ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Versailles
Lycée Marie Curie
Poissy
Lycée Charles de Gaulle

QUEL EST LE FÉMININ DE « PRÉCURSEUR » ?

Le poète Lord Byron surnommait sa future épouse Annabella Milbanke « la princesse des parallélogrammes ». Leur vie commune fut courte et Annabella conserva près d'elle leur enfant Ada, à laquelle elle communiqua son goût pour les mathématiques.

Ada Lovelace (1815 – 1852) témoignait une certaine passion pour les sciences et techniques, et rêvait de « science poétique ». Un de ses professeurs, le grand mathématicien et logicien Augustus De Morgan, lui prêtait de grandes capacités en mathématiques. Elle rencontre Charles Babbage, concepteur du *moteur différentiel*, en 1533, et rédige des commentaires sur le fonctionnement du *moteur analytique*, dont la célèbre « note G » qui contient un programme de calcul de *nombres de Bernoulli.*

« Ce que Lovelace a vu…C'est cette transition fondamentale d'une machine qui est un calculateur de nombres à une machine pour manipuler des symboles selon des règles … si nous recherchons et passons au crible l'histoire pour cette transition, alors cette transition a été faite explicitement par Ada en 1843 » (Doron Swade)

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de seconde
Désigné(es) par leurs établissements les 8 et 9 avril 2024

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles, le lycée Charles de Gaulle de Poissy. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHENIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Catherine HOUARD (Retraitée), François LAVALLEE (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Manon LERAY (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), François L'OFFICIAL (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE, Rémi NIGUES (collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE), Martine SALMON (retraitée)

Professeurs accompagnants :

Emploi du temps

Lundi 8 avril 2024

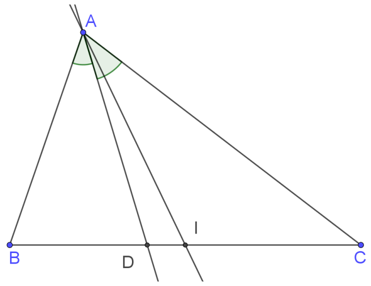
<table>
<tr><th></th><th>Groupe 1 Vers</th><th>Groupe 2 Vers</th><th>Groupe 3 Vers</th><th>Poissy</th></tr>
<tr><td>10 heures</td><td colspan="4">Accueil</td></tr>
<tr><td>10 h 10</td><td>Géométrie
SD</td><td>Arithmétique
CD</td><td>Équations
RN</td><td>Géométrie
FLav.</td></tr>
<tr><td>12 h 10</td><td colspan="4">Repas 12 h 15</td></tr>
<tr><td>13 heures</td><td>Dénombrement
PM</td><td>Géométrie
SD</td><td>Arithmétique
CD</td><td>Arithmétique
CH</td></tr>
<tr><td>15 h 10</td><td colspan="3">Films</td><td rowspan="2">Quiz

Film(s)</td></tr>
<tr><td>15 h 50</td><td colspan="3">Exposé « Calculs approchés »</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Groupe 1 Vers</th><th>Groupe 2 Vers</th><th>Groupe 3 Vers</th><th>Poissy</th></tr>
<tr><td>10 heures</td><td>Équations
MS</td><td>Dénombrement
PM</td><td>Géométrie
SD</td><td>Equations
ML</td></tr>
<tr><td>12 heures</td><td colspan="4">Repas</td></tr>
<tr><td>12 h 50</td><td>Arithmétique
CD</td><td>Équations
MS</td><td>Dénombrement
PM</td><td>Dénombrement
FL’O</td></tr>
<tr><td>15 heures</td><td colspan="3">Quiz</td><td>Film(s)
Exposé « calculs approchés »</td></tr>
</table>

Géométrie

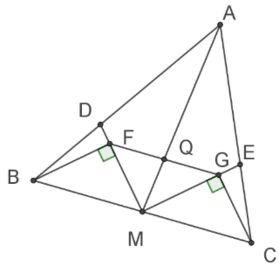
Quelques définitions



Définition 1 : dans un triangle ABC, on appelle médiane issue du point A la droite passant par A et par le milieu I du segment [BC]

Définition 2 : on appelle bissectrice d'un angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ une droite qui coupe l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ en deux angles adjacents $\widehat{\mathrm{BAD}}$ et $\widehat{\mathrm{DAC}}$de même mesure.

Exercice 1 – On se retrouve sur la médiane…

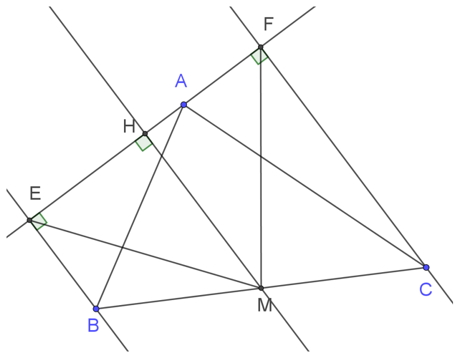


Dans le triangle ABC, le point M est le milieu de [BC] et les bissectrices des angles $\widehat{BMA}$ et $\widehat{CMA}$ coupent les côtés [AB] et [AC] respectivement en D et E. F et G sont les projetés de B et C sur [MD] et [ME] et Q est le point d'intersection de [FG] avec [AM].
Montrer que Q est le milieu de [FG].

Les triangles rectangles BFM et CGM ont des hypoténuses égales et des angles aigus égaux (les bissectrices d'angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires, donc $\widehat{\mathrm{BMF}}$ et $\widehat{\mathrm{CMG}}$ sont complémentaires). Ils sont égaux, et ils sont aussi égaux au triangle FMG (cette fois c'est le deuxième cas d'égalité qui joue). Il s'ensuit que (FG) et (BC) sont parallèles (égalité d'angles en situation d'alternes-internes) et que les triangles QFM et QGC sont isocèles de sommet principal Q. D'où l'égalité QF = QG.

Exercice 2 – Projetés orthogonaux

Soit ABC un triangle et $\mathcal{D}$ une droite passant par A. On note respectivement E et F les projetés orthogonaux des points B et C sur la droite $\mathcal{D}$. Soit M le milieu du segment [BC].
Montrer que ME = MF.

