Lycée Camille Pissarro
Pontoise

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens des classes de seconde – 16 et 17 avril 2018

« Mais je ne demeure point d'accord qu'en mathématiques *les démonstrations particulières* sur la figure qu'on trace fournissent cette certitude générale. […] Car il faut savoir que ce ne sont pas les figures qui donnent la preuve chez les géomètres. […] La force de la démonstration est indépendante de la figure tracée, qui n'est que pour faciliter l'intelligence de ce qu'on veut dire et fixer l'attention ; ce sont les propositions universelles, c'est-à-dire les définitions, les axiomes, et les théorèmes déjà démontrés qui font le raisonnement et le soutiendraient quand la figure n'y serait pas. »

Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*.

« Wonder en is gheen Wonder » (Merveille n'est point miracle)

Simon Stevin

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : collégiens de troisième en octobre, lycéens de première début janvier, lycéens de terminale présentés au concours général en février et lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, cette année le collège Jean-Philippe Rameau et le lycée La Bruyère de Versailles et le lycée de la Vallée de Chevreuse à Gif-sur-Yvette. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Philippe JULIEN,
professeur au lycée International de Saint Germain en Laye, animateur du club de mathématiques du lycée, est décédé en juillet dernier.
Il aimait faire des mathématiques avec les élèves.
La Pépinière académique lui doit beaucoup.
Les stages 2017-2018 lui sont dédiés

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (insp. Honoraire), Jean-François REMETTER, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

Les intervenants professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Annie DJENDEREDJIAN (Lycée Paul Langevin, SURESNES), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Michèle JACCOTTET (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Pascal RÉMY (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Julie ROUSSEAU (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Philippe TOUSCH (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Jean-Pierre VALLON-HOARAU (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE)

Professeurs accompagnants : Mélanie CAMBUS (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Cécile HECHT (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Pierre MENU (Lycée Saint Charles, ATHIS MONS)

Lundi 16 avril

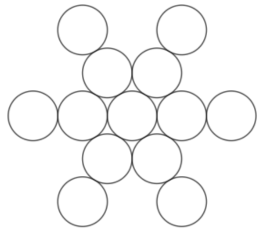
PONTOISE	GIF SUR YVETTE	VERSAILLES 1	VERSAILLES 2	VERSAILLES 3
10 NOMBRES (K. Renard)	*10* DÉNOMBREMENT PROBABILITÉS (X. Gabilly)	*10* FILM		
12 REPAS	*11 30* « Dessine-moi un vecteur » (P. Michalak)	*11* NOMBRES (J. Rousseau, P. Rémy)	*11* ANGLES ET DISTANCES (M. Jaccottet, C. Deguil)	*11* ALGORITHMES GRAPHES (J. Zolnet)
13 DÉNOMBREMENT PROBABILITÉS (P. Tousch)	*12 30* REPAS	*12 30* REPAS		
14 15 ALGORITHMES GRAPHES (O. Delassus)	*13 30* ALGORITHMES GRAPHES (J.-P. Vallon Hoarau)	*13 30* ALGORITHMES GRAPHES (J. Zolnet)	*13 30* NOMBRES (J. Rousseau, P. Rémy)	*13 30* ANGLES ET DISTANCES (M. Jaccottet, C. Deguil)
15 30 « Dessine-moi un vecteur » (P. Michalak)	*15* NOMBRES (J.-P. Vallon Hoarau)	*15* ANGLES ET DISTANCES (M. Jaccottet, C. Deguil)	*15* ALGORITHMES GRAPHES (J. Zolnet)	*15* NOMBRES (J. Rousseau, P. Rémy)

Mardi 17 avril

10 ÉQUATIONS FONCTIONS (B. Baudin)	*10* ANGLES ET DISTANCES (N. Fixot)	*10* « Dessine-moi un vecteur » (P. Michalak)		
11 30 FILM	*11 30* FILM	*11* ÉQUATIONS FONCTIONS (A. Djenderedjian)	*11* AIRES ET VOLUMES (S. Moulin)	*11* DÉNOMBREMENT PROBABILITÉS (M. Jaccottet, C. Deguil)
12 15 REPAS	*12 30* REPAS	*12 30* REPAS		
13 ANGLES ET DISTANCES (A. Boutrois)	*13 30* ÉQUATIONS FONCTIONS (N. Fixot)	*13 30* DÉNOMBREMENT PROBABILITÉS (M. Jaccottet, C. Deguil)	*13 30* ÉQUATIONS FONCTIONS (A. Djenderedjian)	*13 30* AIRES ET VOLUMES (S. Moulin)
14 45 AIRES ET VOLUMES (C. Houard)	*15* AIRES ET VOLUMES (X. Gabilly)	*15* AIRES ET VOLUMES (S. Moulin)	*15* DÉNOMBREMENT PROBABILITÉS (M. Jaccottet, C. Deguil)	*15* ÉQUATIONS FONCTIONS (A. Djenderedjian)

