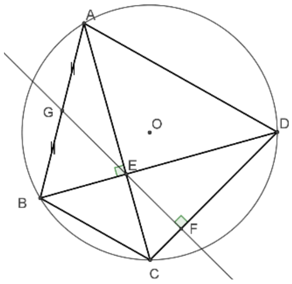
ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie VERSAILLES

Collège François Furet ANTONY

À l'origine du zéro

Brahmagupta (598 – 670), astronome et mathématicien indien, travaillait à l'observatoire de Ujjain. On le connaît par deux ouvrages, le *Brāhmasphutasiddhānta* et le *Khandakhādyaka*, qui l'un et l'autre traitent principalement d'astronomie et comportent quelques chapitres de mathématiques, dans lesquels il donne notamment un statut au 0 (différence entre un nombre et lui-même, 0 sépare les nombres positifs – les *biens* – des nombres négatifs – les *dettes*) et fournit quelques règles opératoires. Résolvant quelques équations, il introduit *l'identité de Brahmagupta* (voir en exercice). En géométrie, on connaît la *formule de Brahmagupta* donnant l'aire d'un quadrilatère inscrit dans un cercle en fonction de la longueur de ses côtés, extension de la *formule de Héron*, et le *théorème de Brahmagupta* : pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle dont les diagonales sont perpendiculaires, la droite perpendiculaire à un côté passant par le point d'intersection des diagonales passe par le milieu du côté opposé.



Brahmagupta ne fournit pas de preuve de ses méthodes ou de ses résultats, dont la diffusion était évidemment limitée. La démonstration est aujourd'hui indispensable dans l'activité mathématique.

Stage ouvert aux collégiennes et collégiens des classes de troisième – 23 et 24 octobre 2023

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHÉNIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Rémi NIGUES (Collège Auguste Renoir, ASNIERES)

Professeurs accompagnants : Khaled ZAOUI (Collège Albert Camus, BOIS COLOMBES), Frédérique CLIN (collège Martin Luther King, BUC), Tony PAQUET (Collège Magellan, CHANTELOUP LES VIGNES)

Emploi du temps
Lundi 23 octobre 2023

Antony		*Versailles*			
10.00	**Accueil**	**10.00**	**Accueil**		
10.10	**Géométrie CS**	**10.10 11.15**	**Exposé « Écrire les nombres » Film « Formats de papier »**		
12.10	**Repas**	**11.20**	**Géométrie plane SD**	**Nombres RN**	**Dénombrement CD**
13.00	**Nombres CS**	**13.15**	**Repas**		
15.00	**Pause**	**14.00**	**Dénombrement CD**	**Aires et volumes CH ou EL**	**Géométrie plane SD**
15.10	**Films**	**16.00**	**Film « Bulles de savon »**		

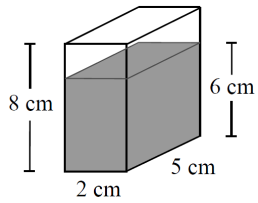
Mardi 24 octobre 23

Antony		*Versailles*			
10.00	**Aires et volumes XG**	**10.00**	**Aires et volumes EL ou CH**	**Géométrie plane SD**	**Nombres RN**
12.00	**Repas**	**12h00**	**Repas**		
12. 45	**Dénombrement NF**	**12h45**	**Nombres RN**	**Dénombrement CD**	**Aires et volumes EL ou CH**
14.30	**Quiz**	**14h45**	**Pause**		
15.45 16.30	**Exposé « Écrire les nombres »**	**15h00 16h30**	**Quiz**		

AIRES ET VOLUMES

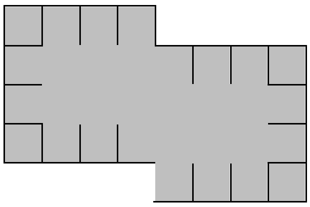
1. Des hauteurs différentes

Un prisme fermé dont la base est rectangulaire a une hauteur de 8 cm et tient sur une de ses faces de dimensions 2 cm sur 5 cm.
Le prisme contient alors de l'eau d'une profondeur de 6 cm, comme dans la figure ci-contre.
On bascule le prisme de manière qu'il tienne sur la face ayant la plus grande aire.
Quelle est la nouvelle profondeur de l'eau ?



Le volume V d'eau contenue dans le prisme est celui d'un parallélépipède rectangle de base de dimensions 2 cm sur 5 cm et de hauteur 6 cm, soit, en cm^3, $V = 2 \times 5 \times 6 = 60$.
Quand on bascule le prisme de manière qu'il tienne sur la face ayant la plus grande aire, le volume d'eau est celui d'un parallélépipède rectangle de base de dimensions 5 cm sur 8 cm et de hauteur h,
soit $V = 5 \times 8 \times h$.
On en déduit $h = \frac{60}{40}$.

2. L'aire du parterre

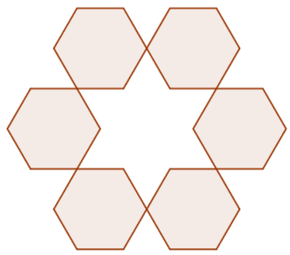


Dans un parc municipal, un parterre de fleurs est constitué de deux carrés identiques accolés. La longueur du segment de contact entre ces carrés est 4 m. Le périmètre du parterre est 44 m.
Quelle est son aire ?

Si on appelle p le périmètre d'un des carrés, le périmètre du parterre est $P = 2p - 8$. Il s'ensuit que $p = 26$.
Le côté des carrés est donc 6,5 m, l'aire d'un carré 42,25 m² et l'aire totale du parterre 84,5 m².

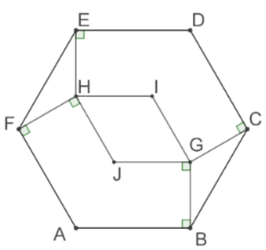
3. Une étoile

La figure ci-contre est composée de six hexagones réguliers identiques associés pour former une « étoile » centrale. Si chaque hexagone a pour aire 12, quelle est l'aire de l'étoile ?

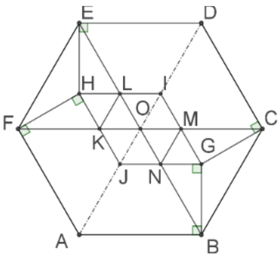


Les six sommets « rentrants » de l'étoile sont les sommets d'un hexagone régulier identique aux six autres. Les six « pointes » ont chacune pour aire un sixième de l'aire d'un des hexagone.
Au total, l'étoile a l'aire de deux hexagones soit 24.

