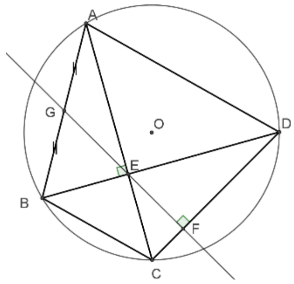
ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie VERSAILLES

Collège François Furet ANTONY

À l’origine du zéro

Brahmagupta (598 – 670), astronome et mathématicien indien, travaillait à l’observatoire de Ujjain. On le connaît par deux ouvrages, le *Brāhmasphutasiddhānta* et le *Khandakhādyaka*, qui l’un et l’autre traitent principalement d’astronomie et comportent quelques chapitres de mathématiques, dans lesquels il donne notamment un statut au 0 (différence entre un nombre et lui-même, 0 sépare les nombres positifs – les *biens* – des nombres négatifs – les *dettes*) et fournit quelques règles opératoires. Résolvant quelques équations, il introduit *l’identité de Brahmagupta* (voir en exercice). En géométrie, on connaît la *formule de Brahmagupta* donnant l’aire d’un quadrilatère inscrit dans un cercle en fonction de la longueur de ses côtés, extension de la *formule de Héron*, et le *théorème de Brahmagupta* : pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle dont les diagonales sont perpendiculaires, la droite perpendiculaire à un côté passant par le point d’intersection des diagonales passe par le milieu du côté opposé.



Brahmagupta ne fournit pas de preuve de ses méthodes ou de ses résultats, dont la diffusion était évidemment limitée. La démonstration est aujourd’hui indispensable dans l’activité mathématique.

Stage ouvert aux collégiennes et collégiens des classes de troisième – 23 et 24 octobre 2023

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHÉNIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Rémi NIGUES (Collège Auguste Renoir, ASNIERES)

Professeurs accompagnants : Khaled ZAOUI (Collège Albert Camus, BOIS COLOMBES), Frédérique CLIN (collège Martin Luther King, BUC), Tony PAQUET (Collège Magellan, CHANTELOUP LES VIGNES)

Emploi du temps
Lundi 23 octobre 2023

Antony		*Versailles*			
10.00	**Accueil**	**10.00**	**Accueil**		
10.10	**Géométrie** **CS**	**10.10** **11.15**	**Exposé « Écrire les nombres »** **Film « Formats de papier »**		
12.10	**Repas**	**11.20**	**Géométrie plane** **SD**	**Nombres** **RN**	**Dénombrement** **CD**
13.00	**Nombres** **CS**	**13.15**	**Repas**		
15.00	**Pause**	**14.00**	**Dénombrement** **CD**	**Aires et volumes** **CH ou EL**	**Géométrie plane** **SD**
15.10	**Films**	**16.00**	**Film « Bulles de savon »**		

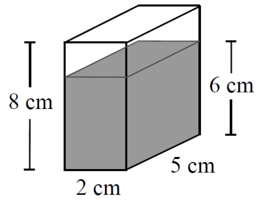
Mardi 24 octobre23

Antony		*Versailles*			
10.00	**Aires et volumes** **XG**	**10.00**	**Aires et volumes** **EL ou CH**	**Géométrie plane** **SD**	**Nombres** **RN**
12.00	**Repas**	**12h00**	**Repas**		
12. 45	**Dénombrement** **NF**	**12h45**	**Nombres** **RN**	**Dénombrement** **CD**	**Aires et volumes** **EL ou CH**
14.30	**Quiz**	**14h45**	**Pause**		
15.45 **16.30**	**Exposé « Écrire les nombres »**	**15h00** **16h30**	**Quiz**		

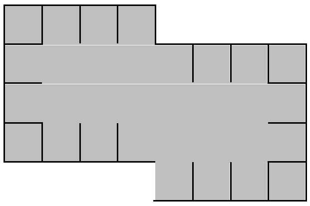
AIRES ET VOLUMES

1. Des hauteurs différentