ACADÉMIE DE VERSAILLES
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

**Lycée Hoche**
**VERSAILLES**

**Lycée Camille Pissarro**
**PONTOISE**


Blaise Pascal (1623-1662)

***« On ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire que les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus…***
***… car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée un nom tel qu'on voudra. Il faut seulement prendre garde qu'on n'abuse pas de la liberté qu'on a d'imposer des noms, en donnant le même a deux choses différentes…***
***… mais si l'on tombe dans ce vice, on peut lui opposer un remède très sûr et très infaillible : c'est de substituer mentalement la définition à la place du défini. »***

# *Stage ouvert aux lycéennes et lycéens des classes de seconde – 25 et 26avril 2022*

---

**« Présenter des notions vagues pour des démonstrations exactes, c'est substituer de fausses lueurs à la lumière. »**
**Jean le Rond D'Alembert**

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril. La Pépinière dite « filée » a suppléé à la suppression de stages due à la situation sanitaire.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
**Les inspectrices et inspecteurs :** Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Olivier GINESTE, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

**Les intervenants professeurs :** Malcolm BIKOUMOU (Lycée Evariste Galois, SARTROUVILLE), Dominique CLENET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Maximilien DENIS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sacha DHÉNIN, Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), François LAVALLEE (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Sylvain MAGNE (Lycée Suger, VAUCRESSON), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE),

**Professeurs accompagnants :** Soline PETETIN (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien ROUSSEAU et Fatih HOSKAL (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Pascale COTT (Lycée Sainte Marie NEUILLY SUR SEINE), François L'OFFICIAL (Lycée Charles de Gaulle, POISSY)

## *Emploi du temps*
## *Lundi 25 avril 2022*

| *Pontoise* | | *Versailles* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | 10 | **Films : Le problème isopérimétrique (Rozenn Texier-Picard)<br>Comment illustrer des sommes d'entiers ? (Olivier Pierre)<br>À quoi servent les mathématiques ?** | | |
| 11.45 | | 10.30 | **Nombres** | **Dénombrement** | **Géométrie** |
| 12.30 | | 12.30 | **Repas** | | |
| 14 | | 13.15 | **Géométrie** | **Nombres** | **Dénombrement** |
| 15.30 | | 15 | **Dénombrement** | **Géométrie** | **Nombres** |

## *Mardi 26 avril 2022*

| *Pontoise* | | *Versailles* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | 10 | **Fonctions Équations** | **Fonctions Équations** | **Histoires de cordes** |
| 10.50 | | 12 | **Calculs approchés<br>(PM)** | | |
| 12. 20 | | 13 | **Repas** | | |
| 13.10 | | 13.45 | **Film Secrets of the surface (Maryam Mirzakhani)** | | |
| 14.50 | | 15 | **Histoires de cordes** | **Histoires de cordes** | **Fonctions Équations** |

# *Nombres*

**Exercice 1**

Déterminer tous les entiers $N$ strictement positifs dont l'écriture décimale est $N = \overline{8abc}$ où $a, b$ et $c$ sont tels que :

- L'entier dont l'écriture décimale est $\overline{8a}$ est un multiple de 3 ;
- L'entier dont l'écriture décimale est $\overline{8ab}$ est un multiple de 4 ;
- L'entier $N$ est un multiple de 5.

**Exercice 2**

Déterminer le nombre de triplets de trois entiers strictement positifs $(a, b, c)$ tels que :

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+1}{\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1} = 11 \text{ et } a + 2b + c \leq 40.$$

**Exercice 3**

Soit $a, b, c$ et $N$ quatre entiers positifs vérifiant :

$N = 5a + 3b + 5c$, $N = 4a + 5b + 4c$ et $N$ est un nombre compris entre 131 et 150

Déterminer la somme $a + b + c$.

**Exercice 4**

Soit $p, q, r$ et $s$ quatre entiers naturels. On pose $a = 3^p, b = 3^q, c = 3^r, d = 3^s$.

Déterminer la plus petite valeur de $p + q + r + s$ telle que $a^2 + b^3 + c^5 = d^7$.

**Exercice 5**

Déterminer les entiers naturels $n$ tels que $N = \frac{2n^2-10n-4}{n^2-4n+3}$ existe et soit un entier.

**Exercice 6**

Pour tout réel $x$ distinct de 0 et de 1, on définit successivement les nombres :

$a_1 = \frac{1}{1-x}, a_2 = \frac{1}{1-a_1}$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{1-a_{n-1}}$.

Calculer $a_2, a_3, a_4$ puis $a_{2\,022}$ en fonction de $x$.

## *Fonctions et équations*

**Exercice 1**

Déterminer les polynômes $P$ tels que, pour tout réel $x$, $P(x) - P(x-2) = (2x-1)^2$ (1)

**Exercice 2**

Résoudre dans **R** le système d'équations $\begin{cases} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases}$.