4. Un losange dans un hexagone



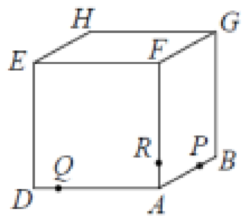
Dans la figure ci-contre, l'aire de l'hexagone régulier ABCDEF est 6.
Les perpendiculaires en B et C aux côtés [AB] et [CD] se coupent en G, les perpendiculaires en E et F aux côtés [DE] et [AF] se coupent en H. Les perpendiculaires en G à [BG] et en H à [FH] se coupent en J et les perpendiculaires en G à [CG] et en H à [EH] se coupent en I.
Quelle est l'aire du polygone HIG J ?



Commençons par observer que le quadrilatère HIGJ est un losange : c'est un parallélogramme, car ses côtés [HI] et [JG] sont parallèles aux côtés [ED] et [AB] de l'hexagone, donc parallèles entre eux, et il en va de même pour les côtés [IG] et [HJ], parallèles à [AF] et [CD]. C'est un losange, car ses diagonales sont perpendiculaires (l'une est supportée par (AD), l'autre par la médiatrice commune des côtés opposés [BC] et [EF]. Le losange HIGJ est formé de huit triangles équilatéraux isométriques, chacun ayant pour aire $\frac{1}{9}$ de l'aire d'un des six triangles équilatéraux d'aire 1, tels AOB, qui forment l'hexagone (par exemple, le point J est situé au tiers du segment [OA] à partir de O, le centre de gravité G du triangle OBC donne ce rapport, en s'appuyant sur le parallélisme entre (JG) et (AB). Au total, l'aire de HIGJ est $\frac{8}{9}$.

5. Pyramide dans un cube

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont les arêtes ont pour longueur 100, un point P situé sur $[AB]$, un point Q situé sur $[AD]$ et un point R situé sur $[AF]$ de manière que $AP = x, AQ = x + 1$ et $AR = \frac{x+1}{2x}$, où x désigne un nombre réel non nul.
Déterminer pour quelle valeur de x le volume de la pyramide $APQR$ est égal au volume du cube divisé par 2 000.
(On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au dixième près.



Si on prend comme base le triangle APQ (rectangle en A), comme la hauteur associée à cette base est le segment $[AR]$, le volume de la pyramide APQR est égal à $V = \frac{1}{3} \times \frac{AP \times AQ}{2} \times AR = \frac{1}{6} \times x(x+1) \times \frac{x+1}{2x}$

soit $V = \frac{1}{12}(x+1)^2$.

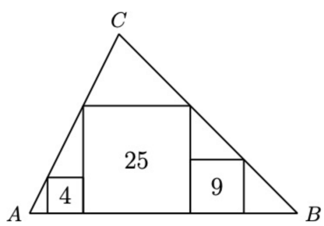
Le cube a pour volume $100^3 = 1\ 000\ 000$.

On cherche donc x tel que $\frac{1}{12}(x+1)^2 = \frac{1}{2\ 000} \times 1\ 000\ 000 = 500$ soit $(x+1)^2 = 6\ 000$

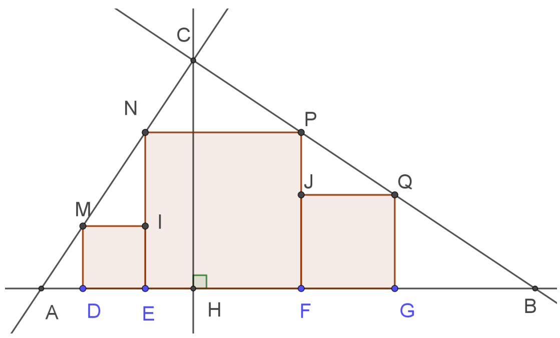
soit $x = \sqrt{6\ 000} - 1$ d'où $x \approx 76{,}6$ est une valeur approchée de x à 10^{-1} près.

6. Carrés inscrits

Déterminer l'aire du triangle ABC sachant que les trois carrés inscrits de la figure ci-contre ont pour aire 4, 25 et 9.



Avec les notations de la figure ci-contre, les triangles rectangles ADM, AEN et AHC sont semblables (mêmes mesures d'angles) donc si on note AD $= x$ et CH $= h$, alors
$\frac{\text{AD}}{\text{DM}} = \frac{\text{AE}}{\text{EN}} = \frac{\text{AH}}{\text{HC}}$ soit $\frac{x}{2} = \frac{x+2}{5} = \frac{x+2+\text{EH}}{h}$
La première égalité donne $x = \frac{4}{3}$.
De même, si on note BG $= y$, les triangles BGQ, BFP et BHC sont semblables donc
$\frac{\text{BG}}{\text{GQ}} = \frac{\text{BF}}{\text{FP}} = \frac{\text{BH}}{\text{CH}}$ soit $\frac{y}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{y+3+(5-EH)}{h}$
La première égalité donne $y = \frac{9}{2}$.



L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}}{2}$.

$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FG} + \mathrm{GB} = \frac{4}{3} + 2 + 5 + 3 + \frac{9}{2} = \frac{95}{6}$

D'autre part, $\frac{x}{2} = \frac{x+2+\mathrm{EH}}{h}$ s'écrit $\frac{2}{3} = \frac{\frac{10}{3}+\mathrm{EH}}{h}$ soit $2h = 10 + 3\mathrm{EH}$ et $\frac{y}{3} = \frac{y+3+(5-\mathrm{EH})}{h}$ s'écrit $\frac{3}{2} = \frac{\frac{25}{2}-\mathrm{EH}}{h}$

Soit $3h = 25 - 2\mathrm{EH}$.

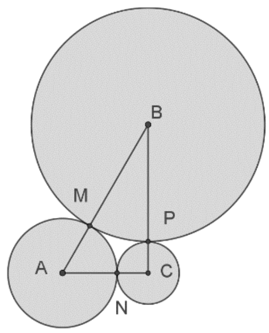
On en tire $30 + 9\mathrm{EH} = 6h = 50 - 4\mathrm{EH}$ d'où $13\ \mathrm{EH} = 20$ soit $\mathrm{EH} = \frac{20}{13}$ et $h = 5 + \frac{3}{2} \times \frac{20}{13} = \frac{95}{26}$.