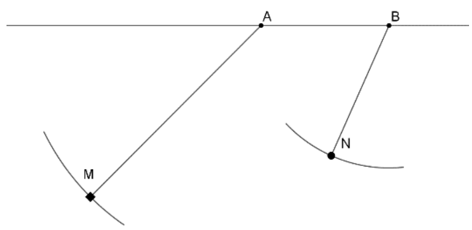


Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$. Les triangles EHM et FHM sont isométriques car :

- ils ont tous les deux ont un angle droit (en H) ;
- ils ont un côté commun (le côté [HM]) ;
- comme M est le milieu de [BC] et les droites (BE) et (CF) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite $\mathcal{D}$ donc parallèles entre elles, H est le milieu de [EF] donc HE = HF.

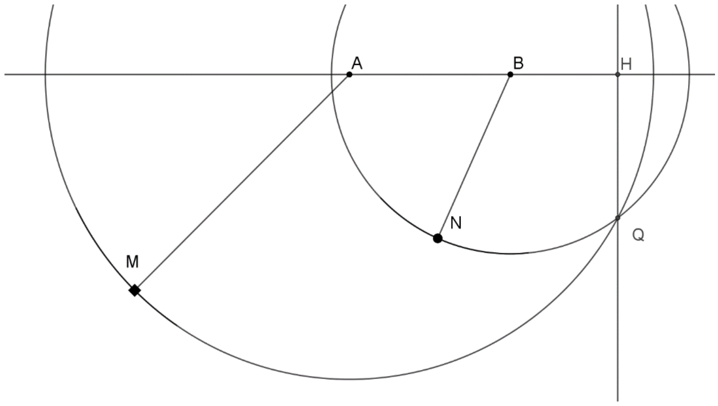
On en déduit que ME = MF.

Exercice 3 – Les deux pendules



Aux points A et B, distants de 9 cm sur le plafond d'une salle, sont attachés deux pendules désignés par M et N, le premier avec une ficelle de 17 cm de longueur, le second avec une ficelle de 10 cm. Les pendules sont supposés évoluer dans le même plan vertical, assez longtemps et avec une assez grande vitesse initiale pour se rencontrer.
À quelle distance du plafond seront-ils à ce moment ?

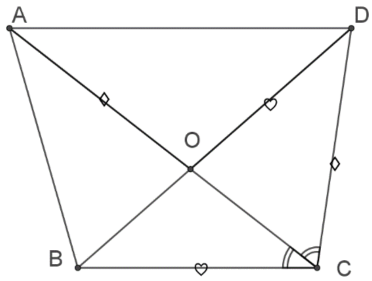
Dans le plan vertical, les masses M et N décrivent des cercles. Comme la somme des rayons est supérieure à la distance des centres, ces cercles ont deux points d'intersection situés de part et d'autre de la ligne des centres. L'un est le point Q. Appelons H son projeté orthogonal sur (AB) et posons $QH = h$ et $BH = x$. Les triangles rectangles QAH et QBH fournissent, grâce au théorème de Pythagore : $h^2 + x^2 = 100$ et $h^2 + (x + 9)^2 = 289$. D'où on tire, par soustraction membre à membre, d'abord $x = 6$ puis $h = 8$.



Exercice 4 – Trapèze violent

Dans la figure ci-contre (qui est évidemment fausse), les droites (AD) et (BC) sont parallèles, les longueurs BC et OD sont égales, les longueurs AO et CD sont égales et la droite (AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.

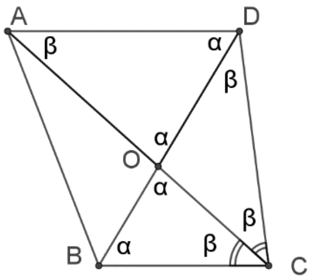
Combien mesure l'angle $\widehat{ABC}$?



Le triangle ADC est isocèle de sommet principal D, car $\widehat{CAD}$ occupe la position d'alterne-interne avec l'angle $\widehat{ACB}$ qui a même mesure que l'angle $\widehat{ACD}$ donc $\widehat{CAD} = \widehat{ACD}$.

De ce fait, le triangle DAO est isocèle de sommet principal A, car la conclusion précédente prouve que AD = CD = AO (ce qui ne se voit pas sur la figure…).

Les triangles BOC et DOA sont semblables du fait du parallélisme de (BC) et (AD), et donc le triangle BOC est isocèle de sommet principal C (ce qui ne se voit pas non plus) donc CO = CB. Or CB = OD donc CO = OD et le triangle COD est de ce fait isocèle de sommet principal O.



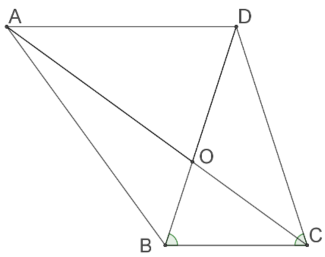
À ce stade, nous essayons de refaire une figure dans laquelle apparaissent les égalités d'angles ou de distances mises en lumière, en notant les mesures d'angles α et β. Cette figure nous permet de « lire » que BDC et BCO sont des triangles semblables (ils ont l'un et l'autre un angle α et un angle β).

Cela nous permet d'affirmer que $\alpha = 2\beta$. Comme $2\alpha + \beta = 180°$ (somme des angles du triangle COB), on en déduit que $\beta = 36°$ et donc $\alpha = 72°$.

Le triangle ABD est isocèle de sommet princial D, car on a montré que DA = DC puis que DC = DB.

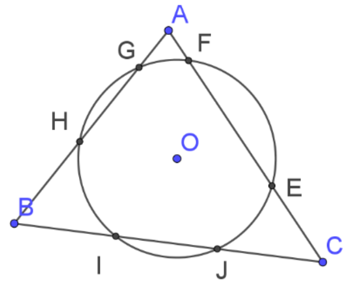
On en déduit que la somme des angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{ABO}$ est égale à $108°$, et comme ils sont égaux, chacun mesure $54°$. Finalement, l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $54° + 72° = 126°$.

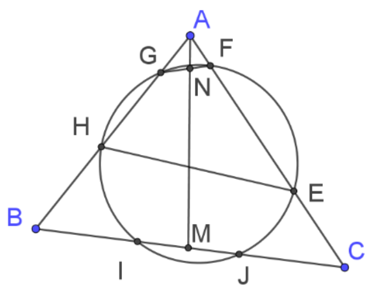
Pour achever l'exercice, on peut essayer de faire une figure exacte, en commençant par le triangle isocèle BCD dont les angles sont connus, puis la demi-droite [BA) et le point A.



Exercice 5 – Non, ce n’est pas un hasard

Sur les côtés du triangle ABC, sont placés les points E, F, G, H, I, J de telle sorte que chaque côté du triangle soit régulièrement partagé :
CE = EF = FA, AG = GH = HB, BI = IJ =JC (*la figure n’est évidemment pas juste*).
Les six points E, F, G, H, I, J sont cocycliques.
Prouver que le triangle ABC est équilatéral.





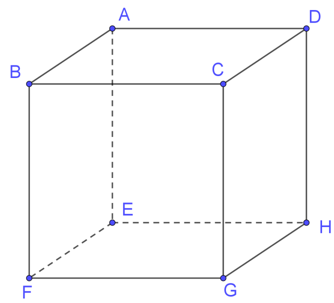
Appelons M le milieu de [IJ], qui est aussi le milieu de [BC] puisque, sur le segment [BC], BI = IJ =JC. La droite (MA) est donc une médiane du triangle ABC. Elle coupe [GF] en N.
Les divisions régulières (CE = EF = FA et AG = GH = HB) sur les côtés (qui ne se voient pas sur la figure fausse, évidemment) conduisent au parallélisme de (GF) et (IJ) et au fait que N est le milieu de [GF] (on peut passer par des triangles semblables car leurs côtés sont parallèles deux à deux).
La médiatrice de [IJ] passe par O, centre du cercle imaginé au départ, qui passe par I et J. Elle passe par M, bien sûr et, pour des raisons analogues, par N. Cette droite est donc (MN), et (MN) passe par A.
Le triangle ABC est donc isocèle de sommet principal A. Le même raisonnement vaut pour B. Le triangle ABC est donc équilatéral.

Exercice 6 – Un peu d’espace

On considère un cube ABCDEFGH de côté a. On note I, J, K, L, M, N, P les milieux respectifs de [AB], [BF], [FG], [GH], [HD], [DA] et [AE].
On admet que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires
Ce cube est alors coupé par deux plans :

- le plan $\mathcal{P}_1$ parallèle au plan (ABC) et passant J ;
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par I, K, L, N.

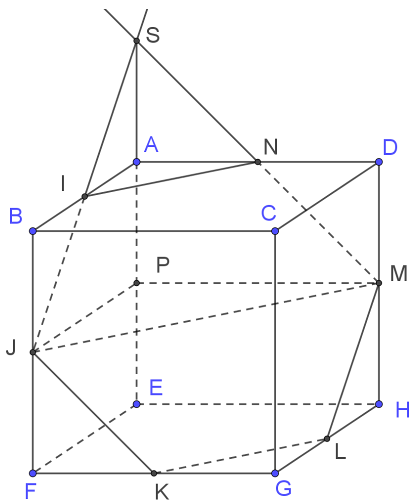
Déterminer le quotient du volume du plus petit polyèdre ainsi formé par celui du plus grand polyèdre.



Le plan $\mathcal{P}_1$ coupe le cube en deux morceaux (parallélépipèdes rectangles) de même volume $V=\frac{1}{2}a^3$.
Le plan $\mathcal{P}_2$ recoupe ces deux morceaux en deux parties (tétraèdres tronqués). Le volume commun V' des deux plus petits morceaux est égal à celui du tétraèdre SJMP auquel on retire le volume V' du tétraèdre SINA.
Les triangles SAN et SPM sont semblables (rectangles en A et P respectivement et l’angle en S en commun) donc $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SP}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{PM}}=\frac{1}{2}$
d’où $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SA+AP}}=\frac{1}{2}$ soit $2\mathrm{SA}=\mathrm{SA}+\frac{a}{2}$ soit $\mathrm{SA}=\frac{a}{2}$.
Le volume du plus petit morceau obtenu en coupant le cube par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donc $V'=\frac{1}{3}A_{\mathrm{PJM}}\times\mathrm{SP}-\frac{1}{3}A_{\mathrm{AIN}}\times\mathrm{SA}$

$$V'=\frac{1}{3}\times\frac{a^2}{2}\times a-\frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\times\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7a^3}{48}.$$

Le volume du plus grand morceau obtenu en coupant le cube par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donc $\frac{1}{2}a^3-\frac{7a^3}{48}=\frac{17a^3}{48}$. Le rapport cherché est donc $\frac{\frac{7a^3}{48}}{\frac{17a^3}{48}}=\frac{7}{17}$.



Arithmétique et nombres

Exercice 1

Déterminer les entiers a et b strictement positifs tels que $\frac{a}{7} + \frac{2}{b} = 1$.

Comme a et b sont strictement positifs donc non nuls, l'équation donnée équivaut, en multipliant les deux membres par $7b$ à $ab + 14 = 7b$ soit $14 = b(7 - a)$.
Les diviseurs de 14 sont 1, 2, 7 et 14. De plus 14 est positif donc $a < 7$ et les nombres a et b sont strictement positifs.
Les seules possibilités sont donc :
$b = 7$ et $7 - a = 2$ soit $b = 7$ et $a = 5$
$b = 14$ et $7 - a = 1$ soit $b = 14$ et $a = 6$.

Exercice 2 – Somme de chiffres

Quelle est la somme des chiffres de $10^{2\,024} - 2\,024$?

On remarque que $10^{2\,024} = 1\underbrace{00\dots00}_{2\,024\ zéros} = 1 + \underbrace{999\dots999}_{2\,024\ neufs}$.
Donc, comme $9\,999 - 2\,024 = 7\,975$, on peut écrire $10^{2\,024} - 2\,024 = 1 + \underbrace{999\dots99999}_{2\,024\ neufs} - 2024$
Soit $10^{2\,024} - 2\,024 = 1 + \underbrace{999\dots999}_{2\,020\ neufs}0000 + 9\,999 - 2\,024 = \underbrace{999\dots999}_{2\,020\ neufs}0000 + 7\,976$
Et la somme des chiffres de $10^{2\,024} - 2\,024$ est $S = 2\,020 \times 9 + 7 + 9 + 7 + 6 = 18\,209$.

Exercice 3 – Éternel recommencement

On construit une suite de nombres de la façon suivante : le premier terme est $t_1 = 6$. Si un terme t est pair le suivant est $\frac{t}{2}$ et si un terme t est impair, le suivant est $3t + 1$.
Déterminer le 2 024e terme de cette suite de nombres.

On calcule les premiers termes :
$t_1 = 6, t_2 = \frac{6}{2} = 3, t_3 = 3 \times 3 + 1 = 10, t_4 = 5, t_5 = 16, t_6 = 8, t_7 = 4, t_8 = 2, t_9 = 1, t_{10} = 4, t_{11} = 2, \dots$
Et on comprend que, à partir de t_9, les termes suivants vont se retrouver régulièrement dans le cycle 1, 4, 2.
Comme $2\,024 - 9 = 671 \times 3 + 2$, le 2 024e terme est le même que t_{11} et vaut donc 2.

Exercice 4 – Multiples cachés

Montrer que pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est un multiple de 30.

Pour tout entier naturel n, $N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.
Le produit de deux entiers consécutifs est pair (l'un des deux entiers est pair) c'est-à-dire multiple de 2.
Montrons que le produit $n(n - 1)(n + 1)$ de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 en considérant le reste r de la division euclidienne de n par 3 :

- si $r = 0$ alors il existe un entier k tel que $n = 3k$ c'est-à-dire n est un multiple de 3 donc $n(n - 1)(n + 1)$ est un multiple de 3 ;
- si $r = 1$ alors il existe un entier k tel que $n = 3k + 1$ c'est-à-dire $n - 1 = 3k$ est un multiple de 3 donc le produit $n(n - 1)(n + 1)$ est un multiple de 3 ;
- si $r = 2$ alors il existe un entier k tel que $n = 3k + 2$ c'est-à-dire $n + 1 = 3(k + 1)$ est un multiple de 3 donc $n(n - 1)(n + 1)$ est un multiple de 3.

Comme 2 et 3 n'ont aucun diviseur commun, on en déduit que $n(n - 1)(n + 1)$est un multiple de 6 et donc que N est un multiple de 6.
Montrons maintenant que N est un multiple de 5 en considérant le reste r de la division euclidienne de n par 5. En faisant le même raisonnement que précédemment, si r vaut 0, 1 ou 4 alors, respectivement $n, n - 1$ ou $n + 1$ est multiple de 5. Si $r = 2$ alors il existe un entier k tel que $n = 5k + 2$ donc $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 =$

$5(5k^2+4k+1)$ qui est un multiple de 5 et si $r=3$ alors il existe un entier k tel que $n=5k+3$ donc $n^2+1=25k^2+30k+10=5(5k^2+6k+2)$ qui est un multiple de 5.
Comme 6 et 5 n'ont aucun diviseur commun, on en déduit que N est un multiple de 30

Exercice 5 – Histoire de restes
Montrer que si un entier est somme des carrés de deux entiers naturels, alors son reste dans sa division euclidienne par 4 n'est jamais 3.

Remarque préliminaire : si a est un entier naturel et r le reste de sa division euclidienne par 4 alors il existe un entier k tel que $a=4k+r$ et $0\le r<4$. De plus $a^2=16k^2+8kr+r^2=4(4k^2+2kr)+r^2$ donc les carrés a^2 et r^2 ont le même reste dans leur division euclidienne par 4.
Si on considère un entier naturel b et r' le reste dans sa division euclidienne par 4 alors il existe un entier k' tel que $b=4k'+r'$ et $0\le r'<4$.
On peut rassembler dans un tableau les valeurs prises par $r^2+r'^2$:

$r \quad r'$	0	1	2	3
0	$0+0=0$	$0+1=1$	$0+4=4$	$0+9=9=4\times 2+1$
1	$1+0=1$	$1+1=2$	$1+4=5=4\times 1+1$	$1+9=10=4\times 2+2$
2	$4+0=4$	$4+1=4\times 1+1$	$4+4=8=4\times 2$	$4+9=13=4\times 3+1$
3	$9+0=4\times 2+1$	$9+1=4\times 2+2$	$9+4=13=4\times 3+1$	$9+9=18=4\times 2+2$

On constate que dans aucun cas, le reste de la division euclidienne de $r^2+r'^2$ par 4 est égal à 3. Il en est donc de même pour le reste de la division euclidienne de a^2+b^2 par 4.

Exercice 6 – Multiplications
On considère un entier N dont l'écriture décimale comporte 6 chiffres, le chiffre le plus à gauche étant 1. Quand on multiplie N par 3, les chiffres de N sont conservés ainsi que leur ordre, hormis pour le 1 qui devient chiffre des unités. Déterminer le nombre N.

Le chiffre des unités du produit 1ABCDE×3 est un 1. Donc, le chiffre des unités du produit 3×E doit être un 1.
Donc E doit être un 7.
On a donc : 1ABCD7×3 = ABCD7 1
Lorsqu'on commence à effectuer cette multiplication, on obtient 3×7 = 21 et le 2 représente 2 dizaines (qui devient une retenue de 2 dans la colonne des dizaines).
Pour continuer la multiplication, on fait 3×D+ 2 (dizaines) pour obtenir 7 (dizaines) dans la colonne des dizaines de la réponse. Si on avait fait 3×D, on aurait obtenu 5 (dizaines).
Donc, D doit être un 5. On a donc : 1ABC5 7×3 = ABC5 7 1
Pour continuer la multiplication, on fait 3×C+ 1 (dizaines) pour obtenir un 5 dans la colonne des centaines de la réponse.
Si on avait fait 3×C, on aurait obtenu 4 (centaines).
Donc, C doit être un 8. On sait que 3×8 + 1 = 25 (centaines), ce qui représente 5 centaines et une retenue de 2 dans la colonne des milliers. On a donc :
1AB8 5 7×3 = AB8 5 7 1
Pour continuer la multiplication, on fait 3×B+ 2 (milliers) pour obtenir un 8 dans la colonne des milliers de la réponse.
Si on avait fait 3×B, on aurait obtenu 6 (milliers). Donc, B doit être un 2.
On sait que 3×2 + 2 = 8 (milliers). On a donc : 1A2 8 5 7×3 = A2 8 5 7 1
Pour continuer la multiplication, on fait 3×A (dix milliers) pour obtenir un 2 dans la colonne des dix milliers de la réponse.
Donc, A doit être un 4. On a donc : 1 4 2 8 5 7×3 = 4 2 8 5 7 1
On peut vérifier cette multiplication pour s'assurer qu'elle est bonne.