**Exercice 3**

Quelle est le maximum de la fonction $f$ définie sur **R** par, pour tout réel $x$, $f(x)$ est le minimum des trois nombres $2x+2, \frac{1}{2}x+1, -\frac{3}{4}x+7$.

**Exercice 4**

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point Q de coordonnées $(3, -2)$ et la droite $D$ d'équation $y = 5x + 3$. A tout point P de la droite $D$, on associe le milieu M du segment [PQ].

Quel est l'ensemble décrit par le point M lorsque le point P décrit la droite $D$ ?

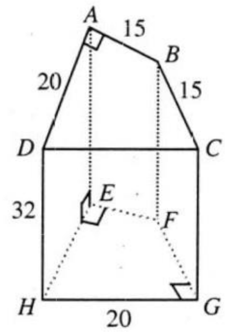
**Exercice 5**

Déterminer les trois réels $a, b$ et $c$ tels que : $\begin{cases} a + b = 3 \\ ac + b = 18. \\ bc + a = 6 \end{cases}$

# *Aires et distances*

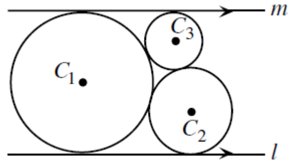
**Exercice 1**

On considère un prisme droit $ABCDEFGH$ comme sur la figure ci-contre.
On suppose de plus que les angles $\widehat{DAC}$, $\widehat{HEF}$ et $\widehat{FGH}$ sont des angles droits et que $AE = 32$.
1. Démontrer que les diagonales du quadrilatère $EFGH$ sont perpendiculaires.
2. Calculer la distance $AG$.



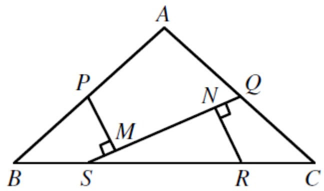

**Exercice 2**

On considère (voir figure ci-contre) deux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, de centres respectifs $C_1$ et $C_2$, et tangents extérieurement et admettant la droite $l$ comme tangente commune.
La droite $m$ est parallèle à la droite $l$ et tangente commune aux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_3$ de centres $C_1$ et $C_3$. Les trois cercles sont tangents deux à deux.
On suppose que le rayon de $\Gamma_2$ vaut 9 et celui de $\Gamma_3$ vaut 4.
Déterminer le rayon du cercle de centre $\Gamma_1$.




**Exercice 3**

On considère (voir figure ci-contre) un triangle $ABC$ isocèle en $A$.
Sur le segment $[BC]$, on place les points $S$ et $R$ tels que les distances $BS$, $SR$ et $RC$ soient proportionnelles aux nombres 1, 2 et 1.
$P$ et $Q$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
$M$ et $N$ sont les projetés orthogonaux respectifs de $P$ et $R$ sur $(SQ)$.
On suppose que $AB = AC = 10$ et $BC = 12$.
Calculer la longueur $MN$.

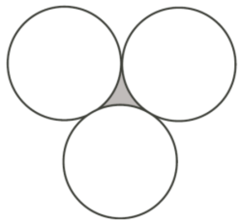



**Exercice 4**

On considère un triangle ABC et trois points R, S et T situés respectivement sur [BC], [CA] et [AB] tels que BR = RC, CS = 3 SA et $\frac{\text{AT}}{\text{TB}} = \frac{p}{q}$ où $p$ et $q$ sont deux réels strictement positifs.
Déterminer le quotient $\frac{p}{q}$ si on suppose que l'aire du triangle RST est le double de l'aire du triangle TBR.

