



Lycée Camille Pissarro  
Pontoise



Lycée La Bruyère Versailles

« *Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir* » **Henri POINCARÉ, *La science et l'hypothèse* (1908)**  
 « *La philosophie anti-intellectualiste, en récusant l'analyse et « le discours », se condamne par cela même à être intransmissible* » **Henri POINCARÉ, *La valeur de la science* (1905)**

## Stage ouvert aux élèves de terminale présentés au Concours général des lycées – 25 et 26 février 2019

« La vérité n'est pas pour le *philosophe* une maîtresse qui corrompt son imagination, et qu'il croie trouver partout ; il se contente de la pouvoir démêler où il peut l'apercevoir. Il ne la confond point avec la vraisemblance ; il prend pour vrai ce qui est vrai, pour faux ce qui est faux, pour douteux ce qui est douteux, et pour vraisemblable ce qui n'est que vraisemblable. Il fait plus, et c'est ici une grande perfection du *philosophe*, c'est que lorsqu'il n'a point de motif propre pour juger, il sait demeurer indéterminé. »

Extrait de l'article « PHILOSOPHE » de l'Encyclopédie (article écrit par César Chesneau Dumarsais)

La Pédagogie académique de mathématiques organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pédagogie s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : cette année, l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Hoche et le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée de la Vallée de Chevreuse à Gif-sur-Yvette. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, ce qui est nécessairement le cas pour le stage réservé aux candidats désignés pour le Concours général.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (insp. Honoraire), Vincent PANTALONI, Jean-François REMETTER, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL.

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY) Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Olivier DU PONT DE ROMEMONT (Lycée Hoche, VERSAILLES), François-Xavier DUTHOIT (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet le Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE)

**Professeurs accompagnants :** Frédéric ALLIOT (Lycée Gustave Monod, ENGHEN LES BAINS), Isabelle STRAEBLER (Lycée Gustave Monod, ENGHEN LES BAINS), Monique TALEB (Lycée Hoche, VERSAILLES), Mimoun ZERYOUH (Lycée Marie Curie, SCEAUX).

**Julia ROBINSON (1919 – 1985)**

Première femme mathématicienne membre de la  
National Academy of Science (États-Unis 1975).

Première femme Présidente de l'American  
Mathematical Society (1983)



## Emploi du temps

**Lundi 25 février 2019**

Hor. P.	Pontoise	Versailles 1	Versailles 2	Versailles 3	Versailles 4	Hor. V.
10	Film « Savant mélange »	Équations polynômiales (PM)				10
10.20	Équations RC	Nombres, arithmétique OdR+CD	Probabilités, dénombrement, algorithmique MA+SM	Angles, distances, alignement, concours HC+FXD	Probabilités, dénombrement	10.45
12.10		Repas				12.20
13	Aires et volumes KR	Films de la série « 5 minutes Lebesgue »				13.10
14.35	Films « 5 minutes Lebesgue »	Angles, distances, alignement, concours HC+FXD	Nombres, arithmétique OdR+CD	Probabilités, dénombrement, algorithmique MA+SM	Logique, graphes	13.55
15.20	Angles et distances CH	Probabilités, dénombrement, algorithmique MA+SM	Angles, distances, alignement, concours HC+FXD	Nombres, arithmétique OdR+CD	Équations	15.25

**Mardi 26 février 2019**

Hor. P.	Pontoise	Versailles 1	Versailles 2	Versailles 3	Versailles 4	Hor. V.
10	Équations polynômiales PM	Film « Savant mélange »				10
10.50	Probabilités Dénombrement BB	Suites et fonctions FR+FXD	Aires et volumes CD	Équations SM+HC	Suites et fonctions	10.45
12.30		Repas				12.30
13.30	Nombres CH+BB	Équations SM+HC	Suites et fonctions FR+FXD	Aires et volumes CD	Suites et fonctions	13.30
15.15	Suites et fonctions JM	Aires et volumes CD	Équations SM+HC	Suites et fonctions FR+FXD	Suites et fonctions	15.15

## Thème : Nombres et arithmétique

### Exercice 1 Les amis de mes amis...

Pour tout ensemble  $\mathcal{R}$  d'entiers naturels, on appelle *ami de  $\mathcal{R}$*  l'ensemble noté  $\mathcal{A}(\mathcal{R})$  des entiers naturels multiples d'au moins un élément de  $\mathcal{R}$ .

Un ensemble  $\mathcal{G}$  est appelé *hostile* si aucun élément de  $\mathcal{G}$  n'est multiple d'un autre élément de  $\mathcal{G}$ .

Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  des ensembles *hostiles*. On suppose que  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{S}_2)$ . Montrer que  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ .

Supposons  $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$ . Il existe alors un plus petit entier naturel appartenant à un des deux ensembles et pas à l'autre. Appelons  $n$  ce plus petit élément et supposons qu'il appartient à  $\mathcal{S}_1$  et pas à  $\mathcal{S}_2$ . Comme il appartient à  $\mathcal{S}_1$ , il appartient aussi à  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$  et donc à  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_2)$ . Il est donc multiple d'un élément de  $\mathcal{S}_2$ , que nous appelons  $d$ .  $d$  étant plus petit que  $n$  et appartenant à  $\mathcal{S}_2$ , il appartient aussi à  $\mathcal{S}_1$  (car  $n$  est le plus petit entier qui appartient à l'un des deux sans appartenir à l'autre). Mais alors,  $\mathcal{S}_1$  contient  $d$  et  $n$ , dont l'un est multiple de l'autre, ce qui contredit le fait que  $\mathcal{S}_1$  est *hostile*.

### Exercice 2 Quoi de 9 ?

On considère un entier naturel  $n$  et le nombre  $a = 9 \times 99 \times 9\,999 \times \dots \times 9999 \dots 999$ . Il faut lire cette écriture de  $a$  comme un produit de facteurs dont chacun ne s'écrit qu'avec des 9, dont le nombre double à chaque nouveau facteur jusqu'à atteindre  $2^n$  pour le dernier.

Quelle est la somme des chiffres de  $a$  ?

Considérons le nombre  $b = 9 \times 99 \times 9\,999 \times \dots \times 9999 \dots 999$ . Ce nombre a comme dernier facteur le nombre s'écrivant avec une suite de  $2^{n-1}$  chiffres 9. Il est donc inférieur à  $10 \times 100 \times \dots \times 10^{2^{n-1}}$ , c'est-à-dire à  $10^{2^n-1}$ .

Comme  $a = 999 \dots 999 \times b$ , on peut écrire  $a = 10^{2^n} b - b$ . On pose la soustraction, en appelant  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2^n-3}, b_{2^n-2}$  les chiffres de  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2^{n+1}-3}, a_{2^{n+1}-2}$  ceux de  $a$ . Cette soustraction est présentée dans le tableau suivant :

$2^{n+1}-2$	$2^{n+1}-3$	...	$2^n+2$	$2^n+1$	$2^n$	$2^n-1$	$2^n-2$	...	2	1	0	$k$
$b_{2^n-2}$	$b_{2^n-3}$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0$	0	0	...	0	0	0	$10^{2^n} b$
0	0	...	0	0	0	0	$b_{2^n-2}$		$b_2$	$b_1$	$b_0$	$b$
$b_{2^n-2}$	$b_{2^n-3}$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0-1$	9	$9-b_{2^n-2}$		$9-b_2$	$9-b_1$	$10-b_0$	$a$

$b_0 \neq 0$  car  $b$  est le produit de nombres congrus à  $-1[10]$ . Dans les colonnes de droite, le chiffre du résultat est le complément à 10 (pour la colonne la plus à droite) ou le complément à 9 (pour les suivantes) du chiffre correspondant de la deuxième ligne pour  $k \leq 2^n - 1$ . Il y a une retenue pour  $k = 2^n$  :  $a_{2^n} = b_0 - 1$ . Les chiffres suivants sont ceux de la première ligne. Au bilan on a :

$$\sum_{k=0}^{2^{n+1}-2} a_k = 10 - b_0 + \sum_{k=1}^{2^n-2} (9 - b_k) + 9 + b_0 - 1 + \sum_{k=1}^{2^n-2} b_k = 9 \times 2^n$$

### Exercice 3 Ostracisme

Montrer que, pour tout entier  $n$ , le nombre  $4n^2 + 1$  ne possède, comme diviseurs, que des nombres congrus à 1 modulo 4.

Soit  $E$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $4n^2 + 1$  possède un diviseur congru à  $-1$  modulo 4. Si  $E$  est non vide, alors il possède un plus petit élément appelé  $q$ .  $4q^2 + 1$  possède donc un diviseur congru à  $-1$  modulo 4, que nous appelons  $r$ . Il existe donc un entier  $s$  tel que  $4q^2 + 1 = r \times s$ . Selon notre hypothèse,  $r$  est congru à  $-1$  modulo 4, et donc  $s$  aussi. On peut supposer sans perte de généralité que  $r \leq s$ . Si  $r = s$  alors  $4q^2 + 1 = r^2$  conduit à  $4q^2 = (r-1)(r+1) = 2k(2k+2)$  en posant  $r = 2k+1$ , donc  $q^2 = k(k+1) \Leftrightarrow (q-k)(q+k) = k$  mais cette dernière n'est possible que pour  $k = 0$  donc  $q = 0$  et  $r = 1$ , exclu car non congru à  $-1$  modulo 4.  $r < s$  conduit à  $4q^2 + 1 > r^2$ . Donc  $r < 2q < s$  et comme  $4(q-r)^2 + 1 = 4q^2 + 1 + 4r(r-2q)$ , ce nombre est divisible par  $r$  et  $|q-r| < q$  et  $|q-r|$  est donc inférieur au plus petit élément de  $E$ . Contradiction.

#### Exercice 4 Partage

À tout entier naturel *pair*  $n$ , on associe l'ensemble  $N$  des entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n^2$ , qu'on partage en deux parties A et B de même effectif. Y a-t-il des entiers  $n$  (et, partant, des sous-ensembles A et B) pour lesquels la somme  $S_A$  des éléments de A et la somme  $S_B$  des éléments de B

1. Soient égales ? 2. Vérifient l'égalité  $\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}$  ?

1. La somme des entiers compris entre 1 et  $n^2$  est  $S = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ . Il y a  $\frac{n^2}{2}$  couples d'éléments de  $N$  de même somme  $n^2 + 1$  :  $(n^2, 1), (n^2 - 1, 2), \dots, (\frac{n^2}{2} + 1, \frac{n^2}{2})$ .  $\frac{n^2}{2}$  est un nombre pair, car  $n$  est pair. On peut mettre dans A les nombres qui figurent dans la moitié de ces couples, et dans B les autres. Les sommes des éléments de A et de B sont alors identiques.

2. La relation de proportionnalité prise pour hypothèse invite à considérer l'entier  $k$  tel que  $S_A = 39k$  et  $S_B = 64k$ . Il s'ensuit que  $\frac{n^2(n^2+1)}{2} = 103k$ . 103 étant un nombre premier, il divise le nombre figurant au premier membre de l'égalité, donc c'est un diviseur de  $n$  ou de  $n^2 + 1$ . Mais voir exercice 3, comme  $n$  est pair,  $n^2 + 1$  n'a de diviseurs premiers que congrus à 1 modulo 4. Le résultat est donc que 206 est un diviseur de  $n$ .

Reste à voir s'il existe effectivement des exemples d'un tel partage.

Si  $n$  est un multiple de 206, on écrit  $\frac{n^2(n^2+1)}{2} = 103k$ . On a alors  $39k > \frac{103k}{4} = \frac{n^2(n^2+1)}{8}$  et  $39k < \frac{103k}{2} = \frac{n^2(n^2+1)}{4}$ .

Il est alors possible de choisir le multiple de 39 compris entre le quart et la moitié de la somme des éléments de  $N$ .

#### Exercice 5 Des nombres qui montent...

Dans cet exercice, les nombres considérés sont entiers et écrits dans le système décimal. Un nombre est dit *grim pant* si la suite des chiffres qui servent à l'écrire, de gauche à droite est croissante. Par exemple, les nombres s'écrivant avec un seul chiffre sont *grim pants*, 2 355 est *grim pant*, 8 910 ne l'est pas.

À tout entier  $n$ , on associe le nombre  $f(n)$ , plus petit entier tel que le nombre  $n + f(n)$  soit *grim pant*. Par exemple,  $f(6) = 0, f(31) = 2, f(4\ 276) = 168$ .

Calculer  $N = f(1) - f(2) + f(3) - \dots - f(10^{2\ 019} - 2) + f(10^{2\ 019} - 1)$

Comme dit plus haut, les premiers termes de cette somme sont nuls, il est plus intéressant de calculer :

$$-N = (f(2) - f(3)) + (f(4) - f(5)) + \dots + (f(10^{2\ 019} - 2) - f(10^{2\ 019} - 1)).$$

En effet, le calcul de  $f(2n) - f(2n + 1)$  s'effectue de la manière suivante :

- Si  $2n$  est *grim pant*,  $f(2n) = 0$  et comme le chiffre des unités de  $2n$  n'est pas 9 (car  $2n$  est pair),  $2n + 1$  est aussi *grim pant* et  $f(2n + 1) = 0$  aussi. Leur différence est nulle.

