des nuances) associe à tout réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

La fonction *ceiling* associe à tout réel x le plus petit entier supérieur ou égal à x. On la note $\mapsto \lceil x \rceil$.

Attention : la différence entre ces deux fonctions n'est pas 1…

À tout entier naturel n, on associe $f(n)=\sum_{k=1}^{k=n^2}\left(\lfloor\sqrt{k}\rfloor+\lceil\sqrt{k}\rceil\right)$
Trouver une expression polynômiale pour f.

On peut décomposer l'intervalle $[\![1,n^2]\!]$ (intervalle dans l'ensemble **N**) en sous-intervalles limités par les carrés parfaits (1, 4, 9, 16, …, $(n-1)^2, n^2$).
Soit m un entier naturel inférieur à n.
Pour tout entier p tel que $(m-1)^2<p<m^2$, $\lfloor\sqrt{k}\rfloor=m-1$ et $\lceil\sqrt{k}\rceil=m$ et donc $\lfloor\sqrt{k}\rfloor+\lceil\sqrt{k}\rceil=2m-1$.
Effectuons la sommation entre $(m-1)^2+1$ et m^2 :

$$\sum_{p=(m-1)^2+1}^{m^2}\left(\lfloor\sqrt{p}\rfloor+\lceil\sqrt{p}\rceil\right)=(m^2-1-(m-1)^2)(2m-1)+2m=4m^2-4m+2$$

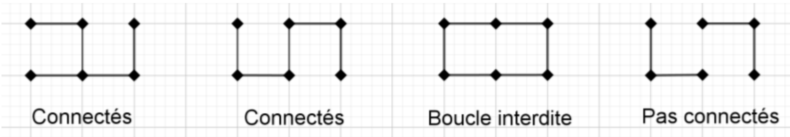
NB On a compté les éléments compris strictement entre $(m-1)^2+1$ et m^2. On a multiplié cet effectif par l'image commune, et on a ajouté l'image de m^2.
Reste maintenant à étendre la sommation :

$$f(n)=\sum_{k=1}^{k=n^2}\left(\lfloor\sqrt{k}\rfloor+\lceil\sqrt{k}\rceil\right)=\sum_{m=1}^{n}4m^2-4m+2$$

On se souvient que $\sum_{m=1}^{n}m=\frac{n(n=1)}{2}$ et $\sum_{m=1}^{n}m^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on trouve finalement que $f(n)=\frac{4n^3+2n}{3}$

Exercice 6 Connectique… et la suite

Des plots sont disposés face à face sur deux lignes parallèles. Ils doivent être reliés par des fils disposés horizontalement ou verticalement, de telle sorte que chaque plot soit relié par un chemin à chacun des autres, sans que des boucles d'aucune taille soient créées. Ci-contre quatre exemples de ce qui peut se passer avec 3 plots sur chaque ligne.



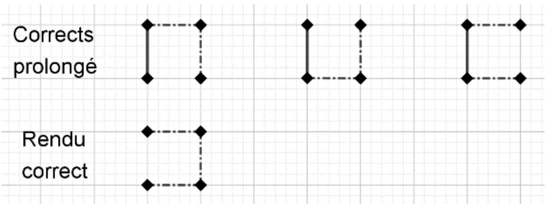
On note T_n le nombre de câblages corrects de deux lignes de n plots.

1. Déterminer T_{10}.

2. Montrer que, pour tout n, $T_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ (malgré les apparences, c'est un nombre entier positif)

3. Vous avez pensé « Fibonacci » ? Quelle est donc la limite du quotient $\frac{T_{n+1}}{T_n}$?

1. S'il n'y a que deux plots, un seul câblage est correct, qui les relie l'un à l'autre : $T_1=1$.
S'il y a quatre plots, on peut ou bien compléter correctement un câblage correct de deux plots, de trois façons, ou bien partir d'un circuit incorrect (deux plots non reliés) et en faire un circuit plus long correct. On a donc $T_2=4T_1$.



Plus généralement, pour réaliser un câblage correct de deux lignes de n plots, on peut partir d'un câblage correct de deux lignes de $n-1$ plots et le compléter correctement. Le schéma ci-dessus montre encore, au rang n, quatre procédés possibles, mais le quatrième suppose qu'on ne crée pas de boucle, savoir que les deux plots de rang n ne soient pas reliés. Combien y a-t-il de câblages de longueur n dont les deux derniers plots ne sont pas reliés ? Le schéma ci-dessus montre que la seule façon de les construire à partir d'un câblage de longueur $n-1$ est de relier chacun de ces deux plots à celui qui le précède sur la même ligne. Il y a donc T_{n-1} câblages de ce type.
Finalement $T_{n+1}=4T_n-T_{n-1}$. Le calcul des premiers termes donne $T_{10}=151\,316$

2. On vérifie que cette expression convient pour les premiers rangs : $T_1=1, T_2=4, T_3=15$
Pour faire un raisonnement par récurrence, on considère un entier quelconque n et on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers compris entre 1 et . On vérifie que dans ces conditions elle est vraie aussi pour $n+1$.
Reste à calculer $d_n=4\left((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right)-(2+\sqrt{3})^{n-1}+(2-\sqrt{3})^{n-1}$

$$d_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1}\left(4\left(2+\sqrt{3}\right)-1\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\left(4\left(2-\sqrt{3}\right)-1\right)$$

$$d_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}$$

La formule est établie.

3. En écrivant $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$, on peut calculer directement cette limite (car $0<7-4\sqrt{3}<0{,}1$). Elle est aussi une des racines de l'équation $x^2-4x+1=0$. C'est $2+\sqrt{3}$.

Équations

Exercice 1 Encore la partie entière…

On rappelle que la notation $[x]$ désigne la *partie entière* du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Montrer que l'équation $[x](x^2+1)=x^3$ admet une unique solution dans chaque intervalle dont les extrémités sont des entiers positifs consécutifs.

2. Montrer que cette solution est irrationnelle.

1. Plaçons-nous dans l'intervalle $[n, n+1[$ et posons $x=n+y$. L'équation initiale s'écrit :
$n((n+y)^2+1)=(n+y)^3$, ou encore : $y(n+y)^2=n$.
Sur l'intervalle $[0,1[$, la fonction $y \longmapsto y(n+y)^2$ est continue et croissante. Elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,(n+1)^2[$ et donc prend une et une seule fois la valeur n.

2. Reprenons l'équation de départ en posant $=\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux. En appelant n la partie entière de x, il vient $\frac{n(p^2+q^2)}{q^2}=\frac{p^3}{q^3}$, ou encore $qn(p^2+q^2)=p^3$, d'où vient que q divise p^3, contradiction.

Exercice 2 Du second degré au degré 2 018

Prouver qu'il existe une infinité de couples (a,b) d'entiers pour lesquels l'équation $x^{2\,018}=ax+b$ possède des solutions parmi lesquelles deux qui ont pour produit 1.

Remarquons que l'équation $x^2+mx+1=0$ admet, dans le cas où m est un entier strictement supérieur à 2, deux solutions dont le produit est 1.

Dans la division par x^2+mx+1, le polynôme $M(x)=x^{2\,018}$ donne un quotient $Q_m(x)$ et un reste $R_m(x)=a_m x+b_m$ (le degré du reste est strictement inférieur à celui du quotient). Q_m et R_m sont des polynômes à coefficients entiers (car le diviseur est unitaire). Le polynôme $M(x)-R_m(x)$ est donc divisible par x^2+mx+1. Il possède donc, comme ce dernier, deux racines dont le produit est 1.

Reste à prouver que les couples $(a_m,\ b_m)$ ne sont pas en nombre fini.

Pour cela, observons que les polynômes x^2+mx+1 et x^2+nx+1 n'ont pas de racine commune ; si c'était le cas, cette racine serait racine de leur différence $(m-n)x$, et comme elle ne peut être 0, c'est que $m=n$.