Thème : Nombres

Exercice 1 Flocon



Les treize entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 et 13 doivent être utilisés, chacun une fois, pour remplir les disques constituant le motif ci-contre. Les sommes de cinq nombres alignés (il y a trois alignements) et la somme des sept nombres situés le plus près du centre sont égales.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour ces sommes ?
2. Quelles sont toutes les valeurs possibles ?

Exercice 2 Arrière-arrière-…-petite-fille d'Eratosthène

Ashley écrit les 2018 premiers entiers strictement positifs. Elle souligne ensuite chacun des 2018 entiers qui est un multiple de 2, puis elle souligne chacun des 2018 entiers qui est un multiple de 3, puis elle souligne chacun des 2018 entiers qui est un multiple de 5. Ensuite, Ashley calcule la somme de tous les entiers qui n'ont pas été soulignés. Quelle est cette somme ?

Exercice 3 Rétrogradation

Le chiffre le plus à gauche de l'écriture décimale d'un entier N est 1. Quand on multiplie N par 3, les chiffres de N sont conservés ainsi que leur ordre, hormis pour le 1 qui devient chiffre des unités. Quel est N ?
Observer les résultats du produit de N par 2, 4, 5, 6 et 7…

Exercice 4 La splendeur des Anderson

Un nombre Anderson est un entier strictement positif *k* inférieur à 10 000 dont le carré se termine par les chiffres de k.
Par exemple, 25 est un nombre Anderson puisque 625 se termine par 25, mais 75 n'est pas un nombre Anderson puisque 5625 ne se termine pas par 75.
Faire la liste de tous les nombres Anderson pairs.

Exercice 5 Une conséquence de l'inégalité triangulaire

On considère trois réels positifs tels que, pour chaque paire de réels choisis parmi ces trois réels, la différence entre la somme de ces deux réels et le réel restant soit positive.
Montrer que le produit de ces trois différences est inférieur ou égal au produit des trois nombres

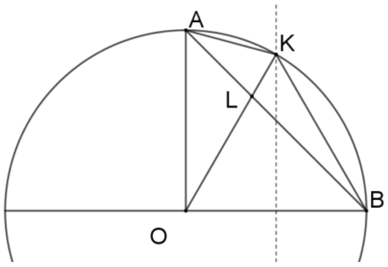
Exercice 6 2 018 entre deux palindromes

Dans cet exercice, on considère des nombres entiers écrits dans le système décimal de position. Un *palindrome* est un nombre semblable au nombre obtenu en renversant la position de ses chiffres : 202, 4554, 12 321, etc. sont des palindromes.
Si on ajoute à 2 018 un certain palindrome, on obtient un autre palindrome. Quels sont-ils ?

Thème : Angles et distances

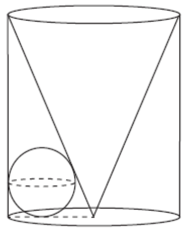
Exercice 1 Aiguë, aigu, obtuse, obtus
Un angle aigu a une mesure strictement inférieure à 90°.
Combien un polygone convexe peut-il comporter d'angles aigus ?
Rappel : chaque droite support d'un côté d'un polygone convexe détermine deux demi-plans dont un contient entièrement le polygone.

Exercice 2 Triangle isocèle caché
Les points A et B appartiennent au même cercle de centre O et le triangle AOB est rectangle en O. La médiatrice du segment [OB] coupe l'arc AB en K.
Le segment [OK] coupe [AB] en L.
Montrer que le triangle AKL est isocèle.