- Si  $2n$  n'est pas *grim pant*, ou bien le plus petit nombre *grim pant* qui le suit est  $2n + 1$ , dans ce cas la différence  $f(2n) - f(2n + 1) = 1$ , ou bien c'est un nombre plus grand que  $2n + 1$  et dans ce cas c'est le même que pour  $2n + 1$ , et la différence entre  $f(2n)$  et  $f(2n + 1)$  est encore 1. La somme  $-N$  est donc une somme de 1 et de 0. Le nombre de 1 à additionner est le nombre de nombres *pairs* et *non grim pants* compris entre 2 et  $10^{2\ 019} - 2$ .

Nous allons déterminer le nombre d'entiers *pairs grim pants* compris entre 2 et  $10^{2\ 019} - 2$ . Nous les classons d'après leur chiffre des unités :

- ce ne peut être 0, le seul *grim pant* dont le chiffre des unités est 0 est 0 (on commence à 2).

- si c'est 2, il faut répartir 2019 chiffres en un certain nombre de 0 (les 0 « inutiles » doivent être utilisés pour ce décompte) suivis d'un certain nombre de 1 puis d'un certain nombre de 2 : la question revient donc à savoir à quels niveaux on place les deux « coupures » : le premier 1, le premier 2. Deux parmi...  $2\ 020$  (car la première coupure peut arriver sans qu'il y ait le moindre 0). L'effectif de tels nombres est donc  $\binom{2\ 020}{2}$ .

- si c'est 4, ce sont le premier 1, le premier 2, le premier 3 et le premier 4 qui nous intéressent : l'effectif de tels nombres est  $\binom{2\ 022}{4}$ .

- on trouve ainsi  $\binom{2\ 024}{6}$  et  $\binom{2\ 026}{8}$

Le nombre d'entiers *pairs grim pants* entre 2 et  $10^{2\ 019} - 2$  est donc  $\binom{2\ 020}{2} + \binom{2\ 022}{4} + \binom{2\ 024}{6} + \binom{2\ 026}{8}$

C'est la différence entre le nombre total d'entiers pairs compris entre 2 et  $10^{2\ 019} - 2$  et cet effectif qui nous intéresse.

## Thème : Probabilités, dénombrement, algorithmes

### Exercice 1 Le ballet des ascenseurs

Dans un immeuble de bureaux, il y a 7 ascenseurs. Chacun de ces ascenseurs ne dessert que 6 étages mais, si on se donne deux étages quelconques, il y a un ascenseur permettant de passer de l'un à l'autre. Montrer que l'immeuble possède moins de 15 étages et qu'il est possible avec de telles contraintes de desservir un immeuble de 14 étages.

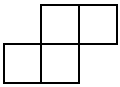
étages	1	2	3	4	5	6	7
14		x		x	x		
13		x		x	x		
12		x	x				x
11		x	x				x
10	x			x			x
9	x			x			x
8	x		x				x
7	x		x				x
6	x					x	x
5	x					x	x
4	x		x	x			
3	x		x	x			
2	x	x	x				
1	x	x	x				
	1	2	3	4	5	6	7

Ci-contre, une distribution possible avec 14 étages (il y a deux doublons, étages reliés par plusieurs ascenseurs, que nous avons placés sur les premiers étages). Suivant l'énoncé, nous avons numéroté les niveaux plutôt que les étages (il n'y a pas d'étage 0...)

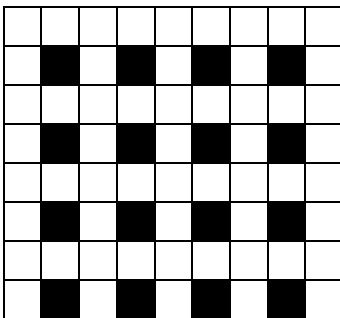
Nous nous intéressons au nombre de paires d'étages reliées par ces ascenseurs. Un ascenseur desservant 6 étages relie donc  $\binom{6}{2}$  paires d'étages. Comme il y a 7 ascenseurs, ce sont  $7 \times \binom{6}{2}$  paires d'étages qui sont reliées directement, soit 105. Dans un immeuble de  $n$  étages, il y a  $\binom{n}{2}$  paires d'étages. Si nous voulons qu'elles soient toutes directement reliées, il est nécessaire que  $105 \geq \frac{n(n-1)}{2}$ , ce qui, pour  $n$  entier positif, donne  $n \leq 15$ .

Dans le cas d'un immeuble de 15 étages, comme l'inégalité précédente est une égalité, cela veut dire que chaque paire d'étages est reliée exactement une fois. Mais alors, si deux ascenseurs s'arrêtent au 15<sup>ème</sup> étage, chacun des deux dessert 5 autres étages et le compte n'y est pas, il y a des étages non reliés directement au 15<sup>ème</sup> étage. Si trois ascenseurs s'arrêtent au 15<sup>ème</sup> étage, 15 autres étages sont desservis, c'est un de trop. 15 étages est impossible.

### Exercice 2 Tétrominos penchés (S-tétrominos ou Z-tétrominos)

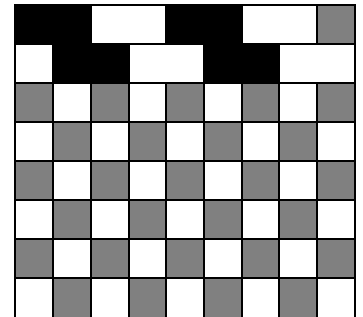


Les tétrominos penchés sont des assemblages de quatre carrés identiques, comme celui représenté à gauche ; on peut les tourner (de 90°) ou les retourner. On considère un plateau de forme rectangulaire découpé en 8 x 9 cases identiques à celles qui forment les tétrominos. Montrer qu'on peut placer 16 Tétrominos sur ce plateau et pas davantage.



Figurons le plateau comme un damier. On peut placer 4 tétrominos sur les deux premières lignes (on en a figuré 2 en noir et 2 en blanc). Sur les huit lignes, cela en fait donc 16.

Si on colorie en noir les cases se trouvant à la fois sur une ligne paire et une colonne paire, on obtient la figure de gauche. Aucun tétrmino posé sur le plateau ne peut éviter toutes les cases noires, et aucun ne peut recouvrir plus d'une case noire. Il y a 16 cases noires, donc il y a au maximum 16 tétrominos.



### Exercice 3 Perturbations d'une permutation

Une permutation du  $n$ -uplet  $(1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n)$  est un  $n$ -uplet  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$  dans lequel les  $a_i$  prennent les  $n$  valeurs distinctes  $1, 2, 3, \dots, n$ . On appelle *perturbation* d'une telle permutation le nombre de couples d'indices  $(i, j)$  pour lesquels  $1 \leq i < j \leq n$  et  $a_j < a_i$ .

Montrer que, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $\binom{n}{2}$ , il existe une permutation du  $n$ -uplet  $(1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n)$  ayant exactement  $k$  perturbations.

Pour  $n = 1$ , le seul  $k$  envisageable est 0, la seule permutation est l'identité, pas de perturbation.

Supposons que pour  $n \geq 2$ , et sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $\binom{n-1}{2}$ , il existe une permutation  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$  ayant  $k$  perturbations et intéressons-nous aux  $n$ -uplets.

Considérons un entier  $k$  inférieur ou égal à  $\binom{n-1}{2}$ . Il existe une permutation  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$  de  $(1, 2, 3, \dots, n-1)$  ayant  $k$  perturbations. Cette permutation est « étendue » à  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, n)$ , qui a le même nombre de perturbations,  $k$ .

Considérons à présent un entier  $k$  compris entre  $\binom{n-1}{2} + 1$  et  $\binom{n}{2}$ . Il y a  $n - 2$  valeurs possibles, toutes supérieures à  $n - 1$ . Considérons les permutations de  $(1, 2, 3, \dots, n - 1)$  possédant  $k - (n - 1)$  perturbations. Soit  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$  une d'entre elles. La permutation  $(n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$  en possède alors  $k$ , puisque  $n$  est impliqué dans  $n - 1$  perturbations...

Le raisonnement par récurrence est achevé.

#### Exercice 4 Un alphabet, des mots

On appelle *mot de longueur  $n$*  toute suite de  $n$  lettres prises dans un alphabet. Par exemple, avec l'alphabet  $\{A, B, C, D, R\}$  on peut former le *mot de longueur 11* : ABRACADABRA. Une *syllabe* est une suite de lettres apparaissant dans un *mot*. Par exemple, la *syllabe* BRA apparaît deux fois dans ABRACADABRA.

1. Quels sont les *mots de 4 lettres* qu'on peut former avec l'alphabet  $\{R, O, C\}$  dont OR et RO sont des *syllabes* ?

2. Quels sont les *mots de 7 lettres* qu'on peut former avec l'alphabet  $\{C, R, O\}$  dont CC est une *syllabe* ?

3. On appelle  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{N}$  de la façon suivante :

$f(n)$  est le nombre de *mots de  $n$  lettres* prises dans l'alphabet  $\{R, O, C\}$  vérifiant les deux conditions

(1) CC est une *syllabe*

(2) Si OR est une *syllabe* ou si RO est une *syllabe* alors CC est une *syllabe* située plus à gauche dans le mot (par exemple CCOR, OCRCCRO conviennent COR, ROCC ne conviennent pas)

Montrer que  $f(2\ 097)$  est un multiple de 97.

1. Les syllabes RO et OR doivent apparaître. Elles peuvent être séparées (les seuls mots possibles sont alors ORRO et ROOR) ou enchevêtrées. On compte donc les mots de 4 lettres où apparaissent ORO ou ROR :

RORO, OORO, CORO, OROR, OROO et OROC contiennent ORO,

RROR, OROR, CROR, RORR, RORO et RORC contiennent ROR

Il y a deux doublons (soulignés). Au total, 12 mots conviennent.

2. Il y a  $3^7 = 2\ 187$  mots de 7 lettres fabriqués avec les trois lettres distinctes R, O et C. Nous comptons les mots de 7 lettres qui ne contiennent pas deux « C » consécutifs. Un mot de 7 lettres qui ne contient pas deux « C » consécutifs peut faire apparaître 0, 1, 2, 3, ou 4 « C ».

a. Mots contenant 4 « C » : il reste trois trous à combler avec O ou R, total  $2^3 = 8$  mots ;

C		C		C		C
---	--	---	--	---	--	---

b. Mots contenant 3 « C » : il faut placer un trou de trois places voisines et un trou d'une place, ou deux trous de deux places, ou un trou de deux places et deux trous d'une place ou trois trous d'une place ; cela fait 10 possibilités et, pour chacune,  $2^4$  modalités d'occupation des autres. Total  $10 \times 2^4 = 160$  mots.

C				C		C
C		C				C
C			C			C
		C		C		C
C			C		C	
	C			C		C
C		C			C	
	C		C			C
C		C		C		
	C		C		C	

c. Mots contenant 2 « C » : on compte les couples  $(i, j)$  d'entiers compris entre 1 et 7 tels que  $i + 1 < j$ . Il y en a 15. Pour chacun,  $2^5$  modalités d'occupation des places libres. Au total  $15 \times 2^5 = 480$  mots

d. Mots contenant un seul « C » : il y a 7 manières de le placer, et pour chacune  $2^6$  modalités d'occupation des autres places. Total  $7 \times 2^6 = 448$  mots.

e. Mots ne contenant pas de « C » : il y en a  $2^7 = 128$

Total des mots à exclure :  $128 + 448 + 480 + 160 + 8 = 1\ 224$ .

Total des mots admissibles :  $2\ 187 - 1\ 224 = 963$ .

3. Si un mot de 2 097 lettres contient la syllabe CC, le premier des deux « C » occupe la place  $k$  ( $k$  est un entier compris entre 1 et 2 096). Le deuxième « C » est à la place  $k + 1$  ; de la place  $k + 2$  à la place 2 097, tout est possible (la condition posée dans l'énoncé est une condition nécessaire). Avant cette syllabe CC, on ne doit trouver ni RO ni OR ni CC : la lettre occupant la place  $k - 1$  (si  $k \geq 1$ ) ne peut pas être un C, mais peut être R ou O. En revanche, à la gauche de R, O est exclu, à la gauche de O, R est exclu, à la gauche de C, C est exclu. Il y a donc exactement 2 modalités possibles pour chacune des place de numéro inférieur à  $k$ .

Totalisation :

$$f(2\ 097) = 2^0 \times 3^{2\ 095} + 2^1 \times 3^{2\ 094} + 2^2 \times 3^{2\ 093} + \dots + 2^{2\ 094} \times 3^1 + 2^{2\ 095} \times 3^0$$

Cette somme vaut exactement  $3^{2\ 096} - 2^{2\ 096}$ , puisque  $3 - 2 = 1$  pour la factorisation de  $3^n - 2^n$ .

On peut (on doit...) remarquer que  $97 = 3^4 + 2^4$  et que  $2\ 096 = 8 \times 262$  pour écrire que :

$3^{2\ 096} - 2^{2\ 096} = (3^8)^{262} - (2^8)^{262}$ , mettre en facteur  $3^8 - 2^8 = (3^8 + 2^8)(3^8 - 2^8)$  et conclure. Pas mal.



**Exercice 5 Le problème du collectionneur**

Dans des emballages de « chocolats », on peut trouver des vignettes à collectionner (ce sont plus souvent des portraits de footballeurs que des biographies de mathématiciens). On suppose que la répartition des vignettes dans les emballages est uniforme : à chaque produit acheté, la probabilité d’obtenir toute vignette est la même. Le problème du collectionneur est le suivant : si la collection compte  $n$  vignettes, combien de paquets de chocolats doit-il acheter pour espérer constituer la collection complète ?