On en déduit $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \frac{95}{6} \times \frac{95}{13} = \frac{9\,025}{156}$

7. Interstice entre trois disques

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est un « demi-triangle équilatéral » (l'angle en A mesure 60°) de côté 12.
Il est recouvert par trois disques, de centres A, B et C, tangents deux à deux et qui laissent apparaître le triangle curviligne MNP.
Quelle est l'aire de ce triangle curviligne ?

(on démontre que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$)



Commençons par déterminer les rayons x, y, z des cercles de centres respectifs A, B et C. Ils vérifient (condition de contact) :
$x + y = 12, y + z = 6\sqrt{3}, z + x = 6$, soit , $z = x = 6 - x,, y = 6\sqrt{3} - z = 6\sqrt{3} - 6 + x, x = 12 - y = 18 - 6\sqrt{3} - x$, ce qui conduit à $x = 3(3 - \sqrt{3}), y = 3 + 3\sqrt{3}, z = 3\sqrt{3} - 3$.

L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{12\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$.

La partie de sa surface couverte par les trois secteurs circulaires est composée de $\frac{1}{6}$ de la surface du disque de centre A, $\frac{1}{12}$ de celle du disque de centre B et $\frac{1}{4}$ de celle du disque de centre C.

L'aire du triangle curviligne est donc : $\mathcal{T} = 18\sqrt{3} - \pi(\frac{1}{6}(3(3-\sqrt{3}))^2 + \frac{1}{12}(3+3\sqrt{3})^2 + \frac{1}{4}(3\sqrt{3}-3)^2)$

Tous calculs faits : $\mathcal{T} = 18\sqrt{3} - \pi(18 - 7\sqrt{3})$.

GÉOMÉTRIE PLANE

1. Vrai-Faux

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

a) Si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA = KB$.

b) Si $KA = KB$, alors K est le milieu de $[AB]$.

c) Si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA + KB = AB$.

d) Si $KA + KB = AB$, alors K est le milieu de $[AB]$.

e) Si $K \in [AB]$, alors $KA + KB = AB$.

f) Si $KA + KB = AB$, alors $K \in [AB]$.

a) V b) F (tout autre point de la médiatrice de $[AB]$ vérifie aussi l'égalité) c) V

d) F (tout autre point du segment $[AB]$ vérifie aussi l'égalité)

e) et f) V (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire et donc caractérisation de l 'appartenance au segment $[AB]$)

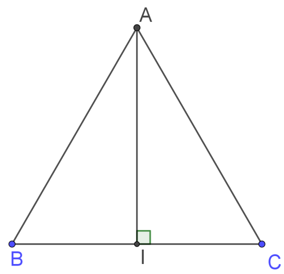
2. Dans un triangle équilatéral

Déterminer la hauteur d'un triangle d'un triangle équilatéral de côté a.

Soit I le milieu du segment [BC]. Comme ABC est un triangle équilatéral, I est aussi le pied de la hauteur issue de A. On applique alors le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I :

$AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2.$

La hauteur du triangle équilatéral ABC est donc $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.



3. Hauteurs dans un triangle

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On trace les droites

- D_A parallèle à (BC) passant par A ;
- D_B parallèle à (CA) passant par B ;
- D_C parallèle à (AB) passant par C.

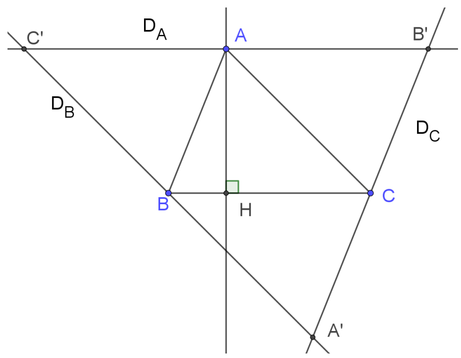
Les droites D_{A} et D_{B} se coupent en C'. Les droites D_{B} et D_{C} se coupent en A'. Les droites D_{C} et D_{A} se coupent en B'.

a. Que représente la droite (AH) pour le segment [B'C'] ?

b. Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

a. Le quadrilatère ABCB' est un parallélogramme car la droite D_{A}, qui est aussi la droite (AB'), est parallèle à la droite (BC) et, de même, la droite D_{C} est parallèle à la droite (AB). En particulier AB' = BC. On démontre de même que BC = C'A. D'où AB' = C'A. D'autre part, la droite (AH) est perpendiculaire à (BC) donc à D_{A} c'est-à-dire (C'B'). La droite (AH) est donc la médiatrice de [C'B'].

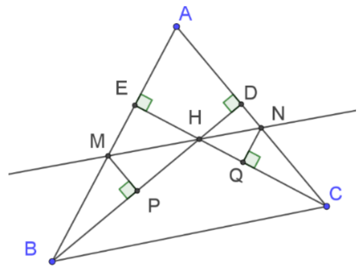
b. On démontre de même que la hauteur issue de B est la médiatrice de [C'A'] et que la hauteur issue de C est la médiatrice de [A'B']. Les médiatrices du triangles A'B'C' sont concourantes donc les hauteurs du triangle ABC le sont aussi.



On appelle orthocentre le point de concours de ces trois hauteurs.

4. Des perpendiculaires créent des parallèles

Les hauteurs (BD) et (CE) du triangle ABC se coupent en H, orthocentre du triangle. Une droite passant par H coupe [AB] en M et [AC] en N. On appelle P le projeté de M sur (BD) et Q le projeté de N sur (CE).
Montrer que (EP) et (DQ) sont parallèles.

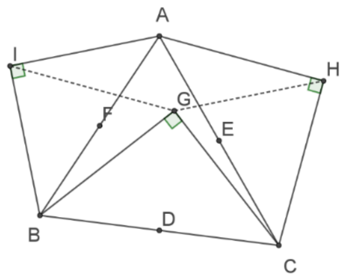


Les triangles HMP et HND sont rectangles et ont des angles aigus opposés par le sommet : ils sont semblables. Il en est de même des triangles HEM et HQN. On déduit des égalités de rapports de longueurs que $\frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{HD}}$ et $\frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{HQ}}$ sont tous les deux égaux à $\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HN}}$ et donc égaux, ce qui permet de conclure à la similitude des triangles HEP et HQD (ils ont aussi des angles opposés par le sommet).