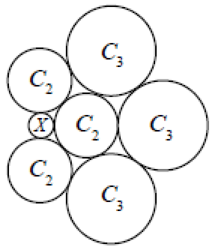


Exercice 3 Les Acutangle contre les Obtusangle
On dit qu'un triangle est acutangle lorsque tous ses angles sont aigus et on dit qu'un triangle est obtusangle lorsqu'il a un angle obtus.
1. Montrer que si *a*, *b* et *c* sont les longueurs (avec $a \leq b \leq c$) d'un triangle obtusangle, alors $a^2 + b^2 < c^2$.
2. Déterminer tous les entiers naturels *x* tel qu'un triangle dont les côtés ont pour longueurs 10, 17 et *x* soit obtusangle.

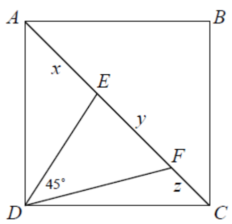
Exercice 4 Bille coincée
Un cylindre a un rayon de 12 et une hauteur de 30. La base circulaire supérieure du cylindre est la base d'un cône et le centre de la base circulaire inférieure du cylindre est le sommet du cône. On place une sphère à l'intérieur du cylindre de manière qu'elle touche au cône, à la base du cylindre et à la surface latérale du cylindre, comme dans la figure ci-contre.
Quel et le rayon *r* de la sphère ?



Exercice 5 Essaim de cercles
On considère dans la figure ci-contre des cercles *X*, C_2 et C_3, de rayons respectifs *r*, 2 et 3, et tels que chaque cercle à l'exception de celui au centre, soit tangent à exactement trois autres cercles. Le cercle au centre est tangent à tous les autres. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du rayon *r*.

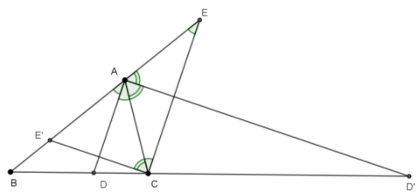


Exercice 6 Pythagore allongé

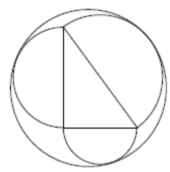


On considère un carré ABCD. Sur la diagonale [AC], on place, comme sur la figure ci-contre, les points E, et F tels que AE = *x*, EF = *y* et FC = *z*. On suppose de plus que $\widehat{EDF} = 45°$.
Montrer que $y^2 = x^2 + z^2$.

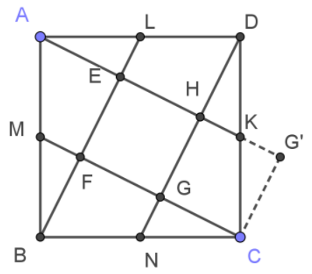
Exercice 7 Les pieds des bissectrices
Soit ABC un triangle. On note D et D' les points d'intersection respectifs des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle en A avec la droite (BC).
Montrer que $\frac{\text{DB}}{\text{DC}} = \frac{\text{D'B}}{\text{D'C}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}$.



Exercice 8 Cercle enveloppant
Dans la figure ci-contre, le triangle a des côtés de longueurs 6, 8 et 10. Trois demi-cercles sont tracés à l'extérieur du triangle avec les côtés du triangle pour diamètres. Un grand cercle est ensuite tracé tangent extérieurement à chacun des trois demi-cercles.
Quel est le rayon du grand cercle ?



Exercice 9 Partage

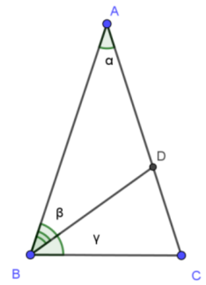


On veut partager une plaque carrée ABCD en respectant les trois contraintes suivantes :

- ce partage doit s'effectuer par quatre traits de scie dont l'un est [AK] où K est le milieu du côté [BC] ;
- on doit obtenir 9 morceaux ;
- ces 9 morceaux doivent permettre de reconstituer 5 petits carrés identiques.

Comment procéder ?

Exercice 10 Triangle d'Or

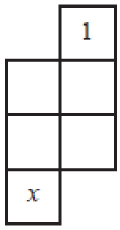


On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment [AC] en un point D tel que le triangle CDB soit isocèle en B.

1. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. En supposant que BC = 1, calculer AB.

Thème : Algorithmes, graphes

Exercice 1 Casse-tête



Les entiers de 1 à 6 doivent être placés dans les cases du quadrillage ci-contre. On ne peut pas placer deux entiers qui diffèrent de 1 dans deux cases qui partagent un même côté. Le nombre 1 est déjà placé. Combien d'entiers différents peuvent être placés dans la case indiquée par un *x* ?