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de vignettes collectées pour posséder la collection complète des  $n$  vignettes. On considère que cette variable est la somme de  $n$  variables  $X_k$ , chacune de ces variables prenant pour valeur le nombre de vignettes achetées pour faire passer l’état de la collection de  $k - 1$  à  $k$ .

1. Quelles sont les valeurs que la variable  $X_k$  peut prendre ? Avec quelles probabilités ?
2. Quelle est l’espérance mathématique de  $X_k$  ?
3. Exprimer l’espérance mathématique de  $X$  en fonction de  $n$  ?

1. La variable  $X_k$  prend des valeurs entières (a priori non bornées). Si on appelle  $p_k$  la probabilité de tirer d’un emballage une vignette qu’on n’a pas encore alors qu’on en possède  $k - 1$ , on a  $p_k = \frac{n-(k-1)}{n}$ . Si on appelle  $q_k$  la probabilité d’être déçu,

l’espérance mathématique de  $X_k$  s’exprime ainsi :  $E(X_k) = p_k + 2q_k p_k + 3q_k^2 p_k + 4q_k^3 p_k + \dots$  Cette somme comporte a priori une infinité de termes (mais ce n’est pas vrai, il n’y a qu’un nombre fini de vignettes en circulation).

Passage délicat : considérons la fonction  $f$  qui à  $x$  associe  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + mx^{m-1}$ .

On peut la considérer comme fonction dérivée de  $g$  définie par  $g(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^m$ .

Cette fonction est la somme de la suite géométrique de premier terme  $x$  et de raison  $x$ .

On a donc  $g(x) = x \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ . En dérivant, on trouve  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + mx^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + x^{m+1} h(x)$  et ... on admet que

l’espérance de  $X_k$  est  $\frac{p_k}{(1-q_k)^2} = \frac{1}{p_k} = \frac{n}{n-(k-1)}$

3. La somme de ces espérances est l’espérance de  $X$ ,  $E(X) = n \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right)$

1	1	1	1
2	0,5	1,5	3
3	0,33333333	1,83333333	5,5
4	0,25	2,08333333	8,33333333
5	0,2	2,28333333	11,41666667
6	0,16666667	2,45	14,7
7	0,14285714	2,59285714	18,15
8	0,125	2,71785714	21,7428571
9	0,11111111	2,82896825	25,4607143
10	0,1	2,92896825	29,2896825
11	0,09090909	3,01987734	33,2186508
12	0,08333333	3,10321068	37,2385281
13	0,07692308	3,18013376	41,3417388
14	0,07142857	3,25156233	45,5218726
15	0,06666667	3,31822899	49,7734349
16	0,0625	3,38072899	54,0916639
17	0,05882353	3,43955252	58,4723929
18	0,05555556	3,49510808	62,9119454
19	0,05263158	3,54773966	67,4070535
20	0,05	3,59773966	71,9547931

Le tableau ci-dessus montre les valeurs obtenues pour l’espérance pour les entiers inférieurs ou égaux à 20. Il faut dès que  $n > 10$  acheter plus de trois fois le nombre de vignettes que comporte la collection en « chocolats ». Les ennuis de santé guettent.

## Thème : Équations

### Exercice 1 Équation du troisième degré

Quelles sont les valeurs du nombre  $n$  pour lesquelles l'équation  $x^3 - 3x = n$  ne possède que des solutions entières ?

Appelons  $a, b, c$  les solutions de l'équation. On peut identifier  $(x - a)(x - b)(x - c)$  et  $x^3 - 3x - n$ . On obtient les conditions :  $abc = n, ab + bc + ca = -3$  et  $a + b + c = 0$ .

Comme  $0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ , on en déduit que  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ .

Les valeurs de  $a, b, c$  sont donc à prendre parmi  $\{-2, -1, 1, 2\}$

Si 2 est une des solutions, alors  $n$  vaut 2 et les deux autres solutions valent  $-1$ .

Si  $-2$  est une des solutions, alors  $n$  vaut  $-2$  et les deux autres solutions valent 1.

### Exercice 2 Triplet inconnu

Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels il existe des nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que :

$$p(p + 1) + q(q + 1) = n(n + 1)$$

Commençons par essayer de factoriser : l'égalité ci-dessus peut s'écrire  $p(p + 1) = (n - q)(n + q + 1)$ , d'où il ressort que  $p$  divise le produit  $(n - q)(n + q + 1)$ , donc au moins l'un des facteurs.

Si  $p$  divise  $n - q$  alors  $p < n$  et  $p + 1 < n + q + 1$ . L'égalité n'est pas possible. Donc, s'il y a des solutions, elles sont telles que  $p$  est un diviseur de  $n + q + 1$ .

Ce qui a été fait avec  $p$  pourrait l'être avec  $q$ . Donc  $q$  est un diviseur de  $n + p + 1$ .

1. Cherchons les solutions telles que  $p = q$ . La condition s'écrit :  $2p(p + 1) = n(n + 1)$ . D'après ce qui précède,  $p$  est un diviseur de  $n + 1$  et donc  $p + 1$  est un diviseur de  $n$ . C'est possible si  $p = 2$  et  $n = 3$ . Si on suppose  $p > 2$ , on peut écrire  $2p(p + 1) = k(p + 1)mp$  et donc  $2 = km$ . Comme  $p$  est impair, et  $n + 1$  aussi, on a nécessairement  $k = 2$  et  $m = 1$ . D'où  $n = 2(p + 1)$  et  $n + 1 = p$ . Impossible.

2. On peut donc supposer maintenant  $p > q$ . Examinons successivement plusieurs possibilités :

- ou bien  $p = n + q + 1$ , mais l'égalité de départ impose  $p < n$ . Pas de solution ;

- ou bien  $2p = n + q + 1$ . Ce qui se traduit par  $q = 2p - n - 1$ , mais  $q$  est un diviseur de  $n + p + 1$  donc il divise la somme des deux, qui est  $3p$ . La seule possibilité est  $q = 3$ . De  $2p = n + 4$  on déduit  $n = 2p - 4$  et, en revenant à l'égalité de départ :  $p(p + 1) + 12 = (2p - 4)(2p - 5)$  dont la solution est  $p = 5$ . Il y a un triplet solution :  $(5, 3, 6)$ .

- ou bien  $3p = n + q + 1$ , et alors, comme précédemment, on trouve que  $q$  est un diviseur de  $4p$ , donc de 4, et comme il est premier,  $q = 2$ . Et  $3p = n + 3$  conduit à  $p = 2$ , exclu dans ce cas.

- Faut-il aller plus loin ? Non, car de  $2p(p + 1) > n(n + 1)$ , on tire  $2p > n$  et de  $q(q + 1) < n(n + 1)$  on tire  $q < n$ . Il s'ensuit que  $n + q + 1 < 2n + 1 < 4p + 1$ . Cette dernière inégalité prouve qu'on peut limiter nos recherches au facteur 4. Mais cela conduit à  $q = 5$  et à une équation du second degré en  $p$  qui n'a pas de solution.

Conclusion :  $(2, 2, 3)$  et  $(5, 3, 6)$  sont les seules solutions.

### Exercice 3 Viète et Newton avec nous

On appelle  $a, b, c$  (dans l'ordre  $a > b > c$ ) les solutions de l'équation  $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ . Quelle est la valeur de  $S = a^2b + b^2c + c^2a$  ?

On peut essayer de symétriser le problème en introduisant  $T = a^2c + b^2a + c^2b$ .

On a  $S - T = ab(a - b) + c^2(a - b) + c(b^2 - a^2) = (a - b)(ab + c^2 - bc - ca) = (a - b)(b - c)(a - c)$

$S + T = (a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$ .

Les formules de Viète (relations entre les coefficients d'un polynôme  $P$  et les racines de l'équation  $P(x) = 0$ ) indiquent que :  $abc = -1, ab + bc + ca = -1, a + b + c = 2$  et donc  $S + T = 1$

$S \times T = (a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + b^2a + c^2b) = abc(a^2 + b^2 + c^2) + 3a^2b^2c^2 + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3$

Calculons  $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = (ab + bc + ca)^3 - 3abc((a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc) - 6a^2b^2c^2$

Tout est ainsi ramené aux fonctions symétriques élémentaires des racines et, après calcul,  $S \times T = -12$ .

On connaît la somme et le produit de  $S$  et  $T$  et on sait que  $S > T$ .

$S$  et  $T$  sont les solutions de l'équation  $X^2 - X - 12 = 0$ . Ces solutions sont 4 et  $-3$ . Donc  $S = 4$ .



#### Exercice 4 Une équation en nombres entiers

Résoudre l'équation

$$x^{1001} = y^x$$

Où  $x$  et  $y$  sont des nombres entiers.

On peut commencer par chercher s'il y a des couples solutions dans lesquels  $x$  est un nombre premier. S'il en est ainsi,  $y$  est nécessairement une puissance de  $x$ . Il existe  $k$  tel que  $y = x^k$  et l'équation s'écrit :  $x^{1001} = x^{kx}$ . Et donc  $1001 = kx$ . Les diviseurs premiers de 1001 sont 7, 11, 13. Les couples solutions sont donc

$$(7, 7^{143}), (11, 11^{91}), (13, 13^{77})$$

Supposons que le nombre premier  $p$  apparaît dans la décomposition de  $x$ . Posons  $x = p^n a$ , où  $p$  ne divise pas  $a$ . Dans cette situation,  $p$  divise également  $y$  et il existe des entiers  $k$  et  $b$  tels que  $y = p^k b$ , où  $p$  ne divise pas  $b$ .

De l'égalité  $p^{1001n} a^{1001} = p^{kp^n} b^x$ . Une condition nécessaire à cette égalité est  $1001n = kp^n a$ .

Il s'ensuit que  $p$  divise un des deux facteurs du premier membre. Si  $p$  ne divise pas 1001, alors  $p^n$  divise  $n$ , ce qui n'est pas possible, car  $p^n \geq (1+1)^n > 1+n$ . Donc  $p$  divise 1001. Et dans ce cas,  $p^{n-1}$  est un diviseur de  $n$  et, comme on vient de le voir, cela n'est possible que pour  $n = 1$ . L'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $x$  est nécessairement 1.

Conclusion pour ce cas : ou bien  $x = 1$  et  $y = 1$ ,

Ou bien les seuls facteurs premiers apparaissant dans la décomposition de  $x$  sont 7, 11 et 13 et donc  $x$  est un diviseur de 1001. Réciproquement, on vérifie que les diviseurs de 1001 conviennent en leur associant les valeurs de  $y$  correspondant.

#### Exercice 5 Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions polynômes  $P$  à coefficients réels telles que, pour tout réel  $x$ :

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+2)$$

Cherchons s'il y a des fonctions constantes solutions. Si pour tout  $x$ ,  $P(x) = a$ , alors  $a^2 = a$  et  $a = 0$  ou  $a = 1$ . Les deux conviennent.

On suppose maintenant le degré de  $P$  supérieur ou égal à 1. S'il, existe  $x$  tel que  $P(x) = 0$ , alors on a aussi  $P(x^2+2) = 0$  et, de proche en proche, il y a une infinité de racines pour ce polynôme. Ce n'est pas possible. De ce fait, il n'y en a aucune. On en déduit que le degré de  $P$  est pair.

On cherche s'il pourrait y avoir des polynômes du second degré solutions. Le coefficient du terme de degré 2 (en fait de plus haut degré en général) est égal à son carré. Comme ce n'est pas 0, c'est 1.

De  $(x^2 + ax + b)((x+1)^2 + a(x+1) + b) = (x^2+2)^2 + a(x^2+2) + b$  pour tout  $x$ , on déduit :  $a = -1$  et  $b = 2$  par identification.

On a donc une solution du second degré, que nous appelons  $P$  :  $P(x) = x^2 - x + 2$ .

Il va de soi que toutes les puissances de  $P$  conviennent également (on élève les deux membres de l'égalité à la même puissance).

Supposons que  $Q$  et  $R$  soient deux solutions, de même degré et posons  $S = Q - R$ . Comme les solutions sont *unitaires* (voir plus haut), le degré de  $S$  est nécessairement inférieur à celui de  $Q$  et de  $R$ .

L'égalité, vraie pour tout  $x$  :  $(R(x) + S(x))(R(x+1) + S(x+1)) = R(x^2+2) + S(x^2+2)$  donne, légèrement développée :  $R(x)S(x+1) + S(x)R(x+1) + S(x)S(x+1) = S(x^2+2)$

Dans cette dernière égalité, les polynômes des deux membres n'ont pas les mêmes degrés.

Les seules solutions sont donc les constantes égales à 0 ou 1 et les polynômes pour lesquels existe un entier  $n$  tel que pour tout  $x$  :  $P(x) = (x^2 - x + 2)^n$ .

## Thème : Suites et fonctions

### Exercice 1 Deux suites rivalisent...

L'ensemble des termes des suites  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  est l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $2n$ . Chacun de ces nombres n'est utilisé qu'une fois. La suite  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  est décroissante, la suite  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  est croissante.

Combien vaut :  $S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \dots + |a_{n-1} - b_{n-1}| + |a_n - b_n|$  ?