Le polynôme $x^{2\,018}-ax-b$ possède au plus 2 018 racines distinctes, la division par x^2+mx+1 est exacte pour au plus 1 009 valeurs de m. Il y a donc au plus 1 009 valeurs de m qui fournissent le même couple $(a_m,\ b_m)$. Ces couples sont donc en nombre infini.

Exercice 3 Résolution d'une équation du troisième degré (pour voir)

Soit à résoudre l'équation d'inconnue réelle $x^3-3x+1=0$.

On suit la méthode indiquée par Niccolo Tartaglia (1505 – 1557) : « Quando chel cubo con le cose appresso / Se aqquaglia a qualche numero discreto/ Trouan duo altri differenti in esso… »

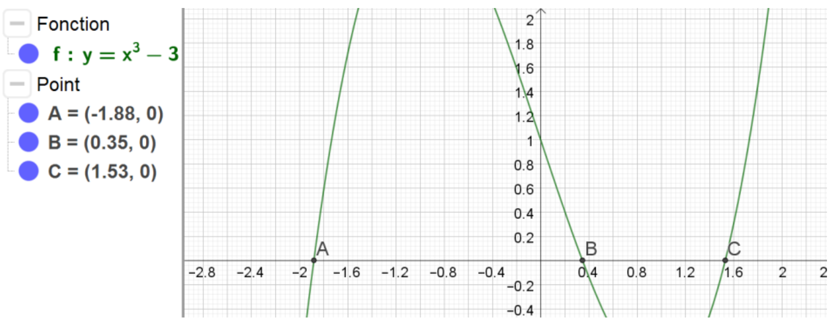
1. On pose $x=u+v$ et on impose que $uv=1$. Écrire le système d'équations d'inconnue (u,v) obtenu.

2. Écrire une équation du second degré dont u^3 et v^3 sont les racines.

3. Résoudre cette équation (ses solutions sont des nombres complexes). Écrire ses racines sous la forme trigonométrique.

4. Apparier les racines cubiques de la première racine aux racines cubiques de la seconde, de sorte que les produits « par paire » soient des nombres réels.

5. Achever la résolution de l'équation de départ.



1. On obtient $\begin{cases} u^3+v^3+1=0 \\ uv=1 \end{cases}$

2. La somme de u^3 et v^3 est donc -1 et leur produit est 1. Ces nombres sont les solutions de l'équation $X^2+X+1=0$. 3. Les solutions de cette équation sont les racines cubiques de l'unité bien connues $j=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=\bar{j}$.
Sous la forme trigonométrique, $j=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ et $\bar{j}=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$. La formule de Moivre (lue à l'envers) fournit les racines cubiques de j et $\bar{j}$, qui sont deux à deux conjuguées, ce qui simplifie le travail. On doit donc additionner $\cos\frac{2\pi}{9}+\mathrm{i}\ \sin\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{8\pi}{9}+\mathrm{i}\ \sin\frac{8\pi}{9}$ et $\cos\frac{14\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}$ chacun à son conjugué, et on trouve les racines de l'équation : $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\ \cos\frac{8\pi}{9}$ et $2\cos\frac{14\pi}{9}$; ces lignes trigonométriques ne s'expriment

pas comme combinaisons algébriques de rationnels et de radicaux (l'ennéagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas), mais on peut regarder ce que donne la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Exercice 4 Un coup à droite, un coup à gauche

À tout entier naturel n on associe $S(n) = \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k+1} \times n$

Par exemple, $S(10) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$

Résoudre l'équation $S(p) + S(q) + S(p+q) = 2\,018$

Essayons de réécrire $S(n)$: dans le cas où n est pair, l'exemple donné suggère que $S(n) = -\frac{n}{2}$, ce qu'on peut prouver par récurrence. Dans le cas où n est impair $S(n) = -\frac{n-1}{2} + n = \frac{n+1}{2}$, en utilisant le résultat précédent.

On procède à un catalogue pour la suite :

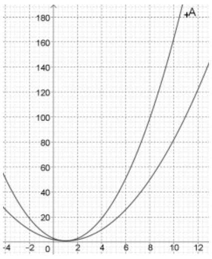
- si p et q sont tous les deux pairs, $p + q$ l'est aussi et leurs images par S sont négatives, pas de solution ici ;
- si p et q sont tous les deux impairs, $p + q$ est pair et $S(p) + S(q) + S(p+q) = \frac{p+1}{2} + \frac{q+1}{2} - \frac{p+q}{2} = 1$, pas de solution ici ;
- si p et q sont de parités différentes, on peut supposer p pair, cela ne change rien,

$$S(p) + S(q) + S(p+q) = -\frac{p}{2} + \frac{q+1}{2} + \frac{p+q+1}{2} = q + 1$$

Un couple (x, y)est donc solution s'il existe un nombre p pair tel que $(x, y) = (p, 2\,017)$ ou s'il existe un nombre q pair tel que $(x, y) = (2\,017, q)$.

Exercice 5 Jouons au 21

Soit P une fonction de **R** dans **R,** polynôme du second degré tel que $P(11) = 181$ et tel que pour tout réel x on ait : $x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$. Déterminer $P(21)$.



Les deux fonctions polynômes du second degré encadrant Pont le même minimum. P a donc aussi le même minimum (minimum 1 atteint en 1). Il existe donc un réel a tel que pour tout x : $P(x) = a(x-1)^2 + 1$

Comme $P(11) = 181$, on en déduit que $a = 1{,}8$ et donc $P(21) = 721$

Exercice 6 Somme de produits de racines

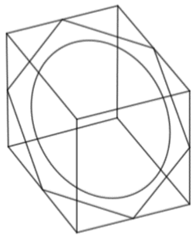
On considère l'équation $2(10x + 13)^2(5x + 8)(x + 1) = 1$. On appelle p, q, r, s les solutions de cette équation (réelles ou complexes). En faisant en sorte que $pq + rs$ soit réel, quel est ce nombre ?

Observons, en développant partiellement, que l'équation s'écrit :

$$2(100x^2 + 260x + 169)(5x^2 + 13x + 8) = 1$$

Il apparaît, en posant $y = 5x^2 + 13x + 8$, une équation en y : $2(20y + 9)y = 1$, dont les solutions sont $\frac{1}{20}$ et $-\frac{1}{2}$; l'équation $5x^2 + 13x + 8 = \frac{1}{20}$ possède deux racines dont le produit est $\frac{159}{100}$, l'équation $5x^2 + 13x + 8 = -\frac{1}{2}$ possède deux racines dont le produit est $\frac{17}{10}$ (celles-ci sont complexes conjuguées). Finalement $pq + rs = \frac{329}{100}$

Thème : aires et volumes



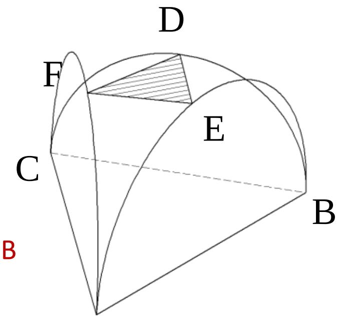
Exercice 1 Rappel : sphère et hexagone dans un cube

Un plan coupe les faces d'un cube selon un hexagone régulier, et la boule inscrite dans l'hexagone selon un disque. Quelle est l'aire de la partie du disque qui n'est pas contenue dans l'hexagone ?

Le plan déterminé par les milieux de trois arêtes du cube (par exemple en suivant la règle des trois doigts de la main droite) passe par le centre du cube au aussi par les milieux de trois autres arêtes. Les six milieux concernés sont coplanaires et les distances entre deux consécutifs sont les mêmes. Si l'arête du cube est 1, le côté de cet hexagone mesure $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est aussi le rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

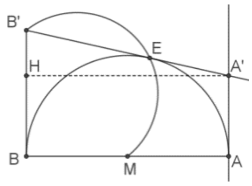
Son aire est donc $\mathcal{H} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. La sphère inscrite est centrée au centre du cube. Son rayon est $\frac{1}{2}$. Comme le plan de l'hexagone passe par son centre, il la coupe selon un grand cercle. Le disque contenu dans l'hexagone a donc pour aire $\mathcal{D} = \frac{\pi}{4}$. La différence est $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$

Exercice 2 Coupole

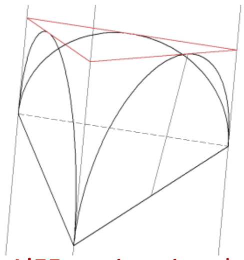


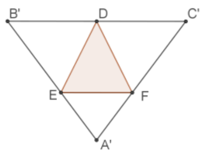
Sur chacun des côtés du triangle ABC, on a élevé un mur vertical en forme de demi-disque. Un plan repose sur ces trois murs, en D, E et F respectivement. Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A et ses côtés mesurent :

BC = $10\sqrt{3}$ et AB = AC = $10\sqrt{2}$. Quelle est l'aire du triangle DEF ?