Exercice 2 Éloge de la différence

Etant donné la liste d'entiers 1, 3, 9, 4, 11, les différences positives entre les nombres adjacents de la liste sont 3 − 1 = 2, 9 − 3 = 6, 9 − 4 = 5 et 11 − 4 = 7. La plus petite différence positive entre deux entiers adjacents quelconques de cette liste est 2.

1. Placer les entiers 1, 2, 3, 4, 5 de manière que la plus petite différence positive entre deux entiers adjacents quelconques de cette liste soit 2.

2. On place les vingt entiers 1, 2, 3, .., 18, 19, 20 de manière que la plus petite différence positive entre deux entiers adjacents quelconques de la liste soit N.

a. Expliquer pourquoi N ne peut pas être supérieur ou égal à 11.

b. Trouver un arrangement des entiers pour lequel N = 10.

3. On place les vingt-cinq entiers 1, 2, 3,..., 25, 26, 27 de manière que la plus petite différence positive entre deux entiers adjacents quelconques de la liste soit N.

Quelle est la plus grande valeur possible de N ?

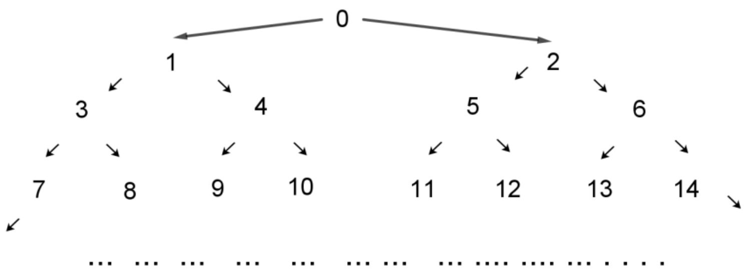
Exercice 3 Un critère de divisibilité

Charles Lutwitge Dodgson (Lewis Carroll) propose en 1897 un test de divisibilité par 11 des nombres s'écrivant avec au moins deux chiffres dans le système décimal, en énonçant une condition nécessaire et suffisante : le nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre le nombre obtenu en ôtant de l'écriture de N son chiffre des unités et ce chiffre des unités est divisible par 11.

1. Démontrer cette condition nécessaire et suffisante

2. On dispose des instructions ***Quotient*** *(*$N; n$*)* qui renvoie le quotient de la division euclidienne de N par n et ***Mod****(*$N; n$*)* qui renvoie le reste de la division euclidienne de N par n. Écrire un algorithme déterminant si un entier est divisible par 11. L'appliquer au nombre 9 876 543 210 987 654 321.

Exercice 4 Slalom



Les entiers sont disposés en cascade selon le schéma ci-contre. Sur chaque ligne, l'ordre est croissant de gauche à droite. En partant de 0, on oblique tantôt vers la droite, tantôt vers la gauche pour atteindre un entier donné. Par exemple, la suite GDG conduit à 9, la suite DGG conduit à 11. Quelle est la suite conduisant à 100 ?

Exercice 5 Langage fruste

Dans ce langage, on n'utilise que trois lettres, A, B et C. À partir d'un mot appartenant au langage, on peut former de nouveaux mots, à condition de respecter les trois règles suivantes :

1. Dans tout mot du langage, A peut être remplacé par AA ;
2. Dans tout mot du langage, B peut être remplacé par C ;
3. À tout mot du langage, on peut ajouter un C à la place qu'on veut.

Peut-on fabriquer les mots **AAAABBCBAAAABBCCCBBAABBC**, **ACCABCBCAABBCCBBACCC**, **AAAABCCBAAAABBCCBAABCC** à partir du mot **AABBBBAABBCCBBABBC** ?

Exercice 6 Boîtes de canelés bordelais (Olympiades 2017)

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?

2. ***a.*** Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.

b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.

c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

Un algorithme glouton mais peu performant :

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

3. ***a.*** Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?

b. Et pour répartir 75 canelés ?

c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

Exercice 7 Cycles routiers

On dit qu'une ville A appartient à un cycle routier de longueur n si on peut partir de A et revenir à A en traversant exactement $n-1$ autres villes.

Dans une certaine région, toutes les villes appartiennent à un cycle routier de longueur 4 et toutes les villes appartiennent à un cycle routier de longueur 5.