Supposons qu'il existe un rang  $k$  pour lequel  $a_k$  et  $b_k$  sont tous les deux supérieurs à  $n$ . Dans ce cas,  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_k$  et  $b_k < b_{k-1} < \dots < b_n$  constituent un ensemble de  $n+1$  nombres différents, supérieurs ou égaux à  $n$  et inférieurs ou égaux à  $2n$ . Impossible. On obtiendrait une autre contradiction si on supposait  $a_k$  et  $b_k$  tous deux inférieurs ou égaux à  $n$ . Conclusion : pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , les entiers  $a_k$  et  $b_k$  appartiennent l'un à  $[[1, n]]$ , l'autre à  $[[n+1, 2n]]$ .

Or, d'après la définition de la valeur absolue,  $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$ .

En sommant toutes ces différences, on retrouve la somme de tous les entiers compris entre  $n+1$  et  $2n$  diminuée de la somme de tous les entiers compris entre 1 et  $n$ .

Finalement  $S = 2n + 2n - 1 + \dots + n + 1 - (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n)$

Et  $S = n^2$ .

### Exercice 2 Une majoration

1. Montrer que, pour tout réel positif  $x$ ,  $4(1+x)^3 - 27x^2 \geq 0$ .

2. On considère la fonction de trois variables réelles positives  $x, y, z$  :

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

Quel est le maximum de cette fonction ?

1. On peut étudier la fonction ou constater que  $4(1+x)^3 - 27x^2 = (4x+1)(x-2)^2$ .

2. On peut déduire de  $4(1+x)^3 - 27x^2 \geq 0$  que, pour tout  $x$  positif,  $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$

En faisant apparaître des «  $1+u$  » au dénominateur :  $f(x, y, z) = \frac{1}{16(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{1}{16z}\right)}$

Qui donne :  $f(x, y, z) \leq \frac{1}{81} \sqrt[3]{\frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{x^2 \times \frac{y^2}{x^2} \times \frac{z^2}{y^2} \times \frac{1}{16z^2}}} \times \frac{1}{16}$  et donc  $f(x, y, z) \leq \frac{1}{81}$

Peut-on trouver un majorant plus petit ?

### Exercice 3 $2x^2x^2 = 8$ et alors ?

Dans cet exercice, on considère des fonctions polynômes du second degré *unitaires*, c'est-à-dire dont le coefficient du terme du second degré est égal à 1.

1. La fonction  $P$  est une fonction polynôme du second degré *unitaire*. On sait que  $P(1) = P(2) = 0$ . Quelle est la fonction  $P$  ?

2. La fonction  $T$  est une fonction polynôme du second degré *unitaire*, pour laquelle on peut trouver quatre réels,  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  deux à deux distincts tels que  $T(\alpha) = T(\beta)$  et  $T(\gamma) = T(\delta)$ . Prouver que  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .

3. Avec deux fonctions polynômes du second degré *unitaires*,  $Q$  et  $R$ , on peut construire la fonction qui à tout nombre réel  $x$  associe  $Q(R(x))$  (image par  $Q$  de l'image de  $x$  par  $R$ ). C'est une fonction polynôme du quatrième degré. On dit que cette fonction est la composée de  $R$  par  $Q$ .

Trouver deux fonctions polynômes du second degré *unitaires*  $Q$  et  $R$  telles que les solutions de l'équation  $Q(R(x)) = 0$  soient les nombres 1, 2, 3 et 4.

4. On effectue cette fois la composition de trois fonctions polynômes du second degré *unitaires*, dans l'ordre  $f$  puis  $g$  puis  $h$ .

On suppose que les solutions de l'équation  $h(g(f(x))) = 0$  sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

a. Prouver que parmi les nombres  $f(1), f(2), f(3), \dots, f(7), f(8)$ , il y a exactement quatre valeurs différentes.

b. Existe-t-il des fonctions polynômes du second degré  $f, g$  et  $h$  unitaires pour lesquelles l'équation  $h(g(f(x))) = 0$  a pour solutions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 ?

1. Pour tout  $x, P(x) = (x - 1)(x - 2)$ .

2. Appelons  $p$  et  $q$  les réels tels que, pour tout  $x : T(x) = x^2 + px + q$ . La condition proposée s'écrit :  $\alpha^2 + p\alpha = \beta^2 + p\beta$ , c'est-à-dire  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + p) = 0$  et donc  $\alpha + \beta = -p$ . Il en est de même pour  $\gamma$  et  $\delta$ . D'où le résultat.

3. Une condition suffisante serait que  $R(1) = R(4), R(2) = R(3)$  et que ces deux images soient des racines du polynôme  $Q$ . La question précédente nous oblige à faire ce choix.

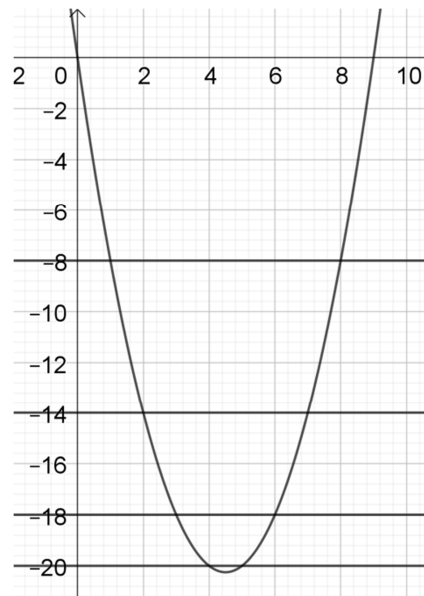
On a alors pour tout  $x : R(x) = x^2 - 5x + q$ . On peut choisir  $q = 4$ , ce qui donne  $R(1) = R(4) = 0$  et  $R(2) = R(3) = -2$ . Un polynôme  $Q$  tel que  $Q(0) = 0$  et  $Q(-2) = 0$  est donné par  $Q(x) = x(x + 2)$ .

Vérification : on a pour tout  $x : Q(R(x)) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ .

4. a. Si les solutions de  $h(x) = 0$  sont  $a$  et  $b$ , les solutions de  $g(x) = a$  sont  $\alpha$  et  $\beta$ , celles de  $g(x) = b$  sont  $\alpha'$  et  $\beta'$ , avec nécessairement  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ . Les solutions de  $f(x) = \alpha$  (respectivement  $\beta, \alpha', \beta'$ ) sont  $m, n$ , (resp  $p, q, r, s, t, u$ ). Elles sont telles que  $m + n = p + q = r + s = t + u$ . Il faut partager  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$  en quatre sommes identiques, toutes égales à 9. Les solutions sont  $1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5$ .

b. Les fonctions polynômes du second degré unitaires vérifiant cette condition sont celles pour lesquelles il existe un réel  $\varphi$  tel que pour tout  $x : f(x) = x^2 - 9x + \varphi$  (voir graphique).

Les valeurs prises par  $f$  en 1 et en 8, en 2 et en 7, en 3 et en 6, en 4 et en 5 sont alors respectivement  $\varphi - 8, \varphi - 14, \varphi - 18$  et  $\varphi - 20$ . Pour que le polynôme unitaire  $g$  prenne la même valeur en deux fois deux de ces points, il est nécessaire qu'on puisse les grouper en deux paires de même somme. Ce n'est pas possible.



#### Exercice 4 Suites de moyennes

Le tableau ci-dessous (dont la longueur est infinie) fait apparaître les termes de deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  indexées par les entiers relatifs.

...	...	...	$a_{k-2}$	$a_{k-1}$	$a_k$	$a_{k+1}$	$a_{k+2}$	...	...
...	...	...	$b_{k-2}$	$b_{k-1}$	$b_k$	$b_{k+1}$	$b_{k+2}$	...	...

Dans les tableaux qui font l'objet de cet exercice, les termes de même indice des deux suites sont l'un au-dessus de l'autre, et on suppose que chaque terme  $a_k$  est la moyenne de ses trois voisins,  $a_{k-1}, a_{k+1}$  et  $b_k$ . De même chaque terme  $b_k$  est la moyenne de ses trois voisins  $b_{k-1}, b_{k+1}$  et  $a_k$ .

##### 1. Première situation

On suppose que  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  et  $a_3 = 1$ . Déterminer  $a_4$ .

##### 2. Deuxième situation

On pose pour tout entier  $k : S_k = a_k + b_k$ . Montrer que pour tout  $k : S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$ . En déduire que la suite  $(S_k)$  est arithmétique (bon, d'accord, elle est indexée par les entiers relatifs, on modifiera un peu la définition).

##### 3. Autres considérations

a. Montrer que si tous les termes du tableau sont des entiers positifs, alors ils sont tous égaux.

b. Montrer que si tous les termes du tableau sont des nombres réels positifs alors ils sont tous égaux.

Remarque : si on prouve d'abord le résultat b., il n'y a plus rien à faire...

1. Les deux premières égalités prouvent que  $b_1 = 0$ , les deux dernières que  $b_2 = -1$ . On a ensuite  $b_2 = \frac{0+0+b_3}{3}$ , qui conduit à  $b_3 = -3$ . L'égalité  $a_3 = \frac{0-3+a_4}{3}$  conduit à  $a_4 = 6$ .

2. Appliquons la définition (en multipliant par 3, c'est plus commode) :

$3S_k = a_{k-1} + a_{k+1} + b_k + b_{k-1} + b_{k+1} + a_k = S_{k+1} + S_k + S_{k-1}$ . D'où le résultat :  $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$

Cette dernière égalité montre que, pour tout entier,  $S_{k+1} - S_k = S_k - S_{k-1}$ , ce qui dit bien que la suite est arithmétique.

**3. a.** Tous les termes du tableau étant des entiers positifs, l'un d'eux est leur minimum (toute partie non vide de  $\mathbf{N}$  admet un plus petit élément – cet argument ne sera pas utilisable pour la question suivante...). Que ce soit l'un des  $a$  ou l'un des  $b$  ne change rien à ce qui va suivre. Supposons que ce soit un certain  $a_j$ . Cet  $a_j$  est la moyenne de trois entiers qui lui sont supérieurs ou égaux, donc ils lui sont tous égaux. De même pour  $b_j$ , lui aussi égal à ses trois voisins. À partir de ces six termes égaux, de proche en proche, tous les termes du tableau sont égaux.

**b.** Nous avons montré que la suite  $(S_k)$  est arithmétique. Montrons que, sous notre hypothèse, elle est constante. Supposons que  $S_0 = c$  et  $S_1 = d$ . Les nombres  $c$  et  $d$  sont positifs. Si  $d < c$ , la raison de la suite est négative et au-delà d'un certain rang les termes de la suite seront aussi négatifs, contrairement à l'hypothèse. Si  $d > c$ , ce sont les termes en-deçà d'un certain rang négatif qui sont négatifs, contrairement à l'hypothèse. La seule possibilité est  $d = c$ . La suite  $(S_k)$  est constante.

On a donc pour tout entier  $k : S_k = c > 0$  (les termes du tableau sont tous positifs...)

Nous symétrisons le problème en posant, pour tout entier  $k$ ,  $D_k = a_k - b_k$ . Pratiquons comme plus haut :

$$3D_k = a_{k-1} + a_{k+1} + b_k - b_{k-1} - b_{k+1} - a_k = D_{k-1} + D_{k+1} - D_k. \text{ D'où } D_{k+1} = 4D_k - D_{k-1}.$$

Comme, pour tout entier  $k$ ,  $a_k + b_k = c$  et que les deux termes de cette somme sont positifs, on en déduit que, pour leur différence,  $-c < D_k < c$ . Or la formule de récurrence trouvée ci-dessus conduit à une suite exponentiellement croissante ou exponentiellement décroissante si par exemple  $D_0 \neq 0$ .

Conclusion : toutes les différences sont nulles et tous les termes du tableau valent  $\frac{1}{2}c$ .

### Exercice 5 Avec les fonctions à valeurs entières, tout n'est pas possible

On dit qu'une fonction  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est :

- *croissante* si, pour tous entiers  $m$  et  $n$ ,  $m < n \implies f(m) < f(n)$  ;
- *multiplicative* si, pour tous entiers  $m$  et  $n$  premiers entre eux,  $f(m \times n) = f(m) \times f(n)$  ;
- *complètement multiplicative* si pour tous entiers  $m$  et  $n$ ,  $f(m \times n) = f(m) \times f(n)$ .

1. Montrer que si  $f$  est *croissante*, alors, pour tout entier,  $f(n) \geq n$ .
2. Montrer que si  $f$  est *croissante* et *complètement multiplicative* et que  $f(2) = 2$ , alors  $f$  est l'identité.
3. La propriété précédente est-elle conservée si on ôte « *complètement* » ?

1. L'ensemble des entiers  $m$  pour lesquels  $f(m) < m$  est un ensemble d'entiers naturels, il possède donc un plus petit élément,  $p$ . Ces images sont toutes différentes et toutes inférieures strictement à  $p$ . Cela en fait au moins une de trop. L'ensemble en question est donc vide.

2. Pour tout entier,  $f(n) \geq n$ . L'ensemble des entiers  $m$  pour lesquels  $f(m) > m$  possède un plus petit élément,  $p$ .

- ou bien  $p$  est pair et alors  $f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2}$  puisque  $\frac{p}{2} < p$ . Et  $f(p) = f\left(\frac{p}{2}\right) \times f(2) = 2f\left(\frac{p}{2}\right) = 2 \times \frac{p}{2} = p$ . Contradiction.

- ou bien  $p$  est impair et on fait jouer à  $p + 1$  le rôle du  $p$  ci-dessus.

3. On peut faire le même raisonnement que pour la question précédente, mais :

- dans le cas où  $p$  est pair et  $\frac{p}{2}$  pair, le raisonnement achoppe. On s'intéresse alors à  $p + 2$ , puisque  $\frac{p+2}{2}$  est impair (le cas  $p = 2$  a été exclu par hypothèse avec la condition  $f(2) = 2$ ).