La parallèle à (CB) passant par D coupe les verticales élevées en B et C en les points B' et C' de sorte que BCC'B' soit un rectangle (dont la largeur est donc moitié de la longueur). La tangente issue de B' au demi-cercle de diamètre [AB] coupe la verticale élevée de A en A', et le point E est son point de contact avec le demi-cercle. On a B'B'=BE et AA=A'E. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle A'HB' rectangle en H : $\mathrm{B'A'}^2 = \mathrm{AB}^2 + (\mathrm{BB'} - \mathrm{AA'})^2$ d'où on tire $\mathrm{AA'} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$; Il en est de même pour l'analogue CC' construit sur la perpendiculaire élevée de C.

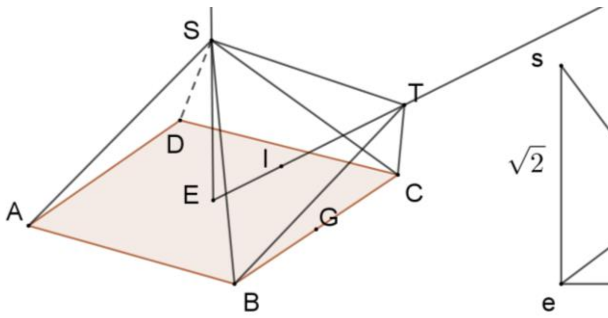


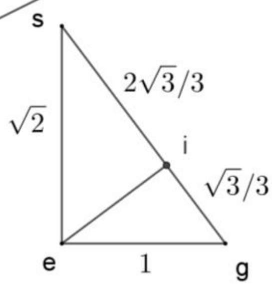


D'où $\mathrm{B'A'} = \mathrm{BB'} + \mathrm{AA'} = 5\sqrt{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$. On commaнît les dimensions du triangle A'B'C'. On connaît la position de la droite (EF) parallèle à (B'C'). Avec les triangles A'B'C' et A'EF en situation de Thalès, on obtient $EF = \frac{10}{\sqrt{2}}$ et le rapport d'homothétie $\frac{1}{\sqrt{6}}$. . La hauteur des triangles FDC' et EDB' est donc le produit de $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ par celle de la hauteur de A'B'C'. Finalement, l'aire de DEF est $\mathcal{A}(\mathrm{DEF}) = (1 - \frac{\sqrt{6}-1}{2} - \frac{1}{6})\mathcal{A}(\mathrm{A'B'C'})$

Exercice 3 Collage

On dispose de deux objets : une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles équilatéraux de côté 2 et un tétraèdre régulier d'arête 2. Ces deux objets sont collés en faisant exactement coïncider une face latérale de la pyramide et une face du tétraèdre. Quel est le nombre de faces de l'objet obtenu et quelles sont leurs formes ?





Sur la figure ci-contre, la face SBC, commune à la pyramide et au tétraèdre, a disparu. Précisions les dimensions de la pyramide : E étant le centre de la base, le triangle SEB est rectangle en E et donc $ES^2 = 4 - 2 = 2$. Le triangle SEB est donc isocèle. On appelle G le milieu de [BC] et I le centre de gravité du triangle SBC. Le triangle seg représente le triangle SEG. Sa hauteur a pour mesure $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ce n'est autre que [EI]. Par conséquent les points E, I et T sont alignés et la droite (ET) est perpendiculaire au plan (SBC). On considère ensuite le triangle SET et on prouve qu'il est rectangle en S. La droite (ST) est donc parallèle au plan de base (ABC). Le plan (STG) passe par E et est perpendiculaire au plan de base (ABCD).

Le polyèdre « final » a une face carrée ABCD, deux faces rhomboïdales ASTB et SDCT et deux faces qui sont des triangles équilatéraux ASD et BCT.

Exercice 4 L'aire d'un domaine qu'on ne voit pas

On donne un nombre réel r et on considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$r^4z^4 + (10r^6 - 2r^2)z^2 - 16r^5z + (9r^4 + 1)(r^4 + 1) = 0$$

Les solutions de cette équation sont les affixes de points du plan, qui délimitent un polygone. Montrer que l'aire de ce polygone est indépendante de r.

Essayons de mettre le premier membre sous la forme d'un produit de facteurs :

$$(r^2z^2 + \cdots + 9r^4 + 1)(r^2z^2 + \cdots + r^4 + 1) = 0$$

La méthode des coefficients indéterminés donne :

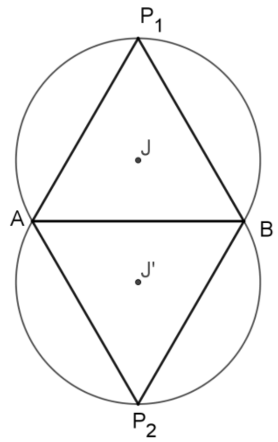
$$(r^2z^2 + 2rz + 9r^4 + 1)(r^2z^2 - 2rz + r^4 + 1) = 0$$

Nous obtenons donc toutes les solutions de l'équation : $-\frac{1}{r} + 3r\mathrm{i}, -\frac{1}{r} - 3r\mathrm{i}, \frac{1}{r} + r\mathrm{i}, \frac{1}{r} - r\mathrm{i}$

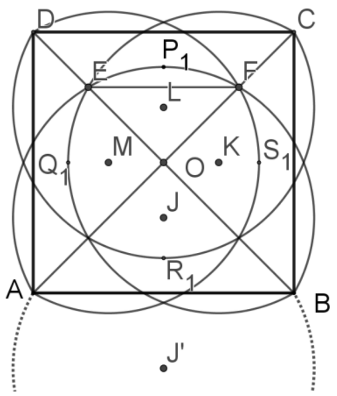
Les points dont ces solutions sont les affixes sont les sommets d'un trapèze dont les bases mesurent $6|r|$ et $2|r|$ et la hauteur $\frac{2}{|r|}$ (lire $|r|$ « valeur absolue », r est un réel). L'aire de ce trapèze est 8, elle ne dépend pas de r.

Exercice 5 Un petit gazon

L'espace libre d'un patio a la forme d'un carré ABCD de côté 3 m. Au sol, le domaine occupé par une pelouse est l'ensemble des points P tels que les angles $\widehat{\mathrm{APB}}$, $\widehat{\mathrm{BPC}}$, $\widehat{\mathrm{CPD}}$, $\widehat{\mathrm{DPA}}$ aient tous une mesure supérieure à 60°. Quelle est l'aire de cette pelouse ?



Commençons par étudier l'ensemble des points P tels que l'angle $\widehat{\mathrm{APB}}$ ait une mesure supérieure ou égale à 60°. Si on appelle P_1 et P_2 les sommets des deux triangles équilatéraux construits sur A et B, les points P vérifiant la condition imposée sont à l'intérieur de la région limitée par deux arcs des cercles circonscrits à ces triangles (la réunion de ces deux arcs est ce qu'on appelait autrefois l'*arc capable* correspondant aux points A et B et à la mesure 60°). Faisons à présent la figure correspondant aux quatre côtés du carré.



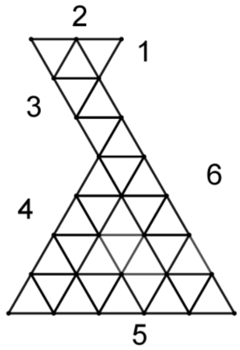
Pour des raisons de symétrie, nous affirmons que la pelouse est constituée d'un carré de côté EF, complété de quatre segments circulaires tels EP_1F. Dans le cercle de centre J passant par A et B, l'angle $\widehat{\mathrm{BAF}}$ intercepte l'arc BF. Sa mesure, 45° est donc la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{\mathrm{BJF}}$ qui est donc droit. Il en est de même de $\widehat{\mathrm{AJE}}$ et donc l'angle $\widehat{\mathrm{EJF}}$ mesure 60° et le triangle EJF est équilatéral. Son côté mesure $\sqrt{3}$ (c'est le rayon du cercle de centre J). Cela permet d'évaluer l'aire du segment circulaire. Finalement l'aire de la pelouse est $2\pi + 3 - 3\sqrt{3}$.

Thème : combinatoire, dénombrement, probabilités

Exercice 1 Hexagones en pièces

Peut-on construire un hexagone dont les côtés mesurent 1, 2, 3, 4, 5, 6 en assemblant des triangles équilatéraux de côté 1 :

1. Avec 31 triangles ?
2. Avec 32 triangles ?



Le schéma ci-contre montre comment on peut utiliser 31 triangles équilatéraux.
Si on en utilise 32, $1+2+3+4+5+6 = 21$ de leurs côtés servent à constituer les côtés de l'hexagone. Les $3\times 32-21=75$ autres sont des côtés communs à deux triangles. Mais voilà : il y en a un nombre impair…

Exercice 2 Entiers en file indienne

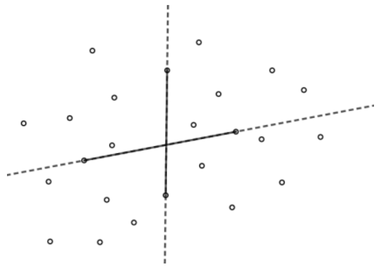
100 entiers naturels distincts sont placés à la suite les uns des autres, de sorte que tout entier de la liste ayant deux voisins est strictement supérieur à leur moyenne arithmétique. Que vaut, au minimum, le plus grand entier de la liste ?

Notons a_i (i variant de 1 à 100) les entiers de la liste. L'hypothèse est : pour tout i compris entre 2 et 99, $a_i - a_{i-1} > a_{i+1} - a_i$. Les différences entre deux entiers successifs de la liste sont donc strictement décroissantes. Si a_M est le plus grand entier de la liste, les différences successives sont positives jusqu'à $a_M - a_{M-1}$, négatives ensuite (les entiers sont distincts, aucune différence n'est nulle). Il n'est pas possible que 1 et -1 soient deux de ces différences, car alors on aurait : $a_M - a_{M-1} = 1$ et $a_{M+1} - a_M = -1$, ce qui conduit à $a_M = a_{M+1}$. De 1 et -1, supposons que c'est 1 qui figure dans la suite des différences (si c'est -1, il n'y a qu'à écrire la liste en commençant par le dernier nombre). On a donc $a_M = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_M - a_{M-1})$. La plus petite valeur de cette somme de M termes est $1 + (M-1) + (M-2) + \cdots + 2 + 1$. De la même manière, $a_M = a_{100} + (a_{99} - a_{100}) + \cdots + (a_M - a_{M+1})$.
La plus petite valeur de cette somme est $1 + 2 + \cdots + (100 - M) + 1$
Reste à comparer $100 - M$ et M. L'un des deux est supérieur ou égal à 50, et les sommes précédentes supérieures ou égales à $1 + \frac{50\times 49}{2} = 1\,226$.

Exercice 3 A-t-on besoin de 2 018 aéroports ?

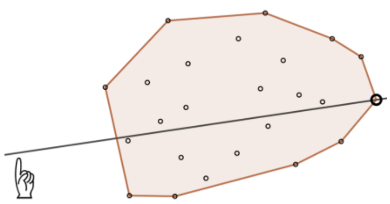
Dans un pays imaginaire, 2 018 aéroports sont reliés deux à deux par des lignes directes avec les conditions suivantes :
- il n'existe pas trois aéroports alignés ;
- deux aéroports sont reliés seulement si la ligne qui les joint sépare (dans le plan, où ils sont représentés par des points) crée deux demi-plans ouverts dans chacun desquels se trouvent 1 008 aéroports.

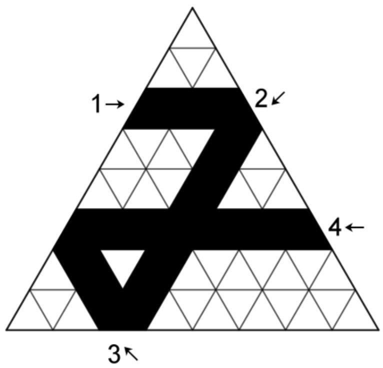
Existe-t-il une *chaîne hamiltonienne* qui conduise d'un des aéroports à un autre en passant une et une seule fois par les 2 016 autres ?



Deux exemples d'aéroports reliés (il y en a d'autres)

Le nuage de points du plan a un bord : un point du bord est défini comme tel par le du nuage tel que la droite qui les joint laisse tout le nuage dans un même demi-plan. Un point du bord a deux *voisins* sur le bord. Les points du bord constituent *l'enveloppe convexe* du nuage. Lorsqu'on fait tourner autour d'un point du bord la droite qui le joint à un voisin, le nombre de points situés dans l'un des deux demi-plans qu'elle définit augmente et vaut successivement 1, 2, 3, …, 2 016, 2 017. Il ne prend qu'une fois la valeur 1 008. Les points du bord ne sont donc reliés chacun qu'à un seul autre point du nuage. Or, il y a au moins trois points sur le bord. L'un peut être pris comme point de départ, un autre comme point d'arrivée, mais… Donc pas de chaîne hamiltonienne dans ces conditions.



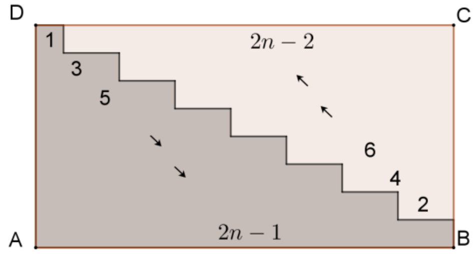


Exercice 4 Paint it black

Un triangle équilatéral est pavé par des triangles équilatéraux tous identiques : parallèlement aux côtés du triangle, on distingue des *lignes* formées par 1, 3, 5, 7, etc. triangles.

1. S'il y a n lignes parallèles à un des côtés du grand triangle, combien y a-t-il de petits triangles ?

2. Les petits triangles sont peints en noir « par ligne » : on choisit une ligne et on peint en noir (la figure ci-contre montre quatre épisodes de l'action). Combien la peinture entière demande-t-elle d'opérations, au minimum et au maximum ?



1. La somme S des nombres impairs, de 1 à $2n-1$ est n^2. Le rectangle ci-contre a pour aire $n \times (2n-1)$. Cette aire est la somme du nombre S cherché et du double de la somme des entiers de 1 à $n-1$, qui est $\frac{n(n-1)}{2}$. D'où l'idée du résultat (on peut aussi faire une démonstration par récurrence (facile : $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$).
2. Pour un triangle à n lignes, peindre une ligne entière parallèle à la base, par exemple, à chaque opération demande n opérations. Peut-on faire moins ? Pour $n = 1$, le minimum est 1 (il n'y a qu'un petit triangle).
Supposons que, pour un nombre k quelconque de lignes, le minimum d'opérations à effectuer soit k. On ajoute une ligne. Il y a au moins un petit triangle supplémentaire à peindre, mais en le peignant on peint toute la ligne. D'où le résultat en achevant la preuve par récurrence.Pour $n = 1$, le maximum coïncide avec le minimum. Supposons à présent qu'un triangle à n lignes ait été peint. Pour peindre la dernière ligne, on peut utiliser trois mouvements (voir figure ci-contre). Un raisonnement par récurrence conduit alors au maximum d'opérations $3n-2$ pour un triangle de n lignes. À trois opérations par ligne, $3(n-1)$ opérations sont réalisées au maximum, qui colorent n lignes. Il reste au maximum une opération à réaliser.

Exercice 5 Comment rafler la mise ?

On me propose un jeu. Je joue une succession de « Pile ou face » avec une pièce non truquée. Avant chaque lancer, mon adversaire (un adversaire gentil, vous verrez qu'il ne peut que donner) dépose une mise convenue, disons 10 doublezons, dans le pot. Chaque fois que je gagne, il ajoute 10 doublezons dans le pot. Si je perds, il reprend tout ce qui est dans le pot et j'ai un gage. La partie s'arrête quand j'arrive à trois gages, alors je pars sans rien, ou quand je décide de partir en emportant le pot (bien sûr, avant d'avoir trois gages). Quelle est mon espérance de gain si je joue au mieux de mes intérêts ?

Supposons que j'ai déjà deux gages et que le pot contient x doublezons. Si je décide de rejouer, mon adversaire ajoute 10 doublezons, et alors soit je perds – et je ne gagne rien, la partie est finie – soit je gagne $10 + x$. Mon espérance est donc $5 + \frac{x}{2}$. Cette espérance est supérieure à x (ce que j'aurais pris si j'étais parti sans rejouer) seulement si $x < 10$. Mais les seules sommes possibles étant des multiples de 10, cette situation ne peut survenir que si $x = 0$. Dans ce cas, je joue ce coup (espérance 5) et je pars.
Supposons que j'ai un gage et pas deux et que la somme au pot est x. Ce qui change par rapport au paragraphe précédent, c'est que, si je perds, j'ai un deuxième gage, je me retrouve dans la situation déjà étudiée, avec une espérance de 5. Mon espérance est donc $\frac{1}{2}(x+10) + \frac{1}{2}5 = 7{,}5 + \frac{x}{2}$. Cette somme est supérieure à x lorsque $x < 15$. Les deux sommes possibles inférieures à 15 sont 0 et 10. Si le pot contient 0, il faut jouer, si je gagne il y aura 10 doublezons au pot, et je rejouerai. Soit je perdrai, j'aurai deux gages et mon espérance sera 5, soit je gagnerai, il y aura 20 au pot, et mon espérance dans cette situation est $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 5\right) + \frac{1}{2} \times 5 = 8{,}75$.
C'est le même raisonnement en cascade qu'on fait pour étudier le cas où je n'ai pas de gage. Mon espérance est alors $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 8{,}75\right) + \frac{1}{2} \times 8{,}75 = 11{,}5625$

Exercice 6 Alignement de diviseurs à l'infini ?

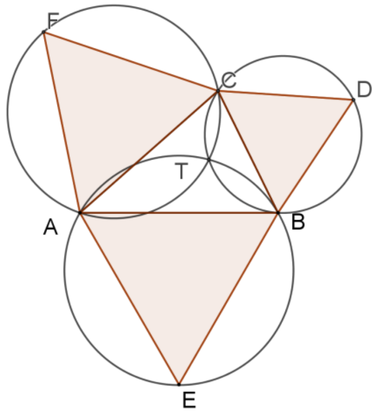
Partant du nombre 12, on écrit à la suite, dans l'ordre décroissant, des diviseurs de 12, chacun étant un diviseur de celui qui le précède (éventuellement lui-même) jusqu'à écrire 1 et on s'arrête. Chaque nombre écrit, à part le premier 12, est choisi aléatoirement. Des suites possibles sont 12, 12, 12, 6, 3, 1 ou 12, 1 ou 12, 6, 6, 2, 2, 2, 1. Quelle est l'espérance de la longueur de la suite ?

On raisonne sur le nombre de 12, de 6, de 4, de 3, de 2, et de 1 (là, on sait, c'est 1) qui peuvent figurer dans une telle suite de diviseurs décroissants de 12.
1. Combien de 12 ? Comme 12 a 6 diviseurs, la probabilité pour qu'il soit choisi au départ est $\frac{1}{6}$. On aura un troisième 12 avec une probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^2$, un quatrième avec une probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^3$, etc. Finalement, la longueur de la chaîne de 12 a pour espérance $1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n + \cdots$ Il s'agit de la somme de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{6}$. C'est $\frac{6}{5}$.
Le raisonnement est le même pour la suite, avec des probabilités $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ et des longueurs $\frac{4}{15}, \frac{3}{10}, \frac{8}{15}, \frac{11}{15}$ et 1. La somme de ces longueurs est $\frac{121}{30}$.

Thème : angles et distances

Exercice 1 Fermat, Torricelli, Viviani, c'est comme vous voudrez

1. Montrer que, pour tout triangle ABC les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux « extérieurs » au triangle sont concourants en un point T. À quelle condition ce point est-il intérieur au triangle ABC ?
2. On se place dans le cas où les trois angles de ABC ont des mesures inférieures à 120°. Montrer que la somme $\mathrm{TA}+\mathrm{TB}+\mathrm{TC}$ est égale à la distance BF (laquelle est aussi égale à AD et à CE) et que T est le point du plan qui réalise le minimum de la somme des distances à A, B et C.
3. Quel est le minimum de la somme précédente lorsqu'un des angles a une mesure supérieure à 120° ?

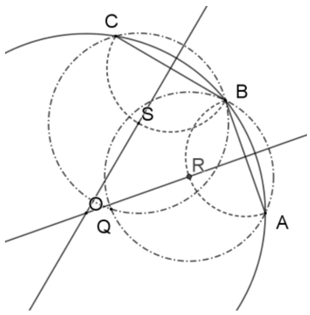


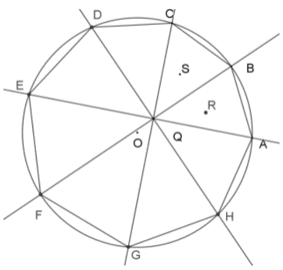
Exercice 2 Encore un problème de minimum

On considère un polygone $\mathrm{ABCDEFGH}$ inscrit dans un cercle. On considère un point Q tel que les angles $\widehat{\mathrm{AQB}}$, $\widehat{\mathrm{BQC}}$, $\widehat{\mathrm{CQD}}$, $\widehat{\mathrm{DQE}}$, $\widehat{\mathrm{EQF}}$, $\widehat{\mathrm{FQG}}$, $\widehat{\mathrm{GQH}}$ et $\widehat{\mathrm{HQA}}$ mesurent tous 45°.

Montrer que la somme $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{EF}^2+\mathrm{FG}^2+\mathrm{GH}^2+\mathrm{HA}^2$ est minimale si et seulement si le point Q est le centre du cercle.

La question est curieusement posée, l'énoncé affectant une certaine indépendance de Q par rapport aux huit sommets du polygone. En réalité, dès que A, B et C sont donnés, Q est défini, comme le montre la figure ci-contre (les points R et S sont les centres des cercles portant les arcs d'où l'on voit $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{BC}]$ respectivement sous un angle de 45°. Ces cercles se coupent en Q et B). La figure étudiée est donc la suivante :



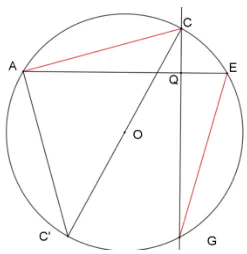


La somme $\Sigma=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{EF}^2+\mathrm{FG}^2+\mathrm{GH}^2+\mathrm{HA}^2$ peut être transformée en utilisant la formule du cosinus :

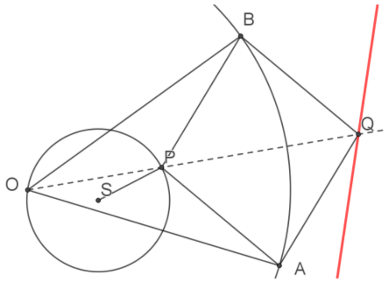
$$\Sigma=2(\mathrm{QA}^2+\mathrm{QB}^2+\mathrm{QC}^2+\mathrm{QD}^2+\mathrm{QE}^2+\mathrm{QF}^2+\mathrm{QG}^2+\mathrm{QH}^2)$$
$$-\sqrt{2}(\mathrm{QA.QB}+\mathrm{QB.QC}+\mathrm{QC.QD}+\mathrm{QD.QE}$$
$$+\mathrm{QE.QF}+\mathrm{QF.QG}+\mathrm{QG.QH}+\mathrm{QH.QA})$$