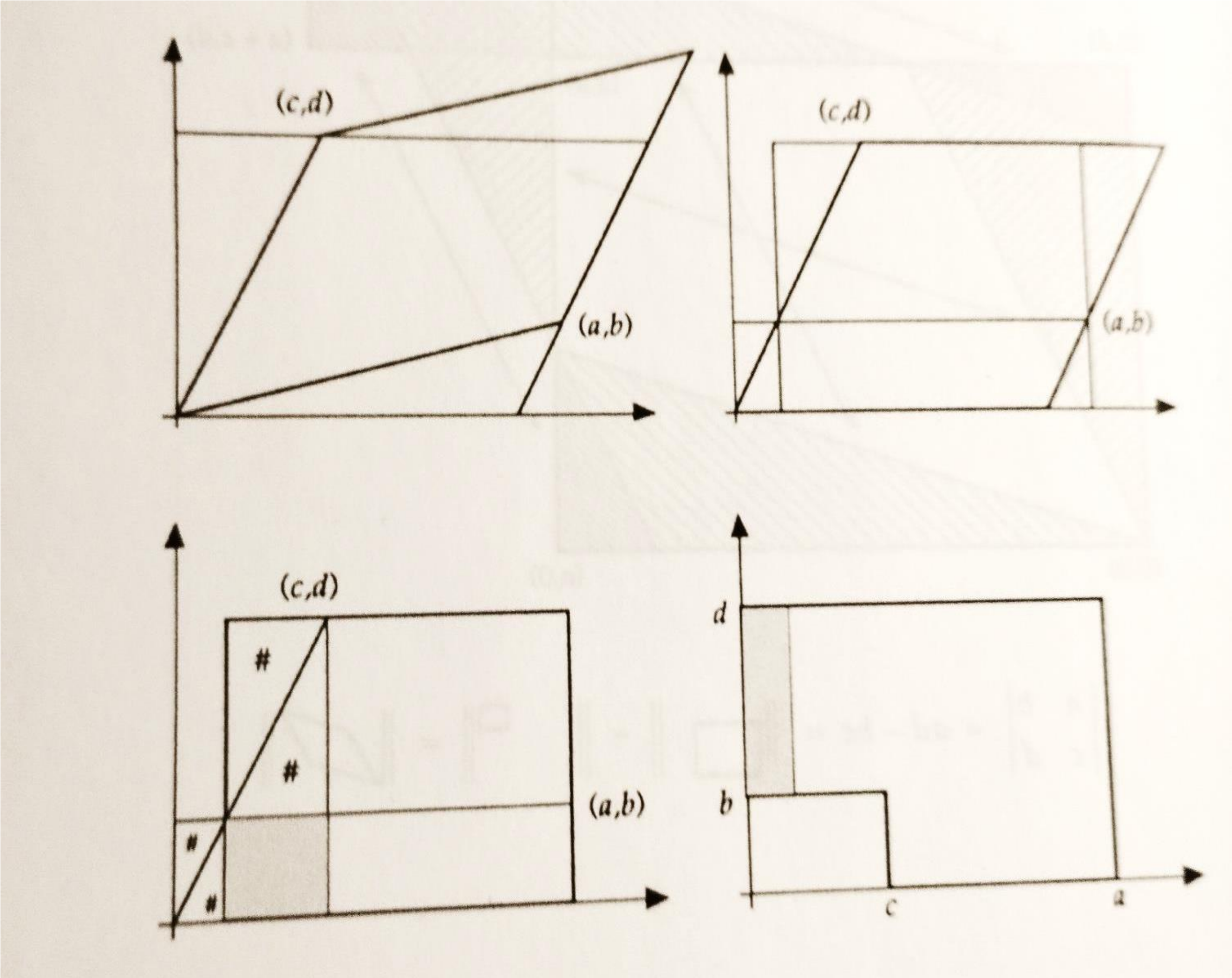
**Exercice 5**

On considère (voir sur la figure ci-contre) trois cercles identiques deux à deux tangents extérieurement. Ces trois cercles délimitent une surface grisée.
On suppose que le périmètre commun de ces cercles est égal à 36.
Calculer le périmètre du pourtour de la surface grisée.



**Exercice 6**

Le déterminant des vecteurs de coordonnées $(a, b)$ et $(c, d)$ peut être vu comme l'aire d'un parallélogramme.
La photo ci-dessous est extraite du livre « Preuves sans mots » de Roger B. Nielsen (Ed. Hermann 2013)



# *Dénombrement, probabilités*

**Exercice 1**
On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Pour tout entier $x$ compris entre 1 et 6, on suppose que la probabilité d'obtenir $x$ est $x$ fois celle d'obtenir le 1.
Lucie et maxime jouent à un jeu qui consiste à lancer chacun trois fois ce dé. Le total des points obtenus constitue leur score, le vainqueur étant celui qui a obtenu le plus grand score (en cas d'égalité des scores, il n'y a pas de vainqueur).
Au bout de deux lancers, Lucie a 8 points et Maxime en a 10.
Déterminer la, probabilité que Lucie soit victorieuse.

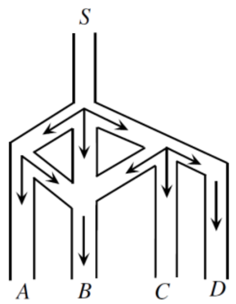
**Exercice 2**
Combien d'entiers peut-on exprimer comme la somme de trois entiers deux à deux distincts choisis dans l'ensemble $E = \{4, 7, 10, 13, \dots, 46\}$ ?

**Exercice 3**
De combien de façons peut-on exprimer le nombre 75 comme somme d'au moins deux entiers strictement positifs consécutifs ?

**Exercice 4**
Combien existe-t-il de sous-ensembles $\{a, b, c, d\}$ de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tels que et $a + b + c + d$ soit un multiple de 3 ?