- dans le cas où  $p$  est impair, on s'intéresse à  $p + 1$  qui est pair et, finalement il ne reste à régler que le cas  $p = 3$ .

Posons  $f(3) = x$ . On a successivement :

$$f(6) = 2x, f(5) \leq 2x - 1, f(10) \leq 4x - 2, f(9) \leq 4x - 3, f(18) \leq 8x - 6 \text{ d'une part,}$$

$$f(5) \geq x + 2, f(15) \geq x(x + 2) \text{ d'autre part}$$

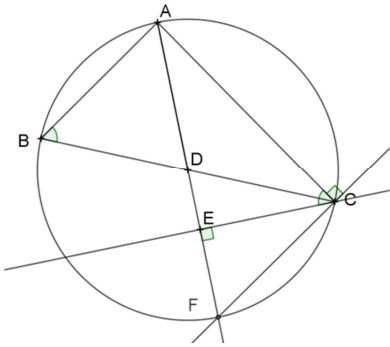
$$\text{En écrivant } x(x + 2) + 3 \leq f(15) + 3 \leq f(18) \leq 8x - 6 \text{ on aboutit à } x^2 - 6x + 9 \leq 0 \text{ soit } (x - 3)^2 \leq 0$$

Et donc  $x = 3$ .

## Thème : Angles, distances, alignement, concours

### Exercice 1 Deux angles égaux, et hop !

Dans le triangle ABC, on appelle D le milieu de [BC] et E le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur (AD). Montrer que les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACE}$  ne peuvent être égaux que si le triangle ABC est rectangle ou isocèle.

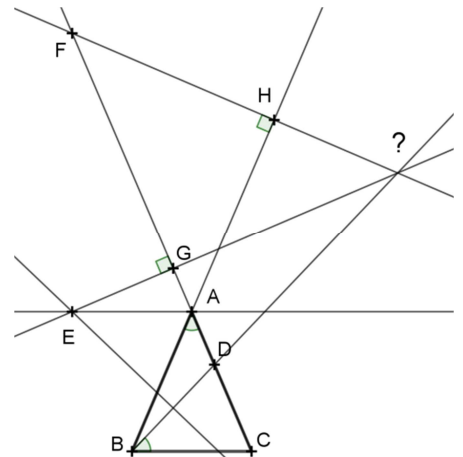


Considérons le point F, intersection de la perpendiculaire à (AC) menée par C et (AD). Le triangle ACF est rectangle en C, donc inscrit dans un cercle dont le centre est le milieu de [AF]. Les angles  $\widehat{ACE}$  et  $\widehat{CAE}$  sont complémentaires, les angles  $\widehat{ACE}$  et  $\widehat{EFC}$  aussi. Il s'ensuit que les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{AFC}$  aussi. Donc le point B appartient au cercle circonscrit à AFC. [AF] est un diamètre du cercle, qui coupe la corde [BC] en son milieu. De ces choses l'une, soit les deux sont perpendiculaires, soit ils ont le même milieu... D'où on tire la conclusion proposée.

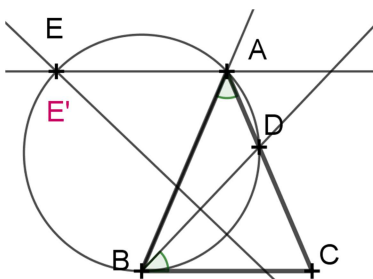
### Exercice 2 Un problème de concours...

On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A et tel que l'angle en A ait une mesure inférieure à  $60^\circ$ . Le point D est le point du segment [AC] tel que  $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$ . Le point E est le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par A et de la médiatrice de [BD]. Le point F est le point de la demi-droite [CA) tel que  $AF = 2CA$ . Le point G est le projeté orthogonal de E sur (CA). Le point H est le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur (AB). Ouf !

1. Pourquoi cette histoire de  $60^\circ$  ?
2. Montrer que (EB) et (AC) sont parallèles.
3. Montrer que les droites (BD), (EG) et (FH) sont concourantes.



1. Si l'angle en A a une mesure supérieure à  $60^\circ$ , il n'y a aucun point du segment [AC] réalisant l'hypothèse. On passe à un autre problème.

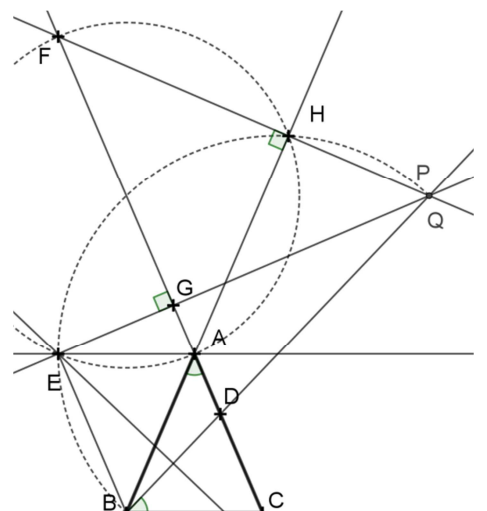


2. Considérons le point d'intersection  $E'$  du cercle circonscrit au triangle ADB et de la parallèle à (BC) passant par A. Le théorème de l'angle inscrit fournit les égalités  $\widehat{DE'B} = \widehat{BAD}$  et  $\widehat{E'DB}$ . Mais  $\widehat{E'AB} = \widehat{ABC}$  (du fait du parallélisme) et donc  $\widehat{E'DB} = \widehat{ABC}$ . Les triangles  $E'DB$  et ABC ont deux angles égaux, donc trois et le triangle  $E'DB$  est isocèle en  $E'$  :  $E'$  appartient à la médiatrice de [BC]. Finalement  $E'$  et E sont un seul point. D'après le théorème de l'angle inscrit, les angles  $\widehat{AEB}$  et  $\widehat{ADB}$  sont supplémentaires, donc  $\widehat{AEB} = \widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ .  $\widehat{AEB}$  est donc supplémentaire de  $\widehat{CAE}$  et les droites (CA) et (BE) sont parallèles.

3. Appelons P le point d'intersection des droites (FH) et (EG). Le cercle de diamètre [BP] passe par E et H (l'angle droit en E est dû au parallélisme entre (EB) et (AC)).

Le triangle AEF est rectangle en E (il est semblable par construction à « un demi » triangle ABC). Il s'ensuit que le cercle de diamètre [AF] passe par H et E. D'après le théorème de l'angle inscrit,  $\widehat{AEH} = \widehat{AFH}$ . Dans le triangle rectangle AFH, l'angle en F est le complémentaire de l'angle en A, qui se trouve être opposé par le sommet, donc de même mesure que  $\widehat{BAC}$ . L'angle  $\widehat{BEH}$  a donc pour mesure la somme des mesures de l'angle en B et du complémentaire de l'angle en A du triangle initial.

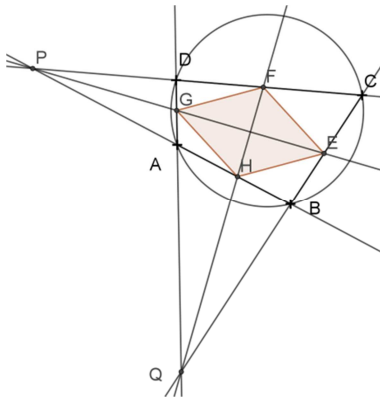
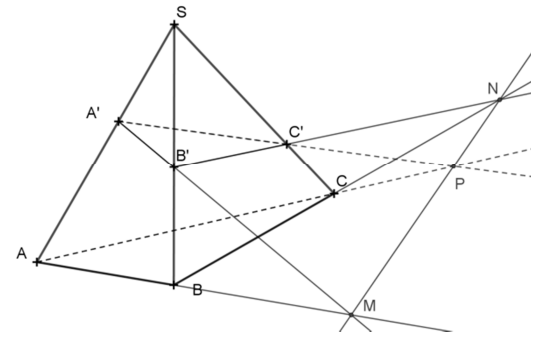
Appelons Q le point d'intersection de (EG) et (BD). L'angle  $\widehat{BQH}$  est complémentaire de  $\widehat{DBA}$ . Il s'ensuit que  $\widehat{BEH}$  et  $\widehat{BQH}$  sont supplémentaires. Le point Q appartient donc au cercle de diamètre [BP]. Comme il appartient à la droite (EG) qui coupe ce cercle en P (et en E...), c'est la point P. Les droites (FH), (EG) et (BD) sont concourantes.



### Exercice 3 Le théorème de Desargues

Dans le plan, si deux triangles ABC et A'B'C' sont tels que les droites joignant les sommets homologues soient concourantes (ici en S), alors les supports des côtés homologues sont parallèles ou se coupent en des points alignés.

Ça se démontre (même en géométrie analytique, si on veut), mais l'idée de Desargues lui-même est de considérer que la figure ci-contre est la représentation plane d'une figure de l'espace : le tétraèdre SABC est coupé par un plan qui rencontre ses arêtes concourant en S en les points A', B' et C'. Les plans (ABC) et (A'B'C') ont une droite en commun : les points M, N, P sont les points d'intersection des plans (SAB), (SBC) et (SAC) avec cette droite.



### Exercice 4 Losange

On considère un quadrilatère inscrit ABCD dont les côtés opposés ne sont pas parallèles. (AB) et (CD) se coupent en P, (AD) et (BC) se coupent en Q. La bissectrice de l'angle  $\widehat{BPC}$  coupe (BC) en E et (AD) en G. La bissectrice de l'angle  $\widehat{DQC}$  coupe (CD) en F et (AB) en H. Montrer que EFGH est un losange.

On appelle J le point d'intersection des deux bissectrices et on exprime la somme des mesures des angles des triangles CPQ, APQ et JPQ. Pour cela on note  $p$  la mesure de  $\widehat{APQ}$ ,  $q$  la mesure de  $\widehat{AQP}$ ,  $p_1$  et  $q_1$  les mesures des angles déterminés par les bissectrices.

$$\text{On a : } \widehat{PAQ} = 180 - (p + q).$$

$$\text{Comme le quadrilatère est inscrit, } \widehat{PCQ} = 180 - \widehat{PAQ} = p + q$$

$$\text{D'autre part } \widehat{PCQ} = 180 - (p + q) - 2(p_1 + q_1)$$

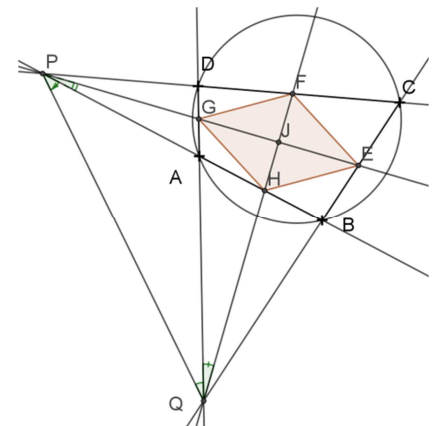
$$\text{Donc } 2(p + q) = 180 - 2(p_1 + q_1)$$

$$\text{Et } p + q + (p_1 + q_1) = 90$$

Cette dernière égalité prouve que  $\widehat{QJP} = 90$ .

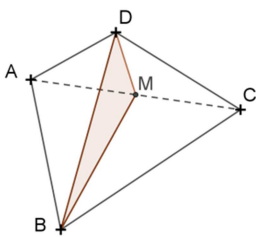
Les diagonales du quadrilatère EFGH sont perpendiculaires.

Si on considère le triangle QGE, la bissectrice de son angle en Q est donc aussi hauteur issue de Q. Ce triangle est donc isocèle et J est le milieu de [GE]. Même chose pour le triangle PHF. Les diagonales du quadrilatère EFGH sont médiatrices l'une de l'autre. C'est un losange.



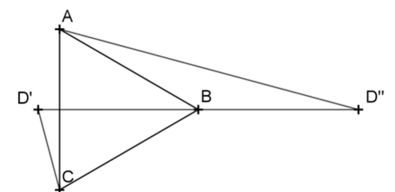
### Exercice 5 Tétraèdre

Des six arêtes d'un tétraèdre ABCD, 4 sont de la même longueur  $a$ , 2 sont de la même longueur  $b$ . Quel est le rapport  $b/a$  ?



Ou bien, des quatre arêtes de longueur  $a$ , trois sont les côtés d'une face qui est un triangle équilatéral (ABC sur la figure de gauche), la quatrième ((BD) sur la figure de gauche) est située dans le plan médiateur du segment [AC], l'extrémité D appartenant au cercle de centre B et de rayon  $a$  situé dans ce plan. Les positions limite de D, dans le plan (ABC) sont D' et D'' sur la figure de droite. Le théorème de Pythagore (on a pris  $a = 1$ , ce qui ne change rien) donne  $CD'^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

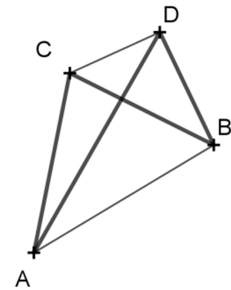
$$\text{et } CD''^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}. \text{ Après simplification on trouve } CD' = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ et } CD'' = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$





Les valeurs extrêmes du rapport  $b/a$  sont donc  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  (après simplification, qui est un autre exercice...)