Mais $\mathrm{QA.QB}+\mathrm{QB.QC}+\mathrm{QC.QD}+\mathrm{QD.QE}+\mathrm{QE.QF}+\mathrm{QF.QG}+\mathrm{QG.QH}+\mathrm{QH.QA}\leq \frac{1}{2}(\mathrm{QA}^2+\mathrm{QB}^2+\mathrm{QC}^2+\mathrm{QD}^2+\mathrm{QE}^2+\mathrm{QF}^2+\mathrm{QG}^2+\mathrm{QH}^2+\mathrm{QA}^2+\mathrm{QB}^2+\mathrm{QC}^2+\mathrm{QD}^2+\mathrm{QE}^2+\mathrm{QF}^2+\mathrm{QG}^2+\mathrm{QH}^2)$ et donc $\Sigma\geq\left(2-\sqrt{2}\right)(\mathrm{QA}^2+\mathrm{QB}^2+\mathrm{QC}^2+\mathrm{QD}^2+\mathrm{QE}^2+\mathrm{QF}^2+\mathrm{QG}^2+\mathrm{QH}^2)$ et l'égalité a lieu si et seulement si les inégalités du type $\mathrm{QA}^2+\mathrm{QB}^2\geq 2\,\mathrm{QA.QB}$ sont des égalités, c'est-à-dire si toutes les distances des sommets du polygone à Q sont égales, ce qui signifie que Q est le centre du cercle.

Il reste à vérifier que le « minimum » mis en évidence est indépendant de Q (c'est-à-dire des trois points initialement choisis, il y a peut-être un problème de logique…) D'après le théorème de Pythagore, la somme Σ peut s'écrire : $\Sigma=\mathrm{AC}^2+\mathrm{EG}^2+\mathrm{CE}^2+\mathrm{GA}^2$. La figure ci-contre montre que, si on appelle C' le point diamétralement opposé à C, on obtient $\mathrm{AC}'=\mathrm{EG}$, car AEGC' est un trapèze isocèle (les angles $\widehat{\mathrm{AEG}}$ et $\widehat{\mathrm{ACG}}$ interceptent le même arc et $\widehat{\mathrm{ACG}}$ est complémentaire du complémentaire de $\widehat{\mathrm{EAC}'}$. Par conséquent : $\mathrm{AC}^2+\mathrm{EG}^2=\mathrm{CC}'^2$ et comme il en est de même pour le reste de la somme, $\Sigma=2d^2$, où d désigne le diamètre du cercle.

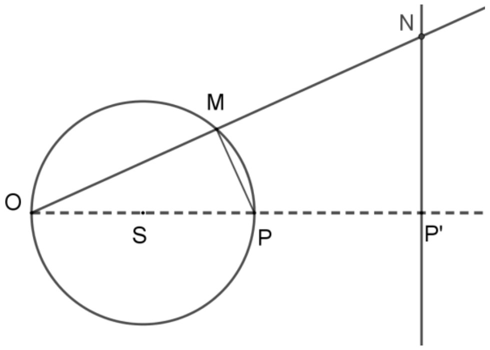


Exercice 3 L’inverseur de Peaucellier (1832 – 1919)



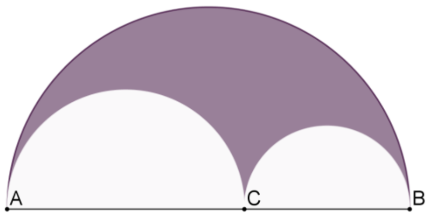
On considère le dispositif représenté ci-contre : les sommets opposés A et B d’un losange articulé APBQ, dont les côtés ont pour longueur a sont reliés à un point fixe O par des tiges articulées de même longueur b. Le point P décrit un cercle de centre S passant par O. Montrer que le point Q décrit un segment de droite.

Observons d’abord que la droite (OP) est la médiatrice de [AB] et que les points O, P et Q sont donc alignés. Appelons C le centre du losange et calculons le produit $\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ}$.
$\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = (\mathrm{OC} - \mathrm{PC})(\mathrm{OC} + \mathrm{PC}) = \mathrm{OC}^2 - \mathrm{PC}^2$. Or, $\mathrm{OC}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{BC}^2$ et $\mathrm{PC}^2 = \mathrm{PB}^2 - \mathrm{BC}^2$
Finalement $\mathrm{OP} \times \mathrm{OQ} = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{PB}^2 = b^2 - a^2$

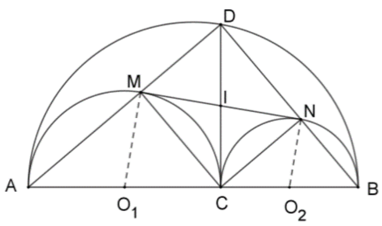


Considérons le cercle de centre S passant par O, un point P de ce cercle et le point P’ de la demi-droite [OS) tel que $\mathrm{OP} \times \mathrm{OP}' = k^2$, où k est un réel tel que $\mathrm{OP} \leq k$.
Un point M du cercle étant donné, la demi-droite [OM) coupe la droite (d) perpendiculaire en P’ à [OP) en le point N. L’observation des triangles rectangles OMP et OP’N (similitude si on veut ou cosinus) conduit à : $\dfrac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OP}\prime}{\mathrm{OM}}$ et donc à $\mathrm{OM} \times \mathrm{ON} = k^2$. La droite (d) contient donc les images de tous les points du cercle hormis O bien sûr. Réciproquement, tout point de la droite est image d’un point du cercle. Dans le cas du système mécanique évoqué dans l’énoncé on n’obtient naturellement qu’un segment.
Remarque : ce système permet de tracer une droite (ou presque) avec comme instrument de base un compas. Comme l’écrit Marcel Berger dans « Géométrie vivante », la seule solution pour construire une règle est d’en posséder déjà une…

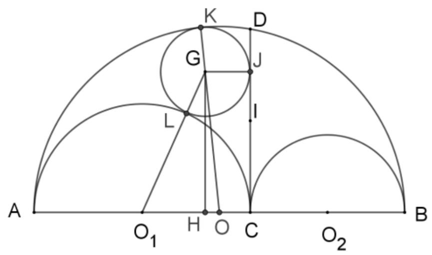
Exercice 4 Première visite de l’arbelos



L’arbelos (tranchet de cordonnier, en grec ancien, si on peut dire, car « cordonnier » serait anachronique) est une figure étudiée par Archimède, constituée par trois demi-cercles, situés d’un même côté du diamètre du plus grand, dont les extrémités sont, avec un autre point de ce diamètre, les extrémités des diamètres des plus petits. On pose $\mathrm{AC} = 2a, \mathrm{BC} = 2b$ et on suppose $a \geq b$.
1. Premières propriétés



On appelle D le point où la perpendiculaire en C à (AB) coupe le grand demi-cercle. Vérifier que $\mathrm{CD} = \sqrt{2ab}$. Les segments [DA] et [DB] coupent les deux petits demi-cercles respectivement en M et N. Montrer que le quadrilatère DMCN est un rectangle, dont la diagonale [MN] est portée par une tangente commune aux deux petits demi-cercles.
2. Les cercles jumeaux d’Archimède
On considère les cercles tangents à la droite (CD), au grand demi-cercle et chacun à l’un des deux petits demi-cercles. Montrer que ces deux cercles ont même rayon.