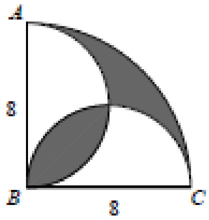
Est-il certain que toutes les villes appartiennent à un cycle routier de longueur 3 ? Est-on même certain qu'une ville au moins appartient à un cycle routier de longueur 3 ?

Thème : Aires et volumes

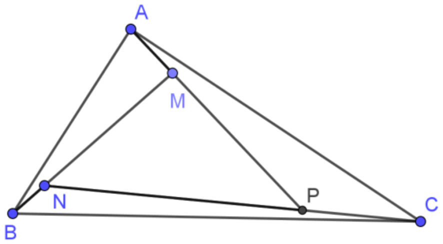
Exercice 1 Parapluie ou champignon ?

Dans la figure ci-contre, ABC est un quart de disque de rayon 8. On trace un demi-cercle de diamètre [AB] puis un deuxième demi-cercle de diamètre [BC].

Combien vaut l'aire de la région ombrée ?

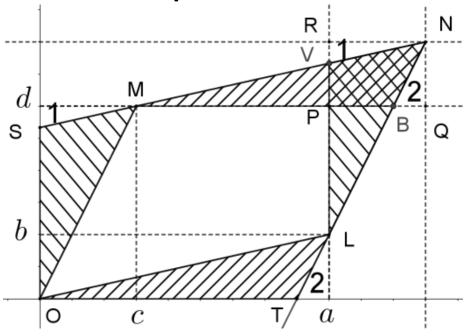


Exercice 2 Triangles gigognes



1. Toute médiane d'un triangle détermine deux triangles de même aire.
2. Dans la figure ci-contre, les points M, N, P sont tels que A, M, P sont alignés, ainsi que les points B, N, M et les points C, P, N. On suppose de plus que l'aire du triangle MNP est égale à 24 et que $\mathrm{AM} = \frac{1}{3}\mathrm{MP}$, $\mathrm{BN} = \frac{1}{4}\mathrm{NM}$ et $\mathrm{CP} = \frac{1}{2}\mathrm{PN}$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3 Un puzzle déterminant



Dans le plan rapporté à un repère d'origine O, les points O, L (de coordonnées a et b) et M (de coordonnées c et d) sont trois sommets d'un parallélogramme (le quatrième est N, symétrique de O par rapport au milieu de [LM]) entièrement situé dans le premier quadrant.

Montrer que l'aire de ce parallélogramme est : $\mathcal{A} = ad - bc$

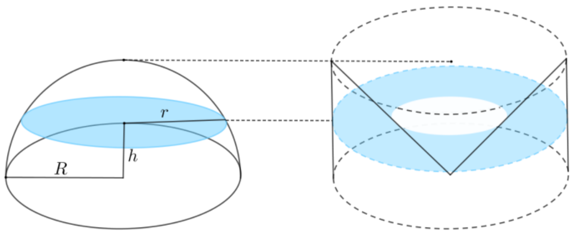
On utilisera après les avoir justifiées les égalités des aires des triangles notés **1**, des triangles notés **2**, des triangles OSM et LVN et des triangles OTL et MBN.

La formule est-elle encore valable si le point M est dans le deuxième quadrant ?

Exercice 4 Volume de la sphère (*méthode des indivisibles*)

On considère une demi-boule de rayon R posée sur un plan P.

À côté d'elle se trouve un cylindre de même rayon et de hauteur R. La base d'un cône de révolution de hauteur R coïncide avec la face supérieure du cylindre, et son sommet coïncide avec le centre de la face inférieure.



1. Montrer que le disque intersection de la boule avec un plan parallèle au plan P situé à la distance h de celui-ci et la couronne circulaire déterminée entre le cylindre et le cône par le même plan ont la même aire.
2. La *méthode des indivisibles* propose de calculer des aires ou des volumes en suivant le principe suivant : « si deux surfaces sont constituées de lignes d'égale longueur, elles sont égales ; les volumes de deux objets sont égaux si les sections transversales correspondantes sont, dans tous les cas, égales » (Bonaventura Cavalieri, 1598 – 1647, Gilles Personne de Roberval, 1602 - 1675). Appliquer ce principe pour évaluer le volume de la demi-boule (puis le volume d'une sphère, en général).