Ou bien aucune face du tétraèdre n'a pour arêtes trois des quatre de longueur  $a$ . Ce qui signifie que les arêtes de longueur  $b$  ne sont pas coplanaires. Sur la figure de droite, les arêtes  $[CD]$  et  $[AB]$  ont une longueur minimale nulle. Leur longueur maximale est atteinte dans le cas du carré  $ACBD$ . On a alors  $b = a\sqrt{2}$ .



### Exercice 6 Vous avez dit « équilatère » ?

Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine  $O$ .

On considère l'hyperbole  $\mathcal{H}$  d'équation  $xy = 1$ .

On considère un point  $A$  de  $\mathcal{H}$  et son symétrique par rapport à  $O$ , qu'on note  $A'$ . On note enfin  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  passant par  $A'$ .

1. Dans cette question, les coordonnées du point  $A$  sont 1 et 1. Déterminer les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\mathcal{H}$ . Montrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

2. Cette fois, le point  $A$  est un point quelconque de l'hyperbole, dont l'affixe est notée  $\omega$ . On note  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan. Montrer que la relation  $(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = 4\omega\bar{\omega}$  exprime une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit un point du cercle.

3. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) M \in \mathcal{H} \quad (ii) z^2 - \omega^2 = \bar{z}^2 - \bar{\omega}^2 \quad (iii) z^2 - \bar{z}^2 = 4i$$

4. Étudier l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\mathcal{H}$ .

1. Le carré du rayon du cercle est 8. Son équation cartésienne est  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ . Si le point de coordonnées  $(x, y)$  appartient au cercle et à l'hyperbole, on a nécessairement  $y = \frac{1}{x}$  et

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x - 2\frac{1}{x} - 6 = 0. \quad 0 \text{ n'est pas solution (il n'y a pas de point d'abscisse 0 sur l'hyperbole).}$$

On peut poser  $X = x + \frac{1}{x}$ . L'équation en  $X$  s'écrit  $X^2 - 2X - 8 = 0$ . Ses solutions sont 4 et  $-2$ .

Les solutions de  $x + \frac{1}{x} = 4$  sont  $2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$  (qui sont inverse l'une de l'autre, les points sont symétriques par rapport à la première bissectrice). La solution de  $x + \frac{1}{x} = -2$  est  $-1$  (le point  $A'$  est un point de contact entre le cercle et l'hyperbole). On vérifie que les trois côtés du triangle ont la même longueur,  $2\sqrt{3}$ .

2. En effet,  $(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})$  n'est autre que le carré du module de  $z - \omega$ , c'est-à-dire le carré de la distance  $MA$ .  $4\omega\bar{\omega}$  est le carré du module de  $2\omega$ , c'est-à-dire de la distance  $AA'$ .

$$3. z^2 - \bar{z}^2 = (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 2\operatorname{Re}(z) \times 2i\operatorname{Im}(z) = 4i\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 4i$$

C'est évidemment le même résultat si on fait le calcul pour  $A$ , qui est un point quelconque de l'hyperbole. On effectue les mêmes calculs pour (ii) et (iii), il n'y a qu'un changement de membre.

4. Écrivons les conditions pour que le point d'affixe  $z$  soit dans l'intersection du cercle et de l'hyperbole. Pour cela, posons  $X = z - \omega$ . Les conditions peuvent être écrites :  $X\bar{X} = 4\omega\bar{\omega}$  et  $X^2 + 2\omega X = \bar{X}^2 + 2\bar{\omega}X$ .

On parvient à l'équation du quatrième degré :

$$X^4 + 2\omega X^3 - 8\omega\bar{\omega}X - 16(\omega\bar{\omega})^2 = 0$$

On connaît une des solutions,  $-2\omega$ . On factorise pour obtenir les autres, solutions de  $X^3 - 8\omega\bar{\omega} = 0$ .

Ces trois racines cubiques sont les affixes des trois sommets d'un triangle équilatéral.

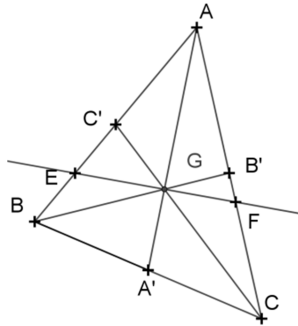
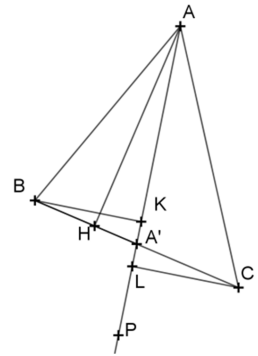
## Thème Aires et volumes

### Exercice 1 Découpage d'un triangle

#### Première partie

On considère un triangle ABC. On appelle  $A'$  le milieu de  $[BC]$  et H le pied de la hauteur issue de A du triangle. On appelle K le pied de la hauteur issue de B du triangle  $ABA'$  et L le pied de la hauteur issue de C du triangle  $ACA'$ .

1. Montrer que  $BK = CL$ .
2. Soit P un point de la droite  $(AA')$ . Montrer que  $Aire(APB) = Aire(APC)$
3. Réciproquement, si un point Q vérifie  $Aire(AQB) = Aire(AQC)$ , peut-on affirmer que le point Q appartient à la droite  $(AA')$  ?



#### Deuxième partie

Cette fois on considère le centre de gravité G du triangle ABC et une droite variable passant par G et rencontrant les segments  $[AB]$  et  $[AC]$  respectivement en E et F. On pose  $r = \frac{Aire(AEF)}{Aire(ABC)}$ .

$$r = \frac{Aire(AEF)}{Aire(ABC)}$$

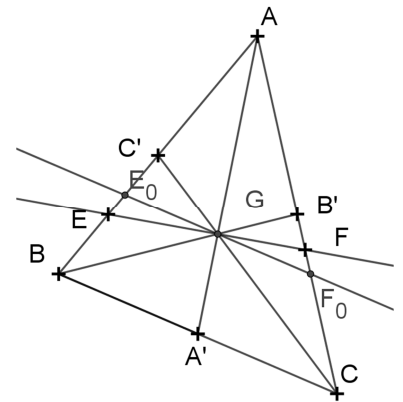
Quelles sont les valeurs maximale et minimale de  $r$  ?

#### Première partie

1. Deux triangles rectangles ayant les mêmes angles et des hypoténuses égales... On peut considérer cela comme une cause ou une conséquence du partage de l'aire du triangle ABC par la médiane.
2. Les triangles  $PCA'$  et  $PBA'$  ont même aire (même « base », même hauteur (distance de P à  $(BC)$ )). On les accole aux triangles de même aire  $ABA'$  et  $ACA'$ .
3. La parallèle à  $(AB)$  passant par Q coupe la médiane  $(AA')$  en  $Q'$ . La parallèle à  $(AC)$  menée par Q coupe  $(AA')$  en  $Q''$ . Les triangles  $ABQ'$  et  $ACQ''$  ont la même aire, mais d'après la propriété précédente c'est aussi l'aire de  $ACQ'$ . Même « base » donc même hauteur :  $Q'$  et  $Q''$  sont confondus et confondus avec Q, sur la médiane  $(AA')$ .

#### Deuxième partie

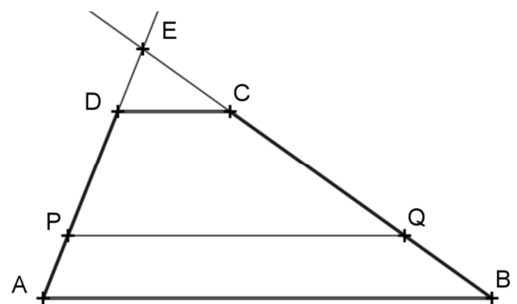
Le rapport  $r$  vaut  $\frac{4}{9}$  dans le cas de la droite  $(E_0F_0)$  parallèle à  $(BC)$ . Une droite passant par G non parallèle à  $(BC)$  coupe  $[AB]$  en E et  $[AC]$  en F. On suppose que E appartient au segment  $[BE_0]$ . Pour comparer les aires des triangles  $GEE_0$  et  $GF_0F$ , on constate que la parallèle à  $(AB)$  passant par  $F_0$  coupe  $(EF)$  en un point extérieur au segment  $[EF]$ . Conclusion :  $\frac{4}{9}$  est un minimum pour  $r$ . So maximum est atteint lorsque E ou F sont confondus (un à la fois) avec les sommets B ou C. C'est  $\frac{1}{2}$ .



### Exercice 2 Trapèze ou escabeau ?

Les bases  $[AB]$  et  $[CD]$  du trapèze ABCD mesurent respectivement 4 unités et 1 unité. Les supports des côtés non parallèles  $[AD]$  et  $[BC]$  se coupent en E. Un point P situé sur  $[AD]$  et un point Q situé sur  $[BC]$  sont tels que  $(PQ)$  est parallèle aux bases du trapèze et que PQ mesure 3 unités.

1. Trouver deux entiers  $m$  et  $n$  tels que les trapèzes ABQP et PQCD soient partagés par des parallèles aux bases en  $m$  trapèzes pour le premier,  $n$  trapèzes pour le second, tous de même aire.
2. Quelles sont les longueurs des bases de ces  $m + n$  trapèzes ?

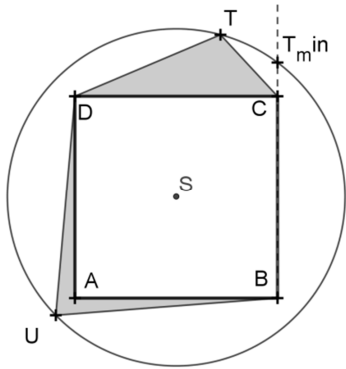


1. Le triangle ECD a une aire qui est  $\frac{1}{9}$  de celle de EPQ et  $\frac{1}{16}$  de celle de EAB. Le trapèze ABCD a donc pour aire 15 fois celles de EDC, et le trapèze PQCD a pour aire 8 fois celle de EDC. On prendra  $m = 7$  et  $n = 8$ .

2. Les aires des triangles de sommet E et de « base » parallèle à (AB) issus de ce découpage valent successivement 2, 3, 4, ... 16 fois l'aire de EDC. Les rapports des aires étant les carrés des rapports des longueurs des bases, ces dernières mesurent respectivement  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{15}, \sqrt{16}$  (on n'a pas simplifié les écritures).

**Exercice 3 Ombre portée**

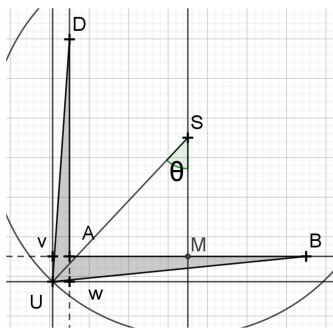
Une pyramide régulière à base carrée, de hauteur 15 m et de côté 18 m, reçoit les rayons de soleil (supposés bien sûr parallèles). L'ombre portée de la pyramide obscurcit le sol. On constate que c'est au moment de l'année où les rayons du soleil tombent sur le sol en faisant avec lui un angle de 45° que cette ombre couvre la plus petite aire. Quelle est cette aire ?



Deux situations peuvent se présenter (pas simultanément...) : Le sommet S de la pyramide se projette en un point T du cercle de centre  $\sigma$  (le projeté orthogonal de S sur le plan de base de la pyramide, on ne les a pas distingués sur la figure) et de rayon 15 (il y a un triangle rectangle isocèle) qui détermine une ombre triangulaire (exemple TDC) ou il se projette en U, point du cercle déterminant une ombre en « pointe de flèche » (exemple DABU).

Dans le premier cas, la hauteur du triangle TDC est minimale lorsque T est en  $T_{min}$ , point d'intersection du cercle et de la demi-droite [BC].

Le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont l'angle droit pour sommet le milieu de [BC] donne :  $15^2 = 9^2 + (9 + x)^2$  donne  $x = 3$ . L'aire cherchée est donc  $27 \text{ m}^2$ .



Dans le cas de la pointe de flèche UDAB, on calcule la somme des aires des triangles UAB et UAD ou, plus simplement, la somme de leurs hauteurs pour la comparer aux résultats précédents. On prend  $\theta$  pour mesure de l'angle  $\widehat{MSU}$  et on obtient :  $Aw = 15 \cos \theta - 9$  et  $Av = 15 \sin \theta - 9$ . La somme des deux hauteurs est donc  $15(\sin \theta + \cos \theta) - 18$

Nous voulons comparer cette somme  $h$  à 3. Posons

$$g(\theta) = 3 - h = 21 - 15(\sin \theta + \cos \theta)$$

Or, dans le cas qui nous occupe,  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  et  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  sont les valeurs limite. Nous devons étudier cette différence pour  $\theta \in \left[ \sin^{-1} \frac{3}{5}, \sin^{-1} \frac{4}{5} \right]$ . On vérifie qu'aux

bornes de cet intervalle la fonction  $g$  prend la valeur 0 (ce qui évidemment était attendu) et qu'elle est décroissante puis croissante, donc négative sur cet intervalle. La « pointe de flèche » ne donne pas d'ombre plus petite que la valeur minimale trouvée dans le cas où seul un côté est ombré.

**Exercice 4 Question naïve sur les polyèdres**

Y a-t-il toujours, dans un polyèdre convexe, deux faces ayant le même nombre de côtés ?