On conclut à l'égalité des angles $\widehat{\mathrm{HPE}}$ et $\widehat{\mathrm{HDQ}}$ qui occupent la position d'alternes-internes par rapport aux droites (EP) et (DQ). Ces droites sont donc parallèles.

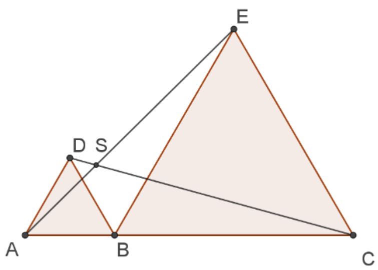
5. Apparition d'un parallélogramme

On donne un triangle ABC et trois triangles rectangles isocèles AIB, BGC et CHA dont les sommets des angles droits sont, pour I et H, extérieurs au triangle ABC tandis que G lui est intérieur.
Montrer que AIGH est un parallélogramme.



Comparons les triangles GIB et ABC. Les angles $\widehat{\mathrm{GBI}}$ et $\widehat{\mathrm{ABC}}$ ont la même mesure car ils sont la réunion de l'angle $\widehat{\mathrm{GBA}}$ et d'un angle de mesure 45° ($\widehat{\mathrm{GBC}}$ et $\widehat{\mathrm{ABI}}$). Les côtés [BI] et [GB] sont aussi des côtés des angles droits de triangles rectangles isocèles dont les hypoténuses sont [AB] et [BC]. Le triangle GIB est donc une « réduction » du triangle ACB. Plus précisément $\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{GI}}{\mathrm{AC}}$. Or, dans le triangle ACH rectangle isocèle en H, $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit l'égalité des longueurs IG et AH. Le même raisonnement conduit à l'égalité des longueurs GH et AI. Le quadrilatère AIGH a ses côtés opposés de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

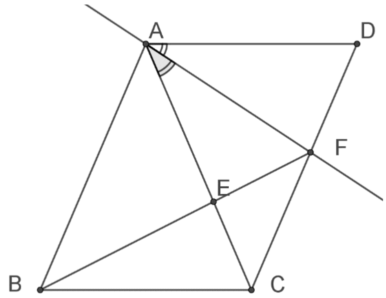
6. Tarif unique 60°



Les triangles ABD et BCE sont équilatéraux (de sens direct) et le point B appartient au segment [AC]. Les segments [AE] et [CD] se coupent en S. Combien mesure l'angle $\widehat{ASD}$?

Observons que les triangles BDC et BAE ont un angle mesurant 120° compris entre des côtés homologues de même longueur. Ces triangles sont donc égaux. On en déduit l'égalité des angles $\widehat{\mathrm{EAB}}$ et $\widehat{\mathrm{CDB}}$.
Dans le triangle ASD, l'angle en S a pour supplémentaire la somme de l'angle $\widehat{\mathrm{CDB}}$, de l'angle $\widehat{\mathrm{BDA}}$ et de l'angle $\widehat{\mathrm{DAS}}$, mais comme $\widehat{\mathrm{CDB}}$ est égal à $\widehat{\mathrm{EAB}}$, la somme de ces trois angles, qui forment un supplément à $\widehat{\mathrm{ASD}}$, est 120°.
L'angle $\widehat{\mathrm{ASD}}$ mesure donc 60°.

8. Dans un parallélogramme



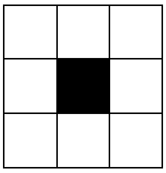
Le parallélogramme ABCD est tel que la diagonale [AC] a la même longueur que les côtés parallèles [AB] et [CD]. La bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{CAD}}$ coupe le côté [CD] en F. La droite (BF) coupe [AC] en E.
Le triangle ABE est isocèle de sommet principal E.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$?

Le triangle AEB est isocèle de sommet principal E. Ses angles à la base ont même mesure et l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est en position alterne-interne avec l'angle $\widehat{\mathrm{ACD}}$. Les triangles AEB et ECF ont donc des angles de mêmes mesures et donc le triangle ECF est isocèle de sommet principal E. Il s'ensuit que les triangles BEC et AEF ont deux côtés homologues de même longueur définissant leur angle en E. Ils sont égaux et donc AF = BC.
Le triangle AFD est de ce fait isocèle de sommet principal A. Si on appelle x la mesure de l'angle en D, les angles de ce triangle mesurent x, x et $\frac{x}{2}$. Il s'ensuit que $5x = 360°$.
L'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ mesure 72°.

DÉNOMBREMENT

1. Le centre est plus fort que le bord

On considère un tableau carré divisé en cases carrées identiques. On note n le nombre de cases sur un côté.



Exemple : dans le tableau carré ci-contre, toutes les cases sont identiques, il y a 8 cases sur le bord et une case au centre.
Dans le cas général, quels sont les entiers n pour lequel le centre contient plus de cases que le bord ?

Supposons que le centre soit un carré de p cases de côté. Le bord est alors constitué de $4p + 4$ cases (autant de lignes et de colonnes que le carré du milieu, plus les quatre coins. Le problème s'écrit donc :

$$p^2 > 4p + 4.$$

$$p^2 - 4p - 4 = (p - 2)^2 - 8$$

On doit donc réaliser $p - 2 \geq 3$, ce qui conduit à $p \geq 5$ et donc $n \geq 7$.

2. Pyramide humaine

Sept gymnastes réalisent une pyramide humaine, comme celle représentée ci-contre. Ils sont numérotés de 1 à 7 et la contrainte à réaliser est que le pied de l'un ne peut en toucher un autre que si le numéro de ce dernier est plus élevé. Combien y a-t-il de pyramides possibles ?

Il y a six gymnastes qui ont un numéro plus élevé que celui qui est au sommet de la pyramide. Celui-ci porte donc le numéro 1. On ne peut trouver le numéro 2 parmi les quatre gymnastes du premier niveau, car ce nombre est inférieur à tous ceux qui demeurent après avoir affecté le 1. En revanche, on peut y trouver le 3. La partie « gauche » serait composée de 2 et de deux autres nombres en soutien : un sur cinq pour la position gauche, puis un sur quatre pour la droite : 20 distributions possibles. La partie « droite » est alors composée de 3 nombres, le plus petit nécessairement au-dessus, ce qui donne deux distributions possibles à droite pour une à gauche. On parvient à 40. Comme on peut placer le 2 à droite aussi bien qu'à gauche, il y a 80 pyramides possibles.