Exercice 7 – PGCD et PPCM

Déterminer les couples (a, b) de nombres entiers strictement positifs ayant un plus grand diviseur commun égal à 4 et un plus petit commun multiple égal à 4 620.

On décompose 4 et 4 620 en produits de facteurs premiers : $4 = 2^2$ et $4\,620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.
Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs solution du problème.
Comme a et b ont 4 comme PGCD, ils sont tous les deux multiples de 4 et il existe deux entiers m et n tels que $a = 4m$ et $b = 4n$.
De plus, a et b ne peuvent avoir d'autres facteurs premiers en commun sinon ils auraient un PGCD supérieur à 4.
Les entiers m et n sont donc premiers entre eux et leurs facteurs premiers communs doivent être choisis parmi 3, 5, 7 et 11, chacun à la puissance 0 ou 1 et de telle sorte que $4mn = 4\,620$ soit $mn = 1\,155$.
Dans le cas où $a \leq b$ ce qui équivaut à $m \leq n$, on peut rassembler tous les couples solutions dans un tableau :

m	n	a	b	(a, b)
1	$3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1\,155$	4	$4 \times 1\,155 = 4\,620$	$(4{,}4\,620)$
3	$5 \times 7 \times 11 = 385$	$4 \times 3 = 12$	$4 \times 385 = 1\,540$	$(12{,}1\,540)$
5	$3 \times 7 \times 11 = 231$	$4 \times 5 = 20$	$4 \times 231 = 924$	$(20{,}924)$
7	$3 \times 5 \times 11 = 165$	$4 \times 7 = 28$	$4 \times 165 = 660$	$(28{,}660)$
11	$3 \times 5 \times 7 = 105$	$4 \times 11 = 44$	$4 \times 105 = 420$	$(44{,}420)$
$3 \times 5 = 15$	$7 \times 11 = 77$	$4 \times 15 = 60$	$4 \times 77 = 308$	$(60{,}308)$
$3 \times 7 = 21$	$5 \times 11 = 55$	$4 \times 21 = 84$	$4 \times 55 = 220$	$(84{,}220)$
$3 \times 11 = 33$	$5 \times 7 = 35$	$4 \times 33 = 132$	$4 \times 35 = 140$	$(132{,}140)$

Il y a donc au total 16 couples solutions :
$(4{,}4\,620)$, $(12{,}1\,540)$, $(20{,}924)$, $(28{,}660)$, $(44{,}420)$, $(60{,}308)$, $(84{,}220)$, $(132{,}140)$, , $(4\,620{,}4)$, $(1\,540{,}12)$, $(924{,}20)$, $(660{,}28)$, $(420{,}44)$, $(308{,}60)$, $(220{,}84)$, $(140{,}132)$

Équations et inéquations

Exercice 1 – Organiser ses calculs

1. Sachant que x et y sont des nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$. Calculer $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$.

2. Soit a et b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $a^2 + b^2 = 2$. Calculer $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ s'écrit $\frac{x+y}{x} - \frac{x+y}{y} = 1$ soit $1 + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} - 1 = 1$ soit $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 1$.

Alors $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + 4 = 5$.

2. $(a+b)(a^2+b^2) = a^3 + b^3 + ab(a+b)$ donc $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2) - ab(a+b) = 2 - ab$.

Or $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ soit $ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - (a^2+b^2)\right) = -\frac{1}{2}$

d'où $a^3 + b^3 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

D'autre part, $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 2^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$.

Exercice 2 – Système non linéaire

Déterminer les réels x et y vérifiant le système (S) d'équations $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y^3 = 11 - x^2 \end{cases}$.

Le système (S) équivaut au système $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ (x^2-1)^3 = 11 - x^2 \end{cases}$. Après développement, la deuxième équation s'écrit : $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 11 - x^2$ soit $x^6 - 3x^4 + 4x^2 - 12 = 0$ soit $x^4(x^2-3) + 4(x^2-3) = 0$ c'est-à-dire $(x^4+4)\,(x^2-3) = 0$. Comme $x^4 + 4$ n'est toujours strictement positif, les solutions de cette équation sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

En remplaçant dans la première équation du système, on obtient les couples $(-\sqrt{3}, 2)$ et $(\sqrt{3}, 2)$.

Exercice 3

On considère une suite de nombres réels $t_1, t_2, t_3, \ldots$ tels que, pour tout entier naturel non nul k, $t_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.
Déterminer le plus grand entier strictement positif n pour lequel la somme des n premiers termes de la suite est inférieure à 1,499.

On cherche donc le plus petit entier n tel que $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n < 1{,}499$.

On regarde déjà les cas où $n \leq 4$:

$t_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ et $t_1 < 1{,}499$

$t_1 + t_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} \approx 0{,}917$ et $t_1 + t_2 < 1{,}499$

$t_1 + t_2 + t_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{12} + \frac{2}{15} = \frac{21}{20} = 1{,}05$ et $t_1 + t_2 + t_3 < 1{,}499$

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{21}{20} + \frac{1}{12} = \frac{17}{15} \approx 1{,}133$ et $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 < 1{,}499$

De plus, si, pour tout entier $n \geq 5$, on pose $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-1} + t_n$, alors :

$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

Les termes s'annulent deux à deux sauf les deux premiers et les deux derniers d'où

$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1{,}5 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$S_n < 1{,}499$ équivaut donc à $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > 0{,}001$.