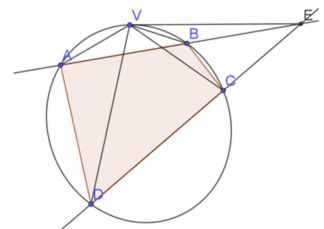
Considérons un polyèdre convexe à  $n$  faces. Une face donnée a au moins trois côtés et au plus  $n - 1$  côtés (si on dénombre les côtés communs avec une autre face, majoration très large).  $(n - 1) - 3$  est inférieur strictement à  $n \dots$

**Exercice 5 Pyramide inscrite dans une sphère**

La pyramide de base ABCD et de sommet S est inscrite dans une sphère.

Le quadrilatère ABCD est tel que  $AD = 2 BC$ . Les droites (AB) et (CD) se coupent en E.

Quel est le rapport du volume de la pyramide de base AED et de sommet S au volume de la pyramide donnée ?



Dire que la pyramide est inscrite dans une sphère implique que le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle intersection du plan (ABC) avec la sphère. Ses angles opposés sont donc supplémentaires. On en déduit l'égalité des angles homologues des triangles EAD et ECD. Les triangles EAD et ECD sont donc semblables, et comme le rapport de AD à BC est 2, le rapport de similitude entre les triangles est lui aussi 2.

Le rapport de l'aire du triangle EAD à celle du triangle ECB est donc 4, le rapport de l'aire du triangle EAD à celle du quadrilatère ABCD est  $\frac{4}{3}$ . C'est le même que le rapport des volumes cherché, les pyramides ayant même sommet.

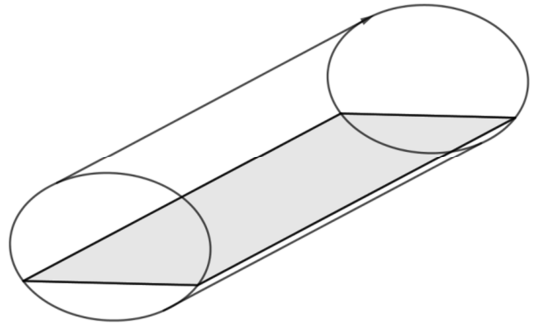
### Exercice 6 Réservoir

L'unité de longueur est le mètre. Un réservoir a la forme d'un cylindre droit. Une de ses génératrices est contenue dans le plan horizontal. Sa longueur est 30, et le rayon des cercles de base est 10.

Il contient du liquide, dont la surface libre est contenue dans un plan horizontal distant de 5 du sol.

On ajoute du liquide dans le réservoir, et la surface libre est alors située dans un plan distant de  $10 + 5\sqrt{2}$ .

Quel est le volume de liquide ajouté ?



Les solides intervenant dans la suite sont des prismes. On peut se contenter de regarder ce qui se passe dans le disque de base.

Nous souhaitons, par différence, calculer l'aire du segment circulaire défini par la corde [HG]. Le triangle OGH est rectangle isocèle (car  $5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10$ ). L'aire du secteur circulaire défini par  $\widehat{GOH}$  est le quart de l'aire du disque et l'aire du triangle GOH est 50. L'aire du secteur circulaire est donc

$$A = 25\pi - 50$$

De la même manière, en observant que le triangle OIB est un demi-triangle équilatéral, l'aire du segment circulaire défini par la corde [IJ] est :

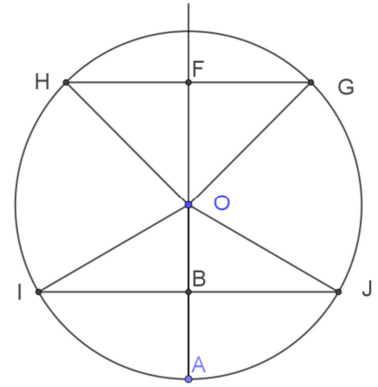
$$B = \frac{100}{3}\pi - 5 \times 5\sqrt{3}$$

L'aire cherchée est la différence entre l'aire du disque et la somme des aires des segments circulaires :

$$C = 100\pi - 25\pi + 50 - \frac{100}{3}\pi + 25\sqrt{3} = \frac{125}{3}\pi + 50 + 25\sqrt{3}$$

La quantité de liquide ajoutée s'exprime, en  $m^3$ , par :

$$V = 1\,250\pi + 1\,500 + 750\sqrt{3}$$



## Spécifique ES/L

### Thème dénombrement et probabilités

#### Exercice 1 Petit loto entre amis

Ali, Ben et Caro, assistés de Dora, jouent. Ali possède 6 jetons bleus, Ben 7 jetons blancs et Caro 8 jetons rouges. Ces jetons sont placés dans un sac, d'où la main innocente de Dora les tire un par un. Le gagnant est celui ou celle dont tous les jetons ont été tirés alors qu'il reste dans le sac des jetons des deux autres couleurs. Comment s'établit la probabilité de gain pour chacun ?

Ali récupère ses 6 jetons avant ceux de Ben si, sur les 13 jetons bleus ou blancs, le dernier tiré est blanc. Comme il y a 7 jetons blancs, la probabilité correspondante est  $\frac{7}{13}$ . De la même manière, la probabilité qu'Ali récupère ses 6 jetons bleus avant les 8 de Caro est  $\frac{8}{14}$ . Mais les deux événements ne sont pas disjoints ! Leur intersection correspond au cas où Ali récupère ses jetons avant que Ben ET Caro récupèrent les leurs. La probabilité de cette intersection est  $\frac{15}{21}$ . Finalement, la probabilité qu'Ali gagne est :  $P(A) = \frac{7}{13} + \frac{8}{14} - \frac{15}{21} = \frac{36}{91}$ .

On trouve de la même manière  $P(B) = \frac{6}{13} + \frac{8}{15} - \frac{14}{21} = \frac{64}{195}$  et  $P(C) = \frac{6}{14} + \frac{7}{15} - \frac{13}{21} = \frac{29}{105}$ . On vérifie que la somme de ces trois probabilités est bien 1 et que  $P(A) > P(B) > P(C)$ , ce qui est conforme à l'intuition.

#### Exercice 2 It's more fun to compete

Dans un tournoi, chaque joueur affronte une et une seule fois chacun des autres. Annie doit toutefois quitter le tournoi après 10 parties (elle sera considérée comme perdante dans celles qu'elle ne dispute pas) et Bernard le quitte après une partie seulement. Aucun autre joueur n'abandonne. À la fin du tournoi, 55 parties ont été effectivement disputées. Annie a-t-elle joué contre Bernard ?

Si  $n$  joueurs ont participé à la compétition,  $\binom{n}{2}$  parties doivent se dérouler, chaque joueur en disputant  $n - 1$ . Il y a eu défaillance d'Annie pour  $n - 1 - 10$  parties et de Bernard pour  $n - 2$  s'il n'a pas joué contre Annie,  $n - 1$  si une partie les a opposés. On a donc ou bien  $\frac{n(n-1)}{2} - n + 11 - n + 2 = 55$

ou bien  $\frac{n(n-1)}{2} - n + 11 - n + 1 = 55$ .

La première équation donne  $n^2 - 5n - 84 = 0$

La seconde  $n^2 - 5n - 86 = 0$

C'est la seconde équation qui possède une solution entière,  $n = 12$ . La seule partie que Bernard a disputée, c'était contre Annie, qui a abandonné après 10 parties sur 11 possibles.

#### Exercice 3 Tournée triomphale

11 joueuses de l'équipe championne d'Europe de Hand Ball visitent la ville natale de l'une d'entre elles et signent des autographes à chacun des 1 111 habitants. Chaque habitant recueille ainsi entre 0 et 11 signatures distinctes.

1. Combien y a-t-il de collections d'autographes, au maximum ?

2. On constate qu'il n'existe aucune paire de détenteurs d'autographes qui aient réuni la même collection. Montrer qu'il existe deux habitants dont les collections réunies rassemblent les onze signatures.

1. Pour chaque collectionneur, chaque joueuse a signé ou n'a pas signé. Les collections peuvent être représentées par des suites de 0 et 1. Il y a  $2^{11}$  telles suites.

2. On considère un premier habitant : sa collection est une suite de onze symboles pris parmi 0 et 1. La collection complémentaire s'obtient en remplaçant les 0 par des 1 et les 1 par des 0. On suppose que personne ne la possède, et on passe à un deuxième habitant. Même raisonnement. Mais on n'a que 1 024 occasions de faire ce raisonnement, car si on n'a pas trouvé les complémentaires de 1 024 collections, ces complémentaires se trouvent parmi les 1 024 suivantes, et comme il y a 1 111 habitants, tous les  $1\ 111 - 1\ 024 = 87$  suivants ont des collections complémentaires d'une de celles des 1 024 premiers examinés.

## Thème Logique, graphes

### Exercice 1 « L'ami du genre humain n'est point du tout mon fait »

Dans la classe, la situation est établie : l'amitié est symétrique, deux élèves quelconques sont amis ou ne le sont pas. De plus, dans tout groupe de 4 élèves, au moins un des quatre est ami avec les trois autres. Montrer qu'il y a au moins un élève ami de tous les autres (ouf !)

Considérons un groupe de 4 élèves, et appelons-les  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Si on suppose que  $P_1$  est ami avec tout le monde, c'est fini. Supposons donc que  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas amis. Dans ce groupe de quatre, il y a pourtant un élève ami des trois autres. Ce peut être  $P_3$  ou  $P_4$ . Supposons que c'est  $P_3$ . Soit  $Q$  un élève quelconque. Dans le groupe constitué de  $P_1, P_2, P_3$  et  $Q$ , il y a un ami des trois autres. Si on imagine que c'est  $Q$ , il est ami avec  $P_3$  et réciproquement. Donc  $P_3$  est ami du genre humain.

### Exercice 2 Wombat

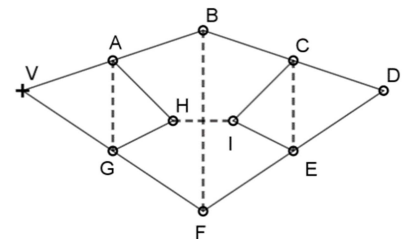
Un concours est organisé pour les 67 élèves de terminale d'un (petit) lycée. Il s'agit de répondre par *oui* ou *non* à chacune des six questions d'une liste. Une bonne réponse à la question numéro  $k$  rapporte  $k$  points, une mauvaise réponse coûte  $k$  points, prélevés sur le total.

1. Montrer que deux élèves au moins auront fourni exactement les mêmes réponses.
2. Montrer qu'au moins quatre élèves auront obtenu le même total.

1. Le nombre de réponses possibles (listes de six « oui » ou « non ») est  $2^6 = 64$ . Sur 67 listes, il y en a au moins 2 identiques.
2. Les totaux possibles sont compris entre  $-21$  et  $21$ . À partir du total maximum 21, chaque fois qu'une réponse fautive a été donnée, par exemple à la question  $k$ ,  $2k$  sont à ôter de ce total, qui reste donc impair. Les totaux possibles sont donc 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1,  $-1$ ,  $-3$ ,  $-5$ ,  $-7$ ,  $-11$ ,  $-13$ ,  $-15$ ,  $-17$ ,  $-19$ ,  $-21$ . Il y en a 22. Et  $22 \times 3 = 66$ . Il y a donc un total répété 4 fois (tous ne peuvent être répétés 3 fois seulement, cela ferait 66 et non 67).

### Exercice 3 Problème du voyageur de commerce

Dans sa tournée continentale, notre ami le voyageur de commerce doit passer par 10 villes, dont Versailles qui est la ville de départ et la ville d'arrivée. Certaines de ces villes sont reliées par des lignes ferroviaires (en traits pleins), d'autres par des lignes aériennes (en pointillés). Comment s'y prendre pour réaliser ce périple en utilisant le moins possible les lignes aériennes et en s'interdisant d'emprunter deux fois la même ligne?



## Thème équations

### Exercice 1 Entraînement

Sally et Harry sont compagnons d'entraînement. Ils font des aller et retour entre les points A et B.

1. Sally va de A à B puis, sans perdre une seconde, de B à A à la vitesse de 6 m/s (c'est une vitesse moyenne, à laquelle elle essaie de se tenir). Elle court pendant 99s. Quelle est la distance AB ?
2. Harry va de B à A puis, sans perdre une seconde, de A à B. Il court de B à A à la vitesse de 5 m/s, puis accélère entre A et B pour finir le parcours en 99s. Quelle est sa vitesse sur le parcours de A à B ?
3. Sally et Harry partent exactement au même moment, elle de A, lui de B, et effectuent chacun leur parcours dans les conditions indiquées ci-dessus. Au bout de combien de secondes se rencontrent-ils, une première puis une deuxième fois ?

1. La distance parcourue par Sally est  $d = v \times t = 6 \times 99 = 594$ . Ces 594 m représentent deux fois la distance AB ;  $AB = 297$ m

2. Si on appelle  $w$  la vitesse avec laquelle Harry parcourt le second tronçon :

$99 = \frac{297}{5} + \frac{297}{w}$ . Ce qui donne  $\frac{1}{w} = \frac{1}{297} (99 - 59,4) = \frac{39,6}{297}$ . Donc  $w = \frac{297}{39,6} = 7,5$ . Harry effectue le deuxième tronçon à la vitesse de 7,5 m/s.