3. Passe ton bac d'abord !

On a aménagé une salle d'examen de sorte qu'elle contienne exactement n rangées de m tables, m et n étant supérieurs à 3. Lorsqu'il est assis à sa table, un candidat a pour *voisins* les candidats assis devant lui sur la même rangée ou les rangées immédiatement voisines, les candidats situés immédiatement à sa droite ou à sa gauche, et ceux situés derrière lui, sur la même rangée ou les rangées immédiatement voisines. Le maximum de l'effectif des *voisins* d'un candidat est donc 8, certains en ont moins.
La tradition veut que les candidats se saluent en échangeant une poignée de mains. Dans la salle, 1 020 poignées de mains ont été échangées. Combien y a-t-il de candidats ?

Les candidats assis dans les rangées 2 à $n - 1$ et sur les lignes 2 à $m - 1$ (il y en a $(n - 2)(m - 2)$) ont 8 *voisins*.
Les candidats assis dans les rangées 1 et n et sur les lignes 2 à $m - 1$ (il y en a $2(m - 2)$) ont 5 *voisins*.
Les candidats assis dans les rangées 2 à $n - 1$ et sur les lignes 1 et m (il y en a $2(n - 2)$) ont 5 *voisins*.
Les candidats assis dans les rangées 1 et n et sur les lignes 1 et m (il y en a 4) ont 3 *voisins*.

Au total, $8(n-2)(m-2)+10(m-2)+10(n-2)+12$ voisins, mais une poignée de mains en engage 2, donc il y a $4(n-2)(m-2)+5(m+n-4)+6$ poignées de mains. Après réduction :

$$4mn-3m-3n+2=1\,020$$

Ou encore $4mn-3(m+n)=1\,018$

On utilise un tableau pour chercher une solution :

m \ *n*	10	11	12	13	14
10	340	377	414	451	488
11	377	418	459	500	541
12	414	459	504	549	594
13	451	500	549	598	647
14	488	541	594	647	700
15	525	582	639	696	753
16	562	623	684	745	806
17	599	664	729	794	859
18	636	705	774	843	912
19	673	746	819	892	965
20	710	787	864	941	1018

1 018 apparaît comme correspondant à une salle de 14 rangées de 20 places (ou vice-versa), dans laquelle ont pris place 280 candidats

4. Des multiples de 12

Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs de 6 chiffres, dont l'écriture comporte uniquement les chiffres 0 et 2, et qui sont divisibles par 12 ?

Précision : l'écriture d'un nombre à six chiffres ne peut pas débuter par un 0.

L'entier considéré est divisible par 12 signifie qu'il est divisible par 3 et par 4.
Il ne sera divisible par 4 que si le chiffre des unités est 0 (il ne peut se terminer par 02 ou par 22).
Il ne sera divisible par 3 que si la somme de ses chiffres est un multiple de 3, c'est-à-dire la somme des « ses » 2 (il y en a au moins un) est un multiple de 3. La seule possibilité est d'avoir trois 2 (car les sommes 10, 8, 4 et 2 ne sont pas multiples de 2), l'un d'eux étant le chiffre le plus à gauche.
Si le nombre se termine par 00, les seules possibilités pour les quatre autres chiffres sont 2220, 2202, 2022.
Si le nombre se termine par 20, les seules possibilités pour les quatre autres chiffres sont 2200, 2020, 2002.
Il y a donc au total six entiers solutions :
222 000, 220 200, 202 200, 220 020, 202 020, 200 220.

5. Portes ouvertes ou fermées

Une salle contient quatre portes. Chacune des quatre portes est aléatoirement ouverte ou fermée.
Quelle est la probabilité qu'exactement deux des quatre portes soient ouvertes ?

Chaque porte a 2 « états » possibles, soit ouverte ou fermée.
Donc, il y a 2 × 2 × 2 × 2 = 24 = 16 combinaisons possibles d'états pour les 4 portes.
Si exactement deux des quatre portes sont ouvertes, ces portes peuvent être soit la 1^e^ et la 2^e^, soit la 1^e^ et la 3^e^, soit la 1^e^ et la 4^e^, soit la 2^e^ et la 3^e^, soit la 2^e^ et la 4^e^, soit la 3^e^ et la 4^e^.
Donc, il y a 6 manières dont deux des quatre portes peuvent être « ouvertes ».
Puisque chacune des portes est aléatoirement ouverte ou fermée, alors la probabilité qu'exactement deux des quatre portes soient ouvertes est égale à $\frac{6}{16}$ soit $\frac{3}{8}$.

6. Tuiles à placer

On doit placer 16 tuiles carrées dans un quadrillage 4×4. Il y a quatre tuiles de chacune des couleurs suivantes : vert, jaune, rouge et noir. Chaque rangée doit contenir une tuile de chaque couleur. Sachant qu'aucune tuile ne peut être de la même couleur que ses voisines (deux tuiles sont des voisins si elles se touchent le long d'un côté ou à un coin).
De combien de façons différentes peut-on disposer ces tuiles ?

Notons respectivement V, J, R et N une tuile de couleur vert, jaune, rouge et noir.
Il y a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités pour remplir la première rangée du tableau : 4 choix pour la première couleur, 3 pour la deuxième, 2 pour les troisième et 1 seul choix pour la dernière (on imagine un arbre de choix pour comprendre le principe multiplicatif).
Montrons qu'une fois cette première rangée choisie, le tableau est déterminé. Les cas étant identiques, supposons que la première rangée est V J R N comme sur la figure ci-contre.
Avec les règles imposées, dans la première case de la deuxième rangée, on ne peut placer ni V ni J. Si on place N dans cette première case, dans la deuxième case, on ne pourra placer ni V, ni J, ni R.
En revanche, si on place R dans la première case de la deuxième rangée, on devra placer N dans la deuxième case (ni V, ni J, ni R), puis V dans la troisième et enfin J.
De même, une fois la deuxième rangée remplie, la troisième est déterminée et de même pour la quatrième.

V	J	R	N
~~N~~ R	N		

Au final, la première rangée détermine tout le tableau. Il y a donc 24 façons différentes de disposer les tuiles.