Lorsque n augmente, les entiers strictement positifs $n+1$ et $n+2$ augmentent donc $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ diminue.

Lorsque $n = 1\,998$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{1\,999} + \frac{1}{2\,000}$ donc $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2\,000} + \frac{1}{2\,000}$ soit $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > 0{,}001$.

Lorsque $n = 1\,999$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2\,000} + \frac{1}{2\,001}$ donc $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2\,000} + \frac{1}{2\,000}$ soit $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} < 0{,}001$
Le plus grand entier naturel n tel que $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n < 1{,}499$ est donc $n = 1\,998$.

Exercice 4 – Longueur de tunnel

Un camion, supposé rouler à vitesse constante, traverse un tunnel. Le passager mesure le temps écoulé entre l'instant où le camion entre dans le tunnel et celui où il en est complètement sorti. Le lendemain, le même camion est attelé d'une remorque qui porte sa longueur totale de 12 m à 24 m. Il traverse le même tunnel, en réduisant sa vitesse de 20% par rapport à la veille. Le passager constate que le temps écoulé est supérieur de 50% à celui mis la veille.
Quelle est la longueur du tunnel ?

Appelons respectivement t, v, L le temps mis pour franchir le tunnel le premier jour, la vitesse supposée constante du camion le premier jour et la longueur du tunnel. Les données du problème se traduisent par les deux relations :
$\begin{cases} vt = L + 12 \\ 0{,}8v \times 1{,}5t = L + 24 \end{cases}$.
En soustrayant membre à membre, on obtient $0{,}2vt = 12$ soit $vt = 60$ et, en reportant dans la première équation $L = 48$.

Exercice 5 – À vélo

Chaque jour, Carla quitte le lycée à la même heure. Si elle pédale à une vitesse moyenne de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse moyenne de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15.
À quelle vitesse moyenne, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 heures ?

Soit t le temps, en heures, mis par Carla pour parcourir le trajet lycée-maison à la vitesse moyenne de 20 km/h.
Comme, lorsqu'elle roule en moyenne à 10 km/h, Carla met 45 min c'est-à-dire $\frac{3}{4}$ d'heures de plus pour parcourir la même distance d, t est solution de $20t = 10\left(t + \frac{3}{4}\right)$ soit $10t = \frac{15}{2}$ c'est-à-dire $t = \frac{3}{4}$.
On a donc $d = 20 \times \frac{3}{4} = 15$. La distance à parcourir est donc de 15 km.
Pour arriver à 17 heures, soit une demi-heure plus tard qu'en roulant à 20 km/h, la vitesse moyenne de Carla doit donc être
$v = \frac{15}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{5}{4}} = \frac{15\times 4}{5} = 12$. Carla doit donc pédaler à la vitesse moyenne de 12 km/h.

Exercice 6 – Fonctions mystères

On suppose qu'il existe des fonctions f définie sur **R** vérifiant les affirmations suivantes :
(*) Il existe des entiers a, b, c où $a > 0$, tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$;
(**) $f(p) = f(q) = 17$ et $f(p+q) = 47$ où p et q sont des nombres premiers tels que $p < q$.
Déterminer la somme S de toutes les valeurs $f(pq)$ possibles.

S'il existe des entiers a, b, c où $a > 0$, tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors
$f(p) = f(q) = 17$ soit $ap^2 + bp + c = 17 = aq^2 + bq + c$.
On en déduit $a(p^2 - q^2) + b(p - q) = 0$ c'est-à-dire $(p - q)(a(p + q) + b) = 0$
Comme $p < q$, $p - q \neq 0$ donc $a(p + q) + b = 0$.
$f(p + q) = 47$ soit $a(p + q)^2 + b(p + q) + c = 47$ c'est-à-dire $(p + q)(a(p + q) + b) + c = 47$ soit, puisque $a(p + q) + b = 0$, $(p + q) \times 0 + c = 47$ soit $c = 47$.
On en tire $ap^2 + bp + 47 = 17$ soit $p(ap + b) = -30$ et de même $q(aq + b) = -30$.
Comme p et q sont des nombres premiers, ils divisent tous les deux $30 = 2 \times 3 \times 5$. Comme, de plus $p < q$, les seules possibilités sont :
($p = 2$ et $q = 3$) ou ($p = 2$ et $q = 5$) ou ($p = 3$ et $q = 5$).

- Si $p = 2$ et $q = 3$, $p(ap + b) = -30$ s'écrit $2(2a + b) = -30$ soit $2a + b = -15$ et $q(aq + b) = -30$ s'écrit $3(3a + b) = -30$ soit $3a + b = -10$.

Le système $\begin{cases} 2a+b=-15 \\ 3a+b=-10 \end{cases}$ a pour solution le couple $(5,-25)$.

Alors, pour tout réel x, $f(x)=5x^2-25x+47$ et $f(pq)=f(6)=5\times 36-25\times 6+47=77$.

- Si $p=2$ et $q=5$, $p(ap+b)=-30$ s'écrit $2(2a+b)=-30$ soit $2a+b=-15$ et $q(aq+b)=-30$ s'écrit $5(5a+b)=-30$ soit $5a+b=-6$.

  Le système $\begin{cases} 2a+b=-15 \\ 5a+b=-6 \end{cases}$ a pour solution le couple $(3,-21)$.

  Alors, pour tout réel x, $f(x)=3x^2-21x+47$ et $f(pq)=f(10)=3\times 100-21\times 10+47=137$.
- Si $p=3$ et $q=5$, $p(ap+b)=-30$ s'écrit $3(3a+b)=-30$ soit $3a+b=-10$ et $q(aq+b)=-30$ s'écrit $5(5a+b)=-30$ soit $5a+b=-6$.

  Le système $\begin{cases} 3a+b=-10 \\ 5a+b=-6 \end{cases}$ a pour solution le couple $(2,-16)$.

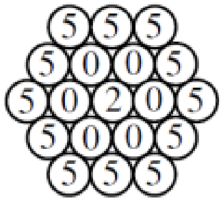
  Alors, pour tout réel x, $f(x)=2x^2-16x+47$ et $f(pq)=f(15)=2\times 225-16\times 15+47=257$.