N.B. Cette méthode permet aussi de calculer l'aire d'une calotte sphérique, utile dans l'exercice suivant. Pour une sphère de rayon R, la partie se trouvant au-dessus d'un plan situé à la distance h du centre de la sphère a pour volume $V = \frac{\pi}{3}(R-h)^2(2R+h)$

Exercice 5 En faire une montagne

Le film « *L'Anglais qui gravit une colline mais redescendit une montagne* » (réalisé en 1995 par Christopher Monger) met en scène la population d'un village gallois, pendant la première guerre mondiale. Deux cartographes venus estimer l'altitude du point haut local la trouvent inférieure à 1 000 pieds : trop peu pour faire figurer une montagne sur la carte. La population surmonte la colline d'un cairn, conformément à la figure ci-contre. Le sommet de la colline étant figuré par une demi-boule de rayon 82 (en pieds), on le surmonte par un tronc de cône dont l'angle à la base est 45° et les génératrices tangentes à la boule (en C et D, sur le plan de coupe de la

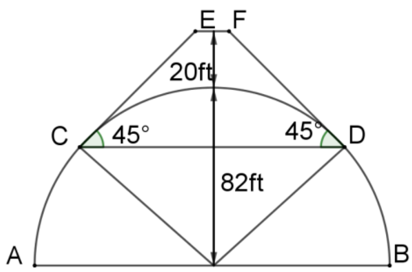
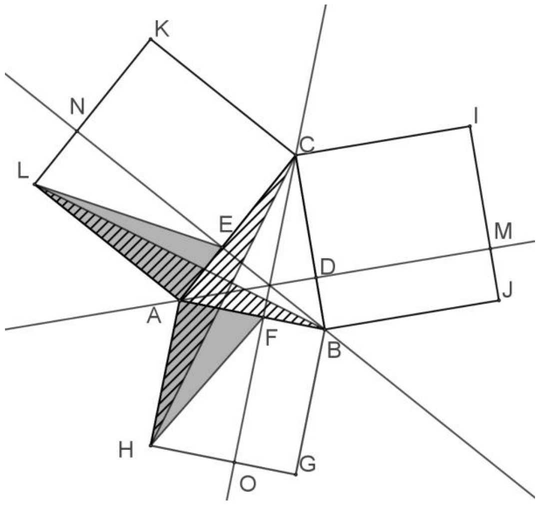


figure). La colline haute de 984 pieds devient montagne haute de 1 004 pieds. Quel volume de pierres et de terre (exprimé en pieds-cube) la population a-t-elle ajouté ?

Exercice 6 La loi des cosinus établie par les aires



On construit, sur les côtés d'un triangle acutangle ABC (tous ses angles sont aigus) les carrés ABGH, BCIJ et ACKL. Les hauteurs du triangle ABC déterminent dans ces carrés les rectangles AFHO et FBGO, BDMJ et CDMI, AENL et ENKC.

1. Montrer que l'aire de AENL et égale à celle de AFHO. Pour cela, comparer successivement les aires de ELA et BLA, BLA et CAH, CAH et FAH.

2. Montrer que les rectangles ENKC et CDMJ ont la même aire, égale à $\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} \times \cos \hat{C}$

3. En déduire la *loi des cosinus* :

$$\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 = \mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} \times \cos\widehat{C}$$

(*Les clés de l'arithmétique*, Ghiyath ad-din AL KASHI, 1429)

Thème : Équations et fonctions

Exercice 1 Un système

Trouver tous les triplets (a, b, c) de nombres réels tels que $\begin{cases} a^3 + b = 4c \\ a + b^3 = c \\ ab = -1 \end{cases}$

Exercice 2 Travail collaboratif

Céline a choisi des entiers strictement positifs a, b et c. En calculant $a + \frac{b}{c}$, Ariane a trouvé 101.
En calculant $\frac{a}{c} + b$, Isabelle a trouvé 68. En calculant $\frac{a+b}{c}$, Véronique a trouvé un nombre k.
Quelle est la valeur de k ?

Exercice 3 Où commence la descente infinie

Déterminer les triplets d'entiers relatifs (x, y, z) tels que $x^3 + 6y^3 = 4z^3$.

Exercice 4 Les inconnues sont des fonctions

Les deux fonctions réelles f et g sont telles que, pour tout réel x :
$\begin{cases} f(x) + 3g(x) = x^2 + x + 6 \\ 2f(x) + 4g(x) = 2x^2 + 4 \end{cases}$.
Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = g(x)$?