7. Choix de barrettes

Le tiroir de barrettes de Lucie contient 4 barrettes rouges, 5 barrettes bleues et 7 barrettes vertes. Chaque matin, elle choisit au hasard une barrette qu'elle portera pour la journée. Elle remet cette barrette dans son tiroir chaque soir. Un matin, Maxime enlève k barrettes avant que Lucie ne puisse faire son choix quotidien. La probabilité pour que Lucie choisisse une barrette rouge est alors doublée.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

Avant que Maxime d'enlève des barrettes, Lucie avait au total 16 barrettes et, puisqu'elle choisit sa barrette au hasard, la probabilité pour qu'elle choisisse une barrette rouge est $\frac{4}{4+5+7} = \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$.
Une fois que Maxime a enlevé k barrettes, la probabilité que Lucie choisisse une barrette rouge est doublée soit vaut $\frac{1}{2}$. Le nombre total de barrettes restant dans le tiroir doit donc être le double du nombre de barrettes rouges et donc un multiple de 2 à la fois strictement inférieur à 16 et supérieur ou égal à 8, ce qui donne 8, 6, 4 ou 2. Les valeurs de k correspondantes sont 8, 10, 12 et 14.
On vérifie que chacune de ces valeurs de k convient :

- On peut avoir $k = 8$ en retirant par exemple les 5 barrettes bleues et 3 barrettes vertes.
- On peut avoir $k = 10$ en retirant par exemple 1 barrette rouge, 5 barrettes bleues et 4 barrettes vertes.
- On peut avoir $k = 12$ en retirant par exemple 2 barrettes rouges, les 5 barrettes bleues et 5 barrettes vertes.
- On peut avoir $k = 14$ en retirant par exemple 3 barrettes rouges, les 5 barrettes bleues et 6 barrettes vertes.

NOMBRES

1. Nombres à diviseurs singuliers

Un entier n est dit « nombre à diviseurs singuliers » si, pour chacun de ses diviseurs d, un au moins des nombres $d-1$ et $d+1$ est un nombre premier.
a. Soit n un nombre à diviseurs singuliers. Quels sont les entiers impairs susceptibles d'être des diviseurs de n ?
b. Quelles sont les puissances de 2 susceptibles d'être des diviseurs de n ?
c. Quel est le plus grand des nombres à diviseurs singuliers ?

a. Tout nombre impair a pour prédécesseur et pour successeur un nombre pair. On ne parle pas de 1, évidemment. Parmi les nombres pairs, seul 2 est premier. Le seul nombre impair acceptable est donc 3.
b. Si une puissance de 2 divise n, toutes les puissances de 2 d'exposant inférieur divisent n. On peut par conséquent cherche la plus petite puissance de 2 dont le prédécesseur et le successeur sont composés. Tâtonnons : 2 (1 et 3), 4 (3 et 5), 8 (7 et 9), 16 (15 et 17), 32 (31 et 33) ont toutes au moins un « voisin » premier, mais pas 64, car 63 = 7*9 et 65 = 5*13. Les puissances de 2 admissibles sont donc 2, 4, 8, 16, 32.
c. $2^5 \times 3 = 96$. Les diviseurs de 96 sont : $1, 96, 2, 48, 3, 32, 4, 24, 6, 16, 8, 12$ et on vérifie qu'ils ont tous un « voisin » premier.

2. Les tribulations de la moyenne

Dans ce problème, on étudie les ensembles d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 100 et dont le nombre 100 lui-même est un élément. Pour chacun de ces ensembles, on peut calculer la moyenne de la série constituée par ses éléments, du plus petit au plus grand (100). Quel est le plus petit entier parmi les moyennes de ces séries ?

La réflexion est fondée sur deux points : si on adjoint à une série statistique un nombre inférieur à sa moyenne, la moyenne baisse, et si on lui adjoint un nombre supérieur à sa moyenne, la moyenne augmente. La série constituée du seul nombre 100 a pour moyenne 100. La série {1, 100} a pour moyenne 50,5, la série {1, 2, 100} a pour moyenne $\frac{103}{3}$, etc. et on parvient à {1, 2, 3, …, 12, 13, 100} dont la moyenne est $\frac{191}{14}$. Jusque-là, les nombres insérés dans la série provoquaient une baisse de la moyenne, mais comme $\frac{191}{14}$ est compris entre 13 et 14, toute insertion d'un entier supérieur ou égal à 14 augmenterait la moyenne. On peut atteindre l'entier 14 comme moyenne avec la série {1, 2, 3, …, 11, 12, 18, 100}.

3. Combien de carrés ?

On demande de déterminer les entiers naturels p pour lesquels il existe un entier n inférieur ou égal à 800 tel que $p^2 = 8n + 1$.
Observons pour commencer que les entiers cherchés sont impairs, le carré d'un entier pair étant multiple de 4. Posons $p = 2k + 1$. Le problème s'écrit $4k^2 + 4k + 1 = 8n + 1$, ou encore $2n = k^2 + k$.
Nous souhaitons que $k^2 + k \leq 1\,600$. Il est donc nécessaire que $k \leq 39$, ce qui conduit à $p \leq 79$ (on ne parle que des entiers impairs).

4. Nombres battus

Dans cet exercice, on appelle *nombre battu* tout entier naturel N possédant les propriétés suivantes (on écrit les nombres dans le système décimal, les propriétés suivantes montrent que 0 ne peut pas être utilisé) :
1. N est un multiple de 11 ;
2. N est un multiple de 12 ;
3. Tout entier formé avec les mêmes chiffres que N apparaissant le même nombre de fois est un multiple de 12.

Combien y a-t-il de *nombres battus* s'écrivant avec 5 chiffres ?

Tout multiple de 12 est pair, et a donc un chiffre des unités pair. Ce chiffre pouvant occuper n'importe quelle place, on en déduit que tous les chiffres composant l'écriture décimale de N sont pairs.
N est un multiple de 12, donc multiple de 4. L'écriture décimale de tout multiple de 4 se termine par un nombre de deux chiffres lui aussi multiple de 4. Les possibilités sont : 24, 28, 44, 48, 64, 68, 84, 88, mais si un nombre appartient à cette liste, son « renversé » doit aussi lui appartenir, il ne reste donc que 44, 48, 84 et 88. L'écriture de N en comporte que des 4 et des 8.
Comme N est un multiple de 12, c'est un multiple de 3 et donc la somme de ses chiffres est un multiple de 3 :
- Le nombre s'écrivant avec cinq « 8 » ne convient pas ;
- Les nombres s'écrivant avec quatre « 8 » et un « 4 » peuvent convenir ;
- Les nombres s'écrivant avec trois « 8 » et deux « 4 » ne conviennent pas ;
- Les nombres s'écrivant avec deux « 8 » et trois « 4 » ne conviennent pas ;
- Les nombres s'écrivant avec un « 8 » et quatre « 4 » peuvent convenir ;
- Le nombre 44 444 ne convient pas.
Reste à examiner la première condition : N est un multiple de 11.