On en déduit $S=77+137+257=741$.

Dénombrement – probabilités

Exercice 1 – Choisir son chemin

En partant du 2 au centre, on peut former le nombre 2 005 en se déplaçant d'un cercle à un autre si les deux cercles se touchent.
Combien de chemins différents peut-on emprunter pour former le nombre 2 005 ?



En partant du 2, on peut se déplacer vers 6 cercles contenant le chiffres 0.
Chaque cercle contenant le chiffre 0 touche exactement 2 cercles contenant aussi le chiffre 0.
Chaque cercle contenant le chiffre 0 touche exactement 3 cercles contenant le chiffre 5.
Au total, on a donc $6 \times 2 \times 3 = 36$ chemins différents pour former le nombre 2 005.

Exercice 2 – Partage de pommes

Au départ, Alphonse et Katrina avaient le même nombre de pommes. Katrina a donné 12 de ses pommes à Alphonse. Ensuite, Katrina a donné la moitié des pommes qui lui restaient à Alphonse. Alphonse a maintenant quatre fois autant de pommes que Katrina.
Combien de pommes Katrina a-t-elle au final ?

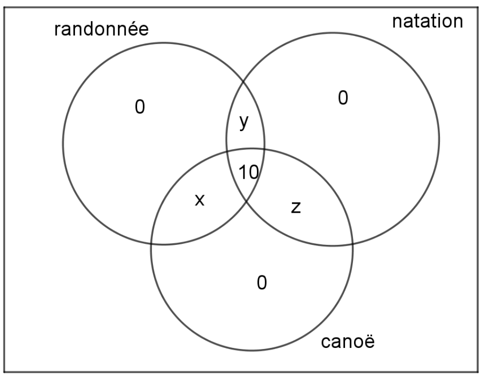
Supposons que Katrina et Alphonse ont chacun n pommes au départ.
Quand Katrina a donné 12 pommes à Alphonse, elle a $n - 12$ pommes et Alphonse en a $n + 12$.
Quand Katrina a donné les $\frac{n-12}{2}$ pommes qui lui restaient à Alphonse, il lui en reste $\frac{n-12}{2}$ soit $\frac{n}{2} - 6$ tandis qu'Alphonse a $n + 12 + \frac{n-12}{2} = \frac{3n}{2} + 6$ pommes.
Puisque Alphonse a alors quatre fois autant de pommes que Katrina ce qui se traduit par $4\left(\frac{n}{2} - 6\right) = \frac{3n}{2} + 6$ soit $\frac{n}{2} = 24 + 6 = 30$ c'est-à-dire $n = 60$.
Au final Katrina a donc $\frac{n-12}{2} = \frac{60-12}{2} = 24$ pommes.

Exercice 3 – Sortie scolaire

Lors d'une sortie scolaire, des activités de plein air randonnée : canoë et natation ont été proposées. Elles ont été pratiquées de la façon suivante :

- 10 élèves ont participé aux trois activités ;
- 50 % des élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë ;
- 60 % des élèves ont participé au moins à la randonnée et à la natation ;
- k % des élèves ont participé au moins au canoë et à la natation ;
- aucun élève n'a participé à moins de deux activités.

Déterminer toutes les valeurs de k qui conviennent.



Le diagramme de Venn ci-contre résume les données si on note x le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et au canoë mais pas à la natation, y le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et à la natation mais pas au canoë et z le nombre d'élèves ayant participé à la natation et au canoë mais pas à la randonnée.
Soit n le nombre d'élèves ayant participé à la sortie scolaire.
50 % des élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë se traduit par $\frac{50}{100}n = x + 10$ soit $x + 10 = \frac{n}{2}$, ce qui entraine que n est un multiple de 2.

De même $y+10=\frac{60}{100}n=\frac{3}{5}n$ ce qui entraine que n est un multiple de 5. L'entier n est donc un multiple de 10.
On a aussi $n=x+y+z+10$ soit $z=n-x-y-10$.
D'autre part $\frac{k}{100}n=z+10$ soit $k=\frac{z+10}{n}\times 100$.
Le tableau ci-dessous donne l'ensemble des solutions (pour lesquelles $x\geq 0$).

n	$x=\frac{n}{2}-10$	$y=\frac{3}{5}n-10$	$z=n-x-y-10$	$k=\frac{z+10}{n}\times 100$
20	0	2	8	$\frac{18}{20}\times 100=90$
30	5	8	7	$\frac{17}{30}\times 100=\frac{170}{3}$
40	10	14	6	$\frac{16}{40}\times 100=40$
50	15	20	5	$\frac{15}{50}\times 100=30$
60	20	26	4	$\frac{14}{60}\times 100=\frac{70}{3}$
70	25	32	3	$\frac{13}{70}\times 100=\frac{130}{7}$
80	30	38	2	$\frac{12}{80}\times 100=15$
90	35	44	1	$\frac{11}{90}\times 100=\frac{110}{9}$
100	40	50	0	$\frac{10}{100}\times 100=10$

Exercice 4 – Tournoi

Carine participe à un tournoi dans lequel aucune partie ne peut se terminer à égalité. Elle continue à jouer des parties jusqu'à ce qu'elle en perde 2, après quoi elle est éliminée et ne joue plus aucune partie.
La probabilité que Carine gagne la première partie est égale à $\frac{1}{2}$. Après avoir gagné une partie, la probabilité que Carine gagne la partie suivante est égale à $\frac{3}{4}$. Après avoir perdu une partie, la probabilité que Carine gagne la partie suivante est égale à $\frac{1}{3}$. La probabilité que Carine gagne 3 parties avant d'être éliminée du tournoi est égale à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$.
Quelle est la valeur de $a+b$?