**Exercice 5**

Un hamster est placé dans un labyrinthe au point S de la figure ci-contre. Il peut seulement se diriger dans le sens des flèches.
A chaque bifurcation, les chemins proposés ont la même probabilité d'être empruntés.
Quelle est la probabilité que le hamster aboutisse au point B ?

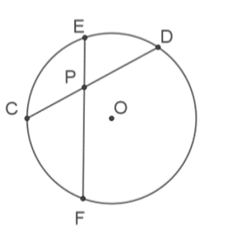


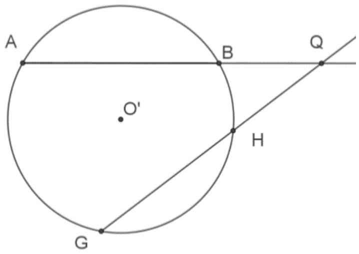

**Exercice 6**

Lors d'une session d'examens se déroulant sur deux jours. Le premier jour, les $N$ élèves sont répartis dans $S$ salles ($S \neq 0$) et on suppose que les effectifs de ces $S$ salles sont deux à deux distincts et tous supérieurs ou égaux à 3.
Le deuxième jour, sont exclus de l'examen les tricheurs détectés le premier jour. Tous les autres élèves présents le premier jour passent le deuxième examen. Ils sont répartis dans un certain nombre non nul de salles et on suppose à nouveau que effectifs de ces salles sont deux à deux distincts et tous supérieurs ou égaux à 3.
De plus, deux élèves ayant passé le premier examen dans la même salle ne se sont jamais ensemble dans la même salle pour le deuxième examen.
*a.* On suppose que $N = 12$ et $S = 3$. Déterminer le nombre de tricheurs.
*b.* Dans le cas général, montrer qu'il y a au moins $2S + 3$ tricheurs.

## *Macramé : histoires de cordes*

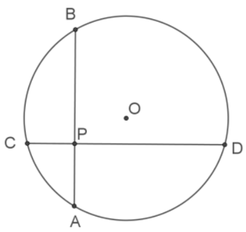
### Situation 1 : Deux cordes sécantes d'un même cercle



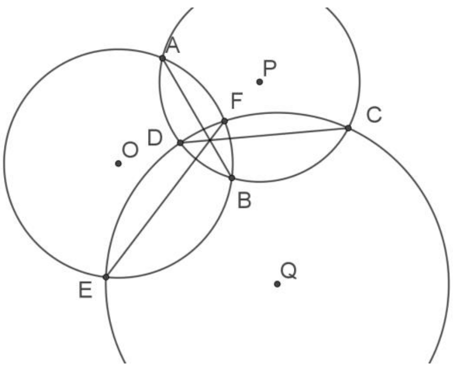

Les cordes [CD] et [EF] du cercle de centre O sont sécantes en P, point situé à l'intérieur du cercle de centre O, les droites supports des cordes [AB] et [GH] sont sécantes en Q, point extérieur au cercle de centre O'. Dans ces configurations : $\mathrm{PC}.\mathrm{PD} = \mathrm{PE}.\mathrm{PF}$ et $\mathrm{QB}.\mathrm{QA} = \mathrm{QH}.\mathrm{QG}$

### Situation 2 : Deux cordes perpendiculaires



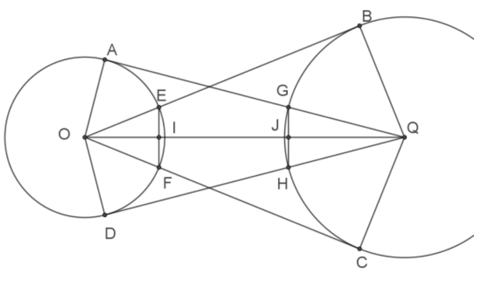

Le cercle de centre O a pour rayon $R$. Les cordes [AB] et [CD] sont sécantes en P et perpendiculaires. Montrer que $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 + \mathrm{PD}^2 = 4R^2$ .

### Situation 3 : Trois cordes pour trois cercles




Chacun des trois cercles de centres O, P, Q est sécant avec les deux autres en deux points. La corde [AB] est commune aux deux premiers, la corde [CD] au deuxième et au troisième et la corde [EF] est commune au troisième et au premier. Montrer que les supports de ces segments sont concourants.

### Situation 4 : Des cordes et des tangentes (Théorème dit « du globe oculaire »)




Des points O et Q, on mène les tangentes aux cercles de centres Q et O. Ces tangentes déterminent sur le cercle de centre O la corde [EF] et sur le cercle de centre Q la corde [GH]. Montrer que ces cordes sont de même longueur.

### Situation 5 : Le théorème de la pizza

Un disque est divisé en huit régions par 4 cordes concourantes en un point P, chacune faisant avec ses voisines un angle de 45°. Montrer que les surfaces blanche et grisée ont la même aire. On pourra faire appel à un découpage adéquat de chacune des zones.