On applique le critère de divisibilité par 11 ou on fait un examen exhaustif : les solutions sont 44 484 et 48 444.

5. Dix, onze, douze, elles seront toutes rouges
Matéo, qui vient d'apprendre à compter (c'est un enfant, il commence par 1), attribue une couleur à chaque entier. Il décide que tout entier impair sera rouge, que pour tout entier n, les nombres n et $4n$ seront de la même couleur et que chaque entier n sera de la même couleur qu'au moins un des deux nombres $n + 2$ et $n + 4$.
Montrer que tous les entiers seront rouges.

Supposons qu'il existe un entier $m \geq 1$ pour lequel le nombre (pair) $2m$ ne soit pas rouge. Il en est alors de même du nombre $8m$ et les conditions posées indiquent que l'un au moins des deux nombres $8m + 2$ et $8m + 4$ n'est pas rouge. Mais $8m + 4 = 4(2m + 1)$ est le produit par 4 du nombre impair $2m + 1$ et donc il est rouge. Il ne reste que $8m + 2$ comme possibilité, non rouge comme son prédécesseur $8m$. Mais alors $8m + 2$ et $8m$ n'étant pas rouges, $8m - 2$ ne l'est pas non plus… et ça continue, $8m - 4$ n'est pas rouge, seulement voilà, $8m - 4 = 4(2m - 1)$ produit d'un nombre impair par 4, donc rouge. Notre supposition est fausse. Tous les nombres entiers non nuls sont rouges…

6. Sommes et moyennes
Charles écrit une liste de quatre entiers. Il calcule la moyenne de chaque groupe de trois entiers qu'il peut former à partir des quatre entiers. Ces moyennes sont 32, 39, 40, 44.
Parmi les quatre entiers, quel est l'entier le plus grand ?

Soit x, y, z et t les entiers écrits par Charles. Les différentes moyennes de trois de ces entiers sont :
$$\frac{x+y+z}{3}, \frac{y+z+t}{3}, \frac{z+t+x}{3}, \frac{t+x+y}{3}.$$
Ces moyennes sont, dans un ordre non défini, 32, 39, 40 et 44.
Les sommes de trois entiers pris parmi les quatre sont donc 96, 117, 120 et 132. On en déduit que
$$(x + y + z) + (y + z + t) + (z + t + x) + (t + x + y) = 96 + 117 + 120 + 132$$
Soit $3(x + y + z + t) = 465$ soit $x + y + z + t = 155$.
Les quatre entiers sont donc :
$155 - 96 = 59, 155 - 117 = 38, 155 - 120 = 35, 155 - 132 = 23.$
Le plus grand de ces entiers est 59.

7. Somme de chiffres
On définit le *score* d'un entier naturel comme la somme de ses chiffres.
a) Quel est le plus petit entier naturel de score 20 ?

b) Quel est le plus petit entier naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 et des 3 et dont le score est 23 ?
c) Quel est le plus grand entier naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 et des 3 et dont le score est 23 ?
d) Quel est le plus petit entier naturel dont le score est 2 023 ?

a) Le plus petit entier naturel de sore 20 est obtenu avec le plus petit nombre de chiffres, la somme de ces chiffres devant être égale à 20. C'est impossible avec deux chiffres. Avec trois chiffres, on cherche le chiffre des centaines le plus petit. 1 ne convient pas mais 2 convient avec le nombre 299.
b) Le plus petit entier écrit uniquement avec des 2 et des 3 et de score 23 est, de même, obtenu avec le plus petit nombre de chiffres, la somme de ces chiffres devant être égale à 23. On prend le maximum de 3 pour avoir le moins de chiffres possibles. Comme $23 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2$, le plus petit entier est obtenu en prenant 2 comme le chiffre le plus à gauche soit le nombre 23 333 333.
c) À l'inverse, le plus grand entier cherché est obtenu en prenant le maximum de 2 et le chiffre de gauche le plus grand possible.
Comme $23 = 10 \times 2 + 3$, le plus grand entier cherché est 32 222 222 222.
d) Comme pour le a), on cherche un nombre ayant le moins de chiffres possibles (dont le plus de 9 possibles) avec le chiffre le plus à gauche le ^plus petit possible. Comme $2\,023 = 224 \times 9 + 7$, l'entier cherché est obtenu avec le chiffre 7 suivi de 224 chiffres 9.

8. Identité de Lagrange (*)

Cette identité est un cas « simple » de l'identité de Brahmagupta, mais en troisième on ne va pas exagérer les difficultés techniques.

On peut la résumer de la façon suivante : le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

1. $a, b, c\ d$ étant des entiers (ce n'est pas nécessaire, mais cela réduit le contexte), montrer que :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

2. Développer :

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

3. Conclure

L'identité de Brahmagupta, outre qu'elle est formulée originellement dans une langue mathématique « ancienne », postule que, si a, b, c, d, n sont des nombres,

$$(a^2 - nb^2)(c^2 - nd^2) = (ac + nbd)^2 - n(ad + bc)^2$$

(*) Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) Mathématicien italien en Italie, mathématicien français en France

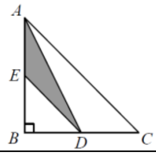
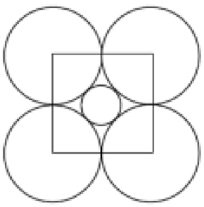
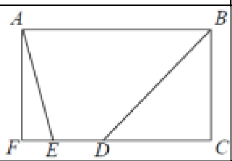
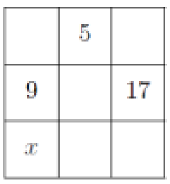
1. Il suffit de développer le produit $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
2. $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$.
3. On en conclut l'égalité $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, ce qui signifie bien que le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

Pépinière académique de mathématiques octobre 2023

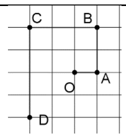
Équipe constituée de :

Exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier les « réponses » que vous donnerez aux questions suivantes. Les professeurs animateurs sont naturellement là pour vous donner des petits coups de pouce (ils vous suggèreront des raisonnements ou des démarches, pas des « réponses », ils peuvent aussi confirmer vos réponses pour vous aider à aller plus loin.