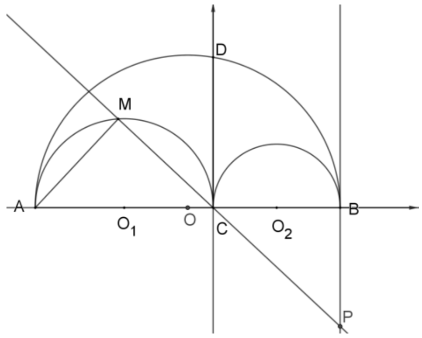


1. On applique le théorème de Pythagore aux triangles ACD et BCD, puis au triangle ADB. On obtient :
$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{AC}^2$ puis $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BC}^2$ et enfin $\mathrm{AB}^2 = 2\mathrm{CD}^2 + \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2$, d’où le résultat annoncé. Le quadrilatère DMCN a trois angles droits, c’est donc un rectangle. On appelle I le centre de ce rectangle. Les quadrilatères $\mathrm{IMO_1C}$ et $\mathrm{INO_2C}$ sont des « cerfs-volants » (constitués de deux triangles isocèles) et donc leurs angles en M et C, en N et C respectivement, sont droits.
2. Le raisonnement est le même pour les deux cercles. On étudie le cercle de centre G, dont les points de contact avec le grand demi-cercle est K, avec le demi-cercle de centre O_1 est L, et avec la droite (CD) est J. On appelle son rayon R et on se souvient que le point de contact de deux cercles tangents est aligné avec les centres. On a : $\mathrm{O_1G} =$

$a+R$, GJ $= R =$ CH et OH $=$ CH $-$ OC $=$ CH $-(a-b)$. Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles GO_1H et GOH donne : $GH^2 = GO_1{}^2 - O_1H^2$ et $GH^2 = GO^2 - OH^2$.
Finalement : $(a+R)^2 - (a-R)^2 = (a+b-R)^2 - (R-a+b)^2$
D'où on tire $R = \frac{ab}{a+b}$
Dans cette dernière formule, a et b jouent des rôles symétriques, donc le deuxième cercle a même rayon que le premier.

Exercice 5 Des cercles transformés en droites

On rapporte le plan à un repère orthonormé d'origine C dont les axes sont portés par (AB) et (CD). Avec ce repère, le point A a pour affixe $-2a$, le point B a pour affixe $2b$ et le point D a pour affixe $2ab\mathrm{i}$. On considère l'application de ce plan complexe dans lui-même qui, à tout point M, distinct de C, d'affixe z associe le point P d'affixe $z' = \frac{-4ab}{z}$.



1. Quelle image cette application donne-t-elle du cercle de diamètre [AB] ?
2. Quelle image donne-t-elle du cercle de diamètre [AC] ?

Dans ce qui suit, on prend peu de précautions dans le traitement des images d'ensembles de points par des transformations. C'est un tort, mais c'est pour mieux mettre en valeur l'utilisation des nombres complexes.

1. Considérons un point M du plan d'affixe z. Ce point appartient au cercle de centre O et de rayon $a+b$ si et seulement si $|z-b+a|^2 = (a+b)^2$. Ce qui s'écrit encore :$(z-b+a)(\bar{z}-b+a) = (a+b)^2$, ou encore :$z\bar{z} + (a-b)(z+\bar{z}) - 4ab = 0$. Comme $z = \frac{-4ab}{z'}$ on en déduit que $\frac{-4ab}{z'\bar{z}'} + (a-b)\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{\bar{z}'}\right) + 1 = 0$, soit $-4ab + (a-b)(z' + \overline{z'}) + z'\overline{z'} = 0$. Autrement dit, l'image de M appartient au même cercle.
2. Un point M d'affixe z appartient au cercle de diamètre [AC] si et seulement si $|z+a|^2 = a^2$, ce qui s'écrit encore $z\bar{z} + a(z+\bar{z}) = 0$. On transforme pour obtenir une expression en z' : $\frac{-4ab}{z'\bar{z}'} + a\frac{z'+\bar{z}'}{z'\bar{z}'} = 0$, ou encore $z' + \overline{z'} - 4b = 0$, cette dernière équation est l'équation d'une droite, qui s'écrit : $Re(z) = 2b$. C'est la perpendiculaire à (AB) passant par B.

Miscellanées (L et ES seuls)

Exercice 1 Les pizzas volent bas

Vesuvio et Napoli se partagent la clientèle d'un centre commercial. Des comptages effectués sur une assez longue période ont permis de dégager certains paramètres. Environ 500 pizzas sont vendues par jour. Le prix de revient est le même pour chacun des deux restaurants : 7 € la pizza. Les prix de vente pratiqués sont des multiples de 0,2 €. On a constaté que, lorsque les prix pratiqués sont les mêmes, les consommateurs se partagent équitablement, mais que, chaque fois que le prix pratiqué par un dépasse de 0,2€ le prix pratiqué par l'autre, 10 clients sur les 250 potentiels choisissent son concurrent : 10 pour une différence de 0,2€, 20 pour une différence de 0,4€, 30 pour une différence de 0,6€, etc.

1. Compléter le tableau suivant :

Enseigne	Prix de vente en €	Nombre de clients	Bénéfice dégagé
Napoli	14		
Vesuvio	16		

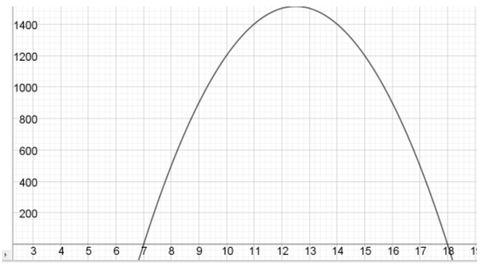
2. Aujourd'hui, Napoli a fixé son prix à 13€, Vesuvio le sait. À quel prix doit-il vendre ses pizzas pour dégager un bénéfice maximum (toutes choses, personnel, taxes, etc. égales d'ailleurs) ?

1.

Enseigne	Prix de vente en €	Nombre de clients	Bénéfice dégagé
Napoli	14	350	350x7=2 450
Vesuvio	16	150	150x9=1 350

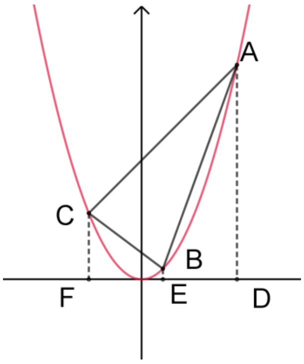
2. Si Vesuvio fixe son prix à x, le prix moyen pour les deux restaurants est $\frac{x+13}{2}$ et la différence (algébrique, comme on disait dans le temps) entre les deux prix est $x-13$. Le nombre de clients qui choisissent Vesuvio est donc $N = 250 - 10 \times \frac{x-13}{0,2} = 900 - 50x$ et le bénéfice réalisé est $B(x) = 50(18-x)(x-7)$

Le maximum de cette fonction est atteint en 12,5 et vaut 1 512,5 mais si on s'en tient à des prix évoluant de 0,2€ en 0,2 €, on gardera 12,4 ou 12,6 avec un bénéfice de 1 512.



Exercice 2 Un triangle dans une parabole

Trois points A, B et C appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$. Il existe un nombre d tel que la différence entre les abscisses de A et B soit d et que la différence entre les abscisses de B et C soit d. Quelle est l'aire du triangle ABC ?



L'aire du triangle ABC est la différence entre l'aire du trapèze ADFC et la somme des aires des trapèzes ADEB et BEFC. Si on appelle a l'abscisse de A, on a successivement :

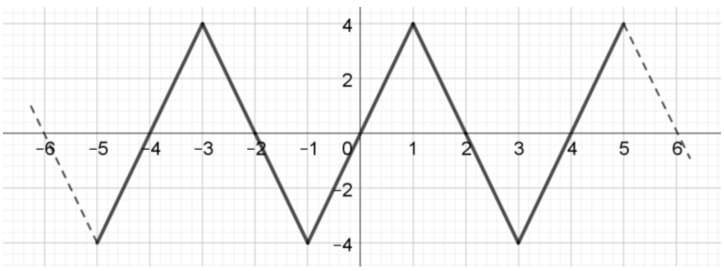
1. $Aire(\text{ADFC}) = \frac{1}{2} \times 2d \times (a^2 + (a-2d)^2)$
2. $Aire(\text{ABED}) = \frac{1}{2} \times d \times (a^2 + (a-d)^2)$
3. $Aire(\text{BEFC}) = \frac{1}{2} \times d \times ((a-d)^2 + (a-2d)^2)$

La différence annoncée plus haut donne :

$$Aire(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \times d \times (2a^2 + 2(a-2d)^2 - a^2 - (a-d)^2 - (a-d)^2 - (a-2d)^2)$$

Finalement $Aire(\text{ABC}) = d^3$.