Exercice 5 Produit et différence

Déterminer les nombres x et y tels que : $\begin{cases} x - y = 4\sqrt{2} \\ xy = 56 \end{cases}$

Exercice 6 Composition

Les deux fonctions f et g sont données par $f(x) = x^2 - x + 2$ et $g(x) = ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer. On sait que, pour tout x, $f\big(g(x)\big) = 9x^2 - 3x + 2$. Déterminer a et b.

Thème : Dénombrement, probabilités

Exercice 1 La revanche des trois ours

Boucles d'Or dispose, dans son jardin, d'un carrousel réservé à son usage personnel. C'est un peu injuste, pensent les trois ours, qui viennent chaque jour de bon matin profiter de ce qu'elle dort encore. Ils font tourner le manège : Papa ours lui imprime $\frac{1}{7}$ de tour, Maman ours $\frac{1}{9}$ de tour et Bébé ours $\frac{1}{32}$ de tour, chacun autant de fois qu'il veut, dans le sens qu'il veut (sens des aiguilles d'une montre ou sens trigonométrique). Au fil des jours, dans combien de positions différentes Boucles d'Or peut-elle retrouver son carrousel, qu'elle laisse pourtant chaque soir dans la même position ? On montrera que ces positions peuvent effectivement être atteintes.

Exercice 2 Autant d'entiers que de couples d'entiers…

Cet exercice propose de « compter » les éléments de certains ensembles infinis. Dans cet exercice, c'est l'ensemble des entiers naturels **N** qui sert de référence : on établit des correspondances *bijectives* entre certains ensembles et l'ensemble **N**.

1. Il y a autant d'entiers que d'entiers non nuls. Pour cela, considérer l'application « *successeur* » qui a tout entier n associe son *successeur* (qu'on pourrait appeler $n+1$) ;
2. Il y a autant d'entiers pairs que d'entiers. Pour cela, considérer l'application *« double »* : $n \mapsto 2n$.
3. Il y a autant de couples d'entiers que d'entiers. Pour cela, considérer l'application qui à tout entier n associe le couple (p, q) défini par $n = 2^p(2q+1)$.
4. Il y a autant d'entiers que de couples d'entiers. Pour cela, considérer l'application qui, à tout couple (p, q) d'entiers associe l'entier $n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$

Exercice 3 Nos amies les bêtes

Une ville a 2017 maisons. Parmi ces 2017 maisons, 1820 abritent un chien, 1651 abritent un chat et 1182 abritent une tortue. Soit x le plus grand nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue et soit y le plus petit nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue.

Quelle est la valeur de $x - y$?

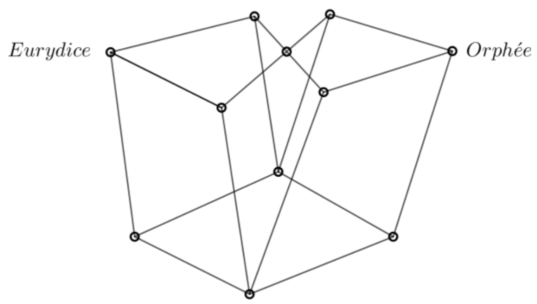
Exercice 4 Commensaux

On considère 26 personnes assises autour d'une table et dont les âges sont chacun un nombre entre 35 et 60, tous ces nombres étant représentés. Montrer qu'il existe quatre personnes assises côté à côte dont la somme des âges est inférieure à 190.

Exercice 5 Une rencontre problématique

Orphée se rend chez Eurydice, qui se rend chez Orphée. Ils partent en même temps et empruntent un réseau de couloirs et d'escaliers schématisé sur la figure ci-contre. Pour aller d'un point marqué à un point voisin, la durée du trajet est la même. Tous les parcours sont équiprobables.

Quelle est la probabilité que ces inséparables séparés se retrouvent ?



Exercice 6 Dents de scie

Un nombre (entier, écrit dans le système décimal de position) est *en dents de scie* si chacun de ses chiffres ayant deux voisins est ou bien strictement inférieur à chacun de ses voisins ou bien strictement supérieur à chacun de ses voisins. Combien y a-t-il de nombres *en dents de scie* à 8 chiffres, dont les chiffres sont pris parmi 1, 2 et 3 ?