10 questions – 10 réponses – 1 heure

N°	Figure	Énoncé de la question	Réponse
1		Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle isocèle en B, D est le milieu de $[BC]$, E est le milieu de $[AB]$ et $AB = BC = 24$. Quelle est l'aire du triangle AED ?	
2	$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,3 \\ +\quad PQPQ \\ \hline 2\,0\,2\,3 \end{array}$	Dans l'addition ci-contre, P et Q représentent chacun un chiffre. Quelle est la valeur de $P + Q$?	
3		A 9 heures du matin, Gabriel avait tondu la moitié de sa pelouse. A 10 heures du matin, il avait tondu $\frac{7}{8}$ de sa pelouse. Si Gabriel a tondu sa pelouse à un rythme constant, à quelle heure a-t-il terminé de tondre sa pelouse ?	
4		Combien existe-t-il d'entiers positifs à deux chiffres divisibles à la fois par 3 et par 4 et dont le chiffre des unités est inférieur à celui des dizaines ?	
5		Dans la figure ci-contre, chacun des grands cercles (tous identiques de rayon 5) est tangent à deux autres grands cercles et le petit cercle est tangent à chacun des grands cercles. Calculer le rayon r du petit cercle central.	
6		Soit a, b, c, d, e cinq nombres. Sachant que la moyenne de a, b, c est 16, que celle c, d, e est 26 et que celle de a, b, c, d, e est 20, calculer c.	
7		Dans la figure ci-contre, $AFCB$ est un rectangle, $AB = 30, AF = 14$, D et F sont sur $[BC]$, $FE = 5$ et l'aire du quadrilatère $AEDB$ est égale à 266. Quelle est la valeur de DC ?	
8		Une sauterelle robotisée saute de 1 cm vers l'est, puis de 2 cm vers le nord, puis de 3 cm vers l'ouest, puis de 4 cm vers le sud. Après chaque quatrième saut, la sauterelle recommence la séquence de sauts : 1 cm vers l'est, puis 2 cm vers le nord, puis 3 cm vers l'ouest, puis 4 cm vers le sud. Après un total de n sauts, la sauterelle est située à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale. Quelle est la somme des carrés des chiffres de l'entier n ?	
9		Combien de listes de cinq entiers positifs rangés dans l'ordre croissant et tels que la différence entre deux entiers consécutifs de la liste soit toujours égale à 3 peut-on former lorsque le cinquième nombre de la liste est un multiple du premier ?	
10		Dans le tableau magique (les nombres de chaque ligne, de chaque colonne comme de chaque diagonale ont la même somme) ci-contre, on utilise les neuf entiers impairs compris entre 5 et 21. Quelle est la valeur de x ?	

Éléments de solutions pour les questions du quiz

<table>
<tr><th>N°</th><th>Arguments</th><th>Conclusion</th></tr>
<tr><td>1</td><td>L’aire du triangle ABC est 288. [AD] est une médiane, donc l’aire du triangle ABD est 144. [DE] est une médiane du triangle ABD, donc l’aire du triangle AED est 72.</td><td>$\mathcal{A}(AED) = 72$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>On peut faire la différence, $2\,023 - 1\,013 = 1\,010$, qui donne P et Q</td><td>$P + Q = 1$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>L’hypothèse indique qu’en une heure Gabriel tond les $\frac{3}{8}$ de sa pelouse. Il lui faut donc $\frac{8}{3}$ d’heure pour tondre le tout, soit $\frac{4}{3}$ pour la moitié, ou 1 h 20 min</td><td>Gabriel a fini de tondre à 10 heures 20 min</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Les nombres cherchés sont multiples de 12, et leur chiffre des unités est inférieur à celui des dizaines. Il reste 60, 72, 84 et 96</td><td>Il y a 4 nombres répondant aux critères</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Le carré dont les côtés sont portés par les lignes des centres d deux grands cercles tangents a pour côté 10. Ses diagonales mesurent $10\sqrt{2}$, et le diamètre du petit cercle mesure $10\sqrt{2} - 10$.</td><td>$r = 5(\sqrt{2} - 1)$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Les hypothèses se traduisent par : $a + b + c = 48$, $c + d + e = 78$ et $a + b + c + d + e = 100$. D’où on tire $100 + c = 126$</td><td>$c = 26$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>AEDB est un trapèze d’aire 266 et de hauteur 14. La somme de ses bases est donc $2 \times \frac{266}{14} = 38$. La base [ED] a donc pour longueur 8. On a donc $FD = 13$ et $DC = 30 - 13$.</td><td>$DC = 17$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

Après chaque série de quatre sauts, la sauterelle se trouve 2 cm à l’ouest et 2 cm au sud de sa position précédente. Il existe donc un entier p tel que $n = 4p + 3$ (une série de quatre n’a pas été terminée) et $2p = 158$. Donc $n = 319$</td><td>La somme cherchée est 91</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Soit a le premier nombre de la liste et e le cinquième. On a : $e - a = 12$. e est un multiple de a, donc il existe un entier k tek que $e = ka$. Et donc $(k-1)a = 12$. Les possibilités sont : $k = 2, a = 12, k = 3, a = 6, k = 4, a = 4, k = 5, a = 3, k = 7, a = 2, k = 13, a = 1$</td><td>Il y a six listes solutions</td></tr>
<tr><td>10</td><td><table><tr><td>19</td><td>5</td><td>15</td></tr><tr><td>9</td><td>13</td><td>17</td></tr><tr><td></td><td>21</td><td></td></tr></table>
La somme des entiers impairs compris entre 5 et 21 est 117. Les lignes, les colonnes et les diagonales fournissent la même somme, c’est le cas en particulier pour les trois lignes. La somme (la constante du tableau) est donc 39. On place 13 puis 21. Sur la première ligne doivent figurer, outre le 5, deux nombres impairs compris entre 5 et 21 et de somme 34. Ce sont nécessairement 19 et 15. Le 15 est impossible sur la première case à gauche, car $15 + 9 = 24$ et il faudrait utiliser une seconde fois 15. On place donc 19 et 15. Reste à placer 7 et 11…</td><td>$x = 11$</td></tr>
</table>