Exercice 3 Une fonction plutôt « moyenne »



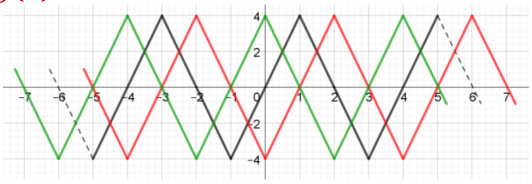
On a représenté ci-contre, partiellement (!) une fonction f ayant pour période 4. La représentation graphique de f est constituée de segments de droite.

On considère la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x-1) + f(x+1)]$$

Tracer la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Pour calculer l'image par g d'un élément de l'intervalle $[-2,2]$, on aura besoin des valeurs prises par f sur l'intervalle $[-3,3]$. Regardons. Sur $[-3,-1]$, on a $f(x) = -4x - 8$, sur $[-1,1]$, on a $f(x) = 4x$, sur $[1,3]$, on a $f(x) = -4x + 8$.
Si x appartient à $[-2,-1]$, $x - 1$ appartient à $[-3,-2]$ et $f(x-1) = -4(x-1) - 8 = -4x - 4$, $x + 1$ appartient à $[-1,0]$ et $f(x+1) = 4(x+1) = 4x + 4$. Finalement, $g(x) = 0$.
Si x appartient à $[-1,0]$, $x - 1$ appartient à $[-2,-1]$ et $f(x-1) = -4(x-1) - 8 = -4x - 4$, $x + 1$ appartient à $[0,1]$ et $f(x+1) = 4(x+1) = 4x + 4$ Donc $g(x) = 0$… et on peut vérifier qu'il en est de même pour la suite. Si on représente les fonctions $x \longmapsto f(x-1)$ et $x \longmapsto f(x+1)$, on peut voir que ces fonctions sont l'opposée l'une de l'autre :



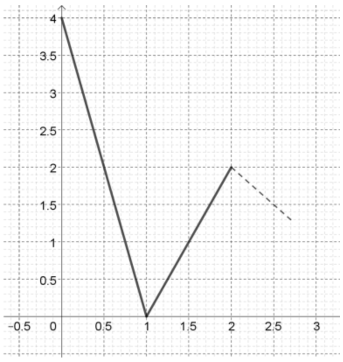
Exercice 3 Démographie
Les démographies de deux villes, *Bleuciel* et *Fuméville*, évoluent en sens contraire. Le premier janvier 2000, la population de *Fuméville* était double de celle de *Bleuciel*. Depuis, la population de *Bleuciel* augmente de $x\%$ tous les trois ans, et celle de *Fuméville* diminue de $x\%$ tous les trois ans. Au premier janvier 2018, les deux villes ont le même nombre d'habitants. Combien vaut x ?

L'équation représentant ce problème s'écrit : $2(1-x)^6 = (1+x)^6$, ou encore $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^6 = 2$. Appelons a le nombre réel positif tel que $a^6 = 2$. L'équation $\frac{1+x}{1-x} = a$ a pour solution $\frac{a-1}{1+a}$. Pour $a \approx 1{,}122462048$ (arrondi au milliardième), on obtient $x = 0{,}0576981$. On peut vérifier que ce résultat donne égalité au premier janvier 2018, à l'habitant près, ce qui n'est évidemment pas le but du problème…

Exercice 4 Variations conjointes de moyennes
On dispose de N balles, toutes numérotées en utilisant tous les entiers de 1 à N. Elles sont réparties aléatoirement entre deux urnes. On prend une balle dans une urne, on la met dans l'autre. On constate que la moyenne des numéros des balles contenues dans la première urne augmente de x et que la moyenne des numéros des balles contenues dans la deuxième urne augmente aussi de x. Quelle est la valeur maximum de x?

La première urne contient M balles dont la moyenne des numéros est m. La deuxième urne contient P balles dont la moyenne des numéros est p. Soit y le numéro de la balle changée d'urne. Les conditions de l'énoncé s'écrivent : $\frac{Mm-y}{M-1} = m + x$ et $\frac{Pp+y}{P+1} = p + x$, avec en outre $M + P = N$. Ces conditions peuvent encore être écrites : $\begin{cases}(M-1)x + y = m \\ (P+1)x - y = -p\end{cases}$. La solution de ce système est $\left(\frac{m-p}{N}, \frac{m-p}{N} - \frac{M}{N}(m-p) - 1\right)$. La plus grande valeur de x est donc obtenue dans la situation où $m - p$ est maximal. Cela se produit lorsque toutes les balles sont classées par numéro, une urne contenant les boules portant les plus petits, l'autre les plus grands. On prend alors le plus petit numéro parmi les plus grands, et on change la balle correspondante d'urne. Le calcul montre que dans ce cas $x = \frac{1}{2}$

Exercice 5 Amortissement
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 4 - 4x$ pour tout x élément de $[0,1]$, $f(x) = 2x - 2$ pour tout x élément de $[1,2]$ et $f(x) = \frac{f(x-1)+f(x-2)}{2}$ pour tout $x \geq 2$.



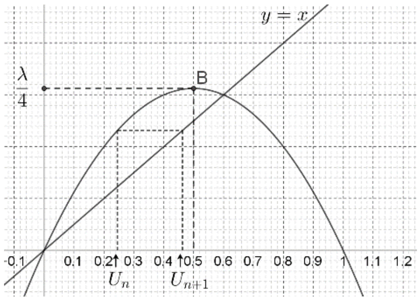
1. Pourquoi la fonction f est-elle affine sur les intervalles limités par deux entiers consécutifs ?
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0,6]$
3. Peut-on parler de limite à l'infini pour la fonction f ? Pour le savoir, on étudie la suite (u_n) dont les termes sont les valeurs prises par f en les entiers.
a. Montrer que pour tout entier n : $2u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. (*)
b. Montrer que toute suite constante vérifie la relation (*).
c. Trouver une suite géométrique vérifiant la relation (*)
c. Quelle suite, combinaison linéaire des deux suites précédentes, a les mêmes deux premiers termes que (u_n) ?
d. Montrer finalement que pour tout , $u_n = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
e. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Exercice 7 Le modèle de Verhulst (1804 – 1849)

En réponse au modèle malthusien de croissance des populations, Adolphe Quetelet, mathématicien belge, suggère à son étudiant de thèse Pierre-François Verhulst, d'établir un modèle de croissance des populations qui ne soit pas exponentiel. Verhulst introduit un « frein » dans la loi d'évolution, à partir de deux idées : les populations de petite taille ont tendance à croître, les populations de grande taille ont un taux de mortalité élevé et un taux de natalité faible. Si on note P_n l'effectif de la population concernée l'année n, le modèle s'écrit :
$P_{n+1} - P_n = aP_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$, où a et K sont donnés.

1. On pose $U_n = \frac{aP_n}{(a+1)K}$. Écrire la relation liant U_{n+1} et U_n.

2. λ étant un réel positif donné, on s'intéresse à la suide définie par son premier terme U_0 , compris entre 0 et 1, et la relation de récurrence $U_{n+1} = \lambda U_n(1 - U_n)$.



a. Pour « construire » U_{n+1} à partir de U_n on utilise le graphique ci-contre. Peut-on, sur ce graphique, « deviner » quel pourrait être la limite (s'il y en a une) de la suite (U_n) ?

b. Quelles sont le limites possibles ?

c. Que se passe-t-il lorsque $\lambda < 1$?

3. La suite (U_n) peut-elle être constante ? Qu'en est-il alors de P_n ?