On cherche la probabilité que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2.
Cela signifie que soit elle gagne 3 parties et en perd 0, soit elle gagne 3 parties et en perd 1. Une fois que Carine a gagné trois parties sans en avoir perdu plus d'une, les victoires ou défaites éventuelles suivantes n'ont pas d'impact sur la probabilité que Carine gagne 3 parties avant d'être éliminée du tournoi.
Si l'on utilise V pour représenter une victoire et D pour représenter une défaite, alors les séquences de victoires et de défaites à considérer sont donc VVV, DVVV, VDVV et VVDV.
La probabilité d'avoir la séquence VVV est $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$.
La probabilité d'avoir la séquence DVVV est $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$.
La probabilité d'avoir la séquence VDVV est $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{32}$.
La probabilité d'avoir la séquence VVDV est $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{32}$.
La probabilité que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2 est donc $\frac{9}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$ et la fraction $\frac{7}{16}$ étant irréductible, on en déduit que $a=7, b=16$ et $a+b=23$.

Exercice 5 – Sommes de chiffres

Pour tout entier naturel non nul n, on note $s(n)$ la somme des chiffres de n (dans l'écriture décimale).

Déterminer le nombre N d'entiers n tels que $100 \leq n \leq 999$ et $7 \leq s(n) \leq 11$.

Si $100 \leq n \leq 999$ alors il existe un entier a (tel que $1 \leq a \leq 9$) et deux entiers b et c (tels que $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$) tels que $n = 100a + 10b + c$. On a alors $s(n) = a + b + c$ et on veut $7 \leq a + b + c \leq 11$.

- Déterminons déjà le nombre d'entiers convenant lorsque $s(n) = 7$. Dans ce cas, $1 \leq a \leq 7$.

Si $a = 1$, alors $b + c = 6$ donne 7 couples solutions : $(0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 5$ donne 6 couples solutions : $(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)$.
De même si a vaut respectivement 3, 4, 5, 6, 7 il y a alors respectivement 5, 4, 3, 2, 1 couples solutions.
Donc si $s(n) = 7$, il y a $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ couples (b, c) soit 28 triplets (a, b, c) solutions.

- On raisonne de même pour :

$s(n) = 8$ où il y a $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ couples (b, c) soit 36 triplets (a, b, c) solutions.
$s(n) = 9$ où il y a $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ couples (b, c) soit 45 triplets (a, b, c) solutions.

- Pour $s(n) = 10$:

Si $a = 1$, alors $b + c = 9$ donne 10 couples solutions : $(0,9), (1,8), \dots, (9,0)$
Si $a = 2$, alors $b + c = 8$ donne 9 couples solutions : $(0,8), (1,7), \dots, (8,0)$
Le même raisonnement pour a valant respectivement 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 donne respectivement 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 couples solutions soit au total $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54$ couples (b, c) soit 54 triplets (a, b, c) solutions.

- Pour $s(n) = 11$:

Si $a = 1$, alors $b + c = 10$ donne 9 couples solutions : $(1,9), (2,8), \dots, (9,1)$
Si $a = 2$, alors $b + c = 9$ donne 10 couples solutions : $(0,9), (1,8), \dots, (9,0)$
Si $a = 3$, alors $b + c = 8$ donne 9 couples solutions : $(0,8), (1,7), \dots, (8,0)$
Le même raisonnement pour a valant respectivement 4, 5, 6, 7, 8, 9 donne respectivement 8, 7, 6, 5, 4, 3 couples solutions soit au total $9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 61$ couples (b, c) soit 61 triplets (a, b, c) solutions.
Au final, $S = 28 + 36 + 45 + 54 + 61 = 224$.

Exercice 6 – Nombre d'échanges

Six amis échangent des livres dans leur club de lecture. Chaque ami a un livre qu'il donne à un ami et reçoit un livre d'un autre ami (aucune paire d'amis n'échangent leur livre l'un avec l'autre).
Combien y a-t-il de façons d'échanger les livres ?

Supposons que A donne à B, alors B ne peut donner à A. Supposons que B donne à C, alors C ne peut donner à B. Il a deux possibilités : où C donne à A ou à l'un des amis D, E, ou F.
1^er^ choix : A donne à B qui donne à C qui donne à A. On notera cette suite d'échanges (A, B, C).
Alors D donne à E (ou F). Supposons que D donne à E, alors E ne peut donner de livre ni à A, B, C, qui en ont déjà reçu un, ni à D (contrainte de l'énoncé). Donc E donne à F et F donne à D ;
La série d'échanges ainsi effectuée se notera : (A, B, C) (D, E, F).
2^e^ choix : Supposons que A donne à B qui donne à C qui donne à D qui donne à A. Alors E et F doivent nécessairement échanger leurs livres, ce qui est contraire aux hypothèses. On a donc : A donne à B qui donne à C qui donne à D qui donne à E (ou F) qui donne à F (ou E) qui donne à A, série d'échanges que nous notons (A, B, C, D, E, F) ou (A, B, C, D, F, E).
IL y a donc deux types d'échanges : (A, B, C) (D, E, F) Type I ou (A, B, C, D, E, F) Type II.
Le premier est composé de deux cycles de trois personnes et le deuxième d'un seul cycle de six personnes.
Dénombrons tous les échanges possibles.
Échanges de type I : Il y a 6 choix possibles pour le premier, 5 pour le deuxième et 4 pour le troisième soit $6 \times 5 \times 4 = 120$ façons d'écrire une suite de trois lettres distinctes telle que (A, B, C). Or la position d'une personne dans un cycle n'importe pas. En effet l'échange (A, B, C) est le même que (B, C, A) et (C, A, B). On dénombre donc $\frac{6 \times 5 \times 4}{3} = 40$ façons de composer le premier cycle et il reste $\frac{3 \times 2 \times 1}{3} = 2$ façons de composer le deuxième cycle.
Mais l'échange (D, E, F) (A, B, C) est identique à l'échange (A, B, C) (D, E, F). On en déduit que le nombres d'échanges de type I est égal à $\frac{40 \times 2}{2} = 40$.

Échanges de type II : Il y a 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 720 façons de composer une suite de six lettres distinctes telle que (A, B, C, D, E, F). Mais il y a également six façons de décrire un même cycle (en effet, (A, B, C, D, E, F) est le même que (B, C, D, E, F, A) ou que (C, D, E, F, A, B) etc). Le nombre de cycles de type II est donc $\frac{720}{6} = 120$.
Au total, le nombre d’échanges possibles est donc : 40 + 120 = 160.