3. Tandis que Sally va de A à B, Harry va de B à A. Ils partent au même moment, l'une à 6m/s, l'autre à 5 m/s. Ils se rencontrent à un endroit situé aux  $\frac{5}{11}$  de AB en partant de B (et aux  $\frac{6}{11}$  en partant de A. Sally a donc parcouru  $\frac{6}{11} \times 297 = 162\text{m}$ . Il lui faut pour cela  $\frac{162}{6} = 27$ . Nous deux coureurs se rencontrent une première fois au bout de 27 s. Pour trouver le moment de leur seconde rencontre, on peut les faire courir à l'envers. Comme ils arriveront en même temps, Harry achèvera son parcours à 7,5 m/s et Sally à 6 m/s. Sally courra  $\frac{6}{13,5} \times 297$  à la vitesse de 6 m/s. Il lui faudra  $\frac{297}{13,5} = 22\text{s}$ . C'est donc au bout de 77 s que les coureurs se croisent.

### Exercice 2 Système

Résoudre le système suivant, dont l'inconnue est le triplet  $(x, y, z)$  de nombres réels :

$$\begin{cases} xy + z = 40 \\ yz + x = -40 \\ zx + y = 17 \end{cases}$$

En sommant les deux premières égalités, on obtient :  $(y + 1)(z + x) = 0$ .

1. Recherche de triplets  $(x, -1, z)$  solutions.

On doit résoudre le système d'inconnue  $(x, z)$  :  $\begin{cases} -x + z = 40 \\ zx - 1 = 17 \end{cases}$ . Condition nécessaire  $x(40 + x) - 18 = 0$ .

Les solutions de cette équation du second degré sont  $-20 + \sqrt{418}$  et  $-20 - \sqrt{418}$ , auxquelles sont associés les triplets  $(-20 + \sqrt{418}, -1, 20 - \sqrt{418})$  et  $(-20 - \sqrt{418}, -1, 20 + \sqrt{418})$ .

2. Recherche de triplets  $(x, y, -x)$  solutions.

On doit résoudre le système d'inconnue  $(x, y)$  :  $\begin{cases} xy - x = 40 \\ y - x^2 = 17 \end{cases}$  Condition nécessaire  $x(17 + x^2) - x = 40$

Cette équation du troisième degré s'écrit  $x^3 + 16x - 40 = 0$

On peut factoriser :  $(x - 2)(x^2 + 2x + 20) = 0$  n'a que la solution 2 ; le triplet solution est  $(2, 21, -2)$ .

## Thème : Fonctions

### Exercice 1 Des arcs d'hyperbole

À tout réel  $m$  élément de  $[0, 1]$ , on associe la fonction  $f_m$  définie sur  $[0, 1[$  par :  $f_m(x) = \frac{m}{1-x}$ , et la fonction  $g_m$  définie sur  $[0, 1[$  par :  $g_m(x) = 1 - \frac{m}{x}$

1. Quel est le sens de variation de chacune de ces fonctions ?
2. Résoudre les équations  $f_m(x) = 1$  et  $g_m(x) = 0$ .
3. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $g_m(x) = f_m(x)$  a-t-elle des solutions ?
4. Représenter sur un même graphique les fonctions  $f_m$  et  $g_m$ . On distinguera plusieurs cas, selon le nombre de solutions de l'équation précédente et on fera une figure illustrant chaque cas.

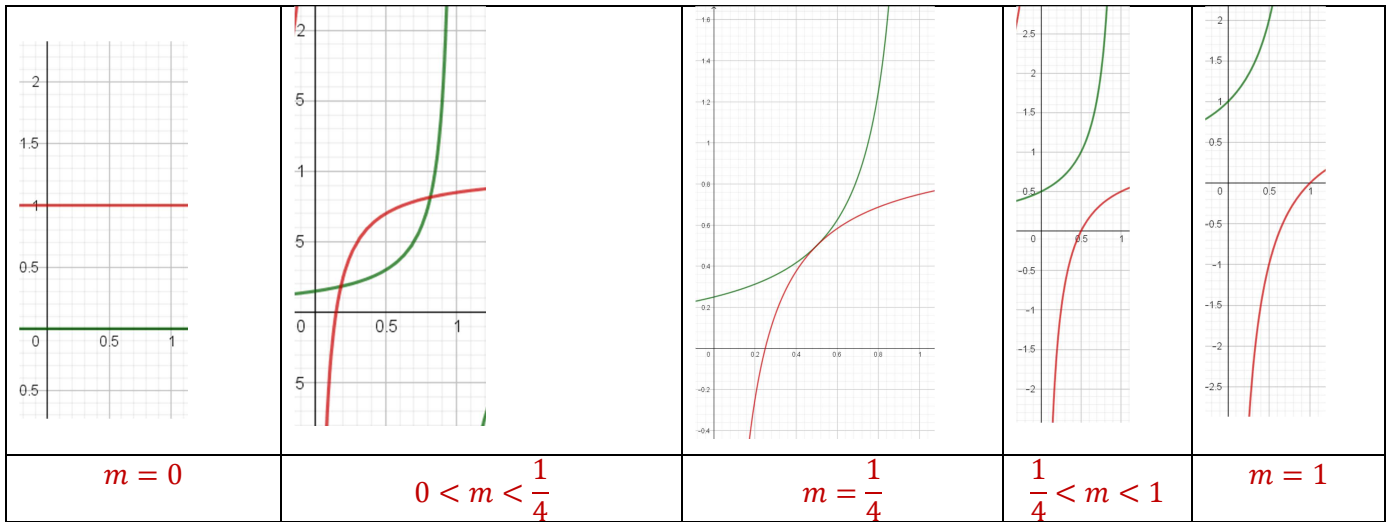
1. La fonction  $f_m$  est croissante (sens de variation de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ), la fonction  $g_m$  est croissante (sens de variation de  $x \mapsto -\frac{1}{x}$ ). Dans le cas  $m = 0$ , elles sont constantes.

2.  $\frac{m}{1-x} = 1$  s'écrit  $m = 1 - x$  ou encore  $x = 1 - m$  (qui est bien dans  $[0, 1[$  sauf si  $m = 0$ , auquel cas il n'y a pas de solution).

$1 - \frac{m}{x} = 0$  s'écrit  $x = m$  (qui est dans  $[0, 1[$  sauf si  $m = 1$ , auquel cas il n'y a pas de solution).

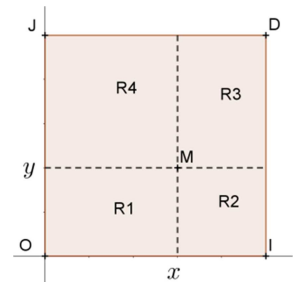
3.  $1 - \frac{m}{x} = \frac{m}{1-x}$  s'écrit (en excluant  $x = 0$  et  $x = 1$ ) :  $x(1-x) - m(1-x) = mx$ , ou encore  $x^2 - x + m = 0$ , qui possède deux solutions pour  $m < \frac{1}{4}$ , une solution  $x = \frac{1}{2}$  pour  $m = \frac{1}{4}$  et pas de solution si  $m > \frac{1}{4}$ .

4.



### Exercice 2 Lignes de niveau

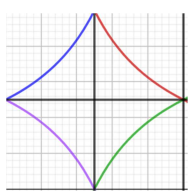
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le carré unité OIDJ. Pour chaque point M intérieur au carré, les parallèles aux axes du repère déterminent quatre rectangles R1, R2, R3 et R4.



- Exprimer en fonction des coordonnées de M les aires des rectangles R1, R2, R3 et R4.
- On note  $A(x, y)$  la plus grande des quatre aires obtenues. Pourquoi est-on assuré que  $\frac{1}{4} \leq A \leq 1$  ?
- Montrer que, pour tout couple  $(x, y)$  de l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $A(y, x) = A(x, y)$ .
- Exprimer  $A(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$  (on distinguera quatre cas).
- Soit  $m$  un élément de  $[\frac{1}{4}, 1]$ . La *ligne de niveau  $m$*  de l'application  $A$  est l'ensemble des points M dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient  $A(x, y) = m$ . Tracer sur un même graphique les lignes de niveau  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ .

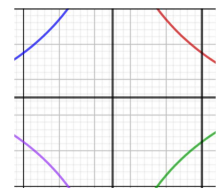
- Dans l'ordre, les aires de R1, R2, R3 et R4 sont  $xy, (1-x)y, (1-x)(1-y), x(1-y)$ .
- On a découpé le carré unité en quatre parties...
- Les figures correspondant aux points de coordonnées  $(x, y)$  et  $(y, x)$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice, comme le carré unité lui-même.
- $A(x, y) = xy$  lorsque  $x \geq \frac{1}{2}$  et  $y \geq \frac{1}{2}$ ,  $A(x, y) = x(1-y)$  lorsque  $x \geq \frac{1}{2}$  et  $y \leq \frac{1}{2}$ ,  $A(x, y) = (1-x)y$  lorsque  $x \leq \frac{1}{2}$  et  $y \geq \frac{1}{2}$  et enfin  $A(x, y) = (1-x)(1-y)$  lorsque  $x \leq \frac{1}{2}$  et  $y \leq \frac{1}{2}$ .

5. Traitons l'exemple  $m = \frac{3}{4}$ . On trace les représentations graphiques des fonctions  $x \mapsto \frac{3}{4x}$ ,



$x \mapsto 1 - \frac{3}{4x}$ ,  $x \mapsto \frac{3}{4(1-x)}$  et  $x \mapsto 1 - \frac{3}{4(1-x)}$  sur les intervalles

correspondants et on n'en garde que les parties contenues dans le carré. Dans le cas qui nous occupe, on obtient une ligne de niveau formée de 4 arcs.



La figure de gauche correspond au cas  $m = \frac{1}{2}$ . Dans le cas  $m = \frac{1}{4}$ , cette ligne

est réduite à un point, le centre du carré. Les tracer sur le même graphique permet de déceler un certain mouvement.

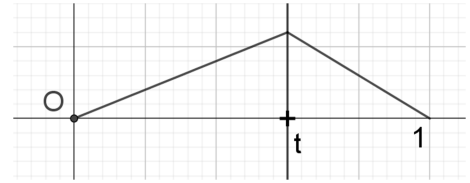
### Exercice 3 Un ensemble de fonctions affines par morceaux...

Pour tout couple  $(t, x)$  de réels compris entre 0 et 1 on pose :

$$\begin{cases} K(t, x) = x(1-t) & \text{si } x \leq t \\ K(t, x) = t(1-x) & \text{si } x \geq t \end{cases}$$

- Résoudre l'équation  $K(t, x) = 0$
- On donne un réel  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ . Étudier la fonction  $k_t$  définie sur  $[0, 1]$  par  $k_t(x) = K(t, x)$ . Montrer que cette fonction présente un maximum.
- En déduire qu'il existe un couple  $(t_0, x_0)$  tel que pour tout couple  $(t, x)$  de réels compris entre 0 et 1 on ait :  $K(t_0, x_0) \geq K(t, x)$ .

1. Les solutions sont les couples dont une des projections est nulle ou égale à 1.
  2. La fonction est affine par morceaux. Sa représentation graphique est la réunion de deux segments de droite. On a  $k_t(t) = t(1 - t)$  et cette valeur est le maximum de la fonction (sur le premier intervalle,  $x \leq t$  et sur le second  $1 - x \leq 1 - t$ ).
  3. On a, pour tout  $x$ ,  $K(t, x) \leq t(1 - t)$
- Sur  $[0, 1]$ , le maximum de  $t \mapsto t(1 - t)$  est obtenu pour  $t = \frac{1}{2}$  et vaut  $\frac{1}{4}$ .  
Le couple cherché est donc  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .



#### Exercice 4 ... qui servent à transformer des fonctions

À toute fonction  $f$ , définie sur  $[0, 1]$ , on associe la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\tilde{f}(t) = \int_0^1 K(t, x)f(x)dx,$$

Où  $K$  a été défini dans l'exercice précédent.

1. Quelle est l'image de la fonction constante égale à 1 sur  $[0, 1]$  (on notera cette fonction  $u$ )?
2. Quelle est l'image de la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = x^2(1 - x)$ ?

1. Par définition,  $\tilde{u}(t) = \int_0^1 K(t, x)dx$ . En utilisant la définition de  $K$  :

$$\tilde{u}(t) = \int_0^t (1 - t)x dx + \int_t^1 t(1 - x)dx = (1 - t) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^t + t \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_t^1 = (1 - t) \left( \frac{t^2}{2} \right) + t \left( 1 - \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} \right).$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{t-t^2}{2} \text{ (c'est aussi l'aire d'un certain triangle, quelques lignes plus haut).}$$

2. Appelons  $f$  cette fonction. On a

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t (1 - t)x^3(1 - x)dx + \int_t^1 tx^2(1 - x)^2dx = (1 - t) \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^t + t \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_t^1$$

$$\tilde{f}(t) = (1 - t)t^4 \left( \frac{1}{4} - \frac{t}{5} \right) + t \left( \frac{1}{30} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5} \right) \text{ à simplifier}$$

#### Exercice 5 ... et des suites

On donne un réel  $t$  appartenant à  $[0, 1]$ . On considère la suite  $(x_n)$  définie par son premier terme  $x_0 = t$  et la

$$\text{relation de récurrence : } \begin{cases} x_{2n+1} = t(1 - x_{2n}) \\ x_{2n+2} = (1 - t)x_{2n+1} \end{cases} \text{ pour tout entier } n.$$

1. Étude de la suite des termes impairs. On pose, pour tout  $n$ ,  $y_n = x_{2n+1}$ . Peut-on trouver des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout entier  $n$  :  $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$  ?  
La suite  $(y_n)$  est-elle convergente ?
2. On pose, de la même manière,  $z_n = x_{2n}$ . La suite  $(z_n)$  est-elle convergente ?
3. La suite  $(x_n)$  est-elle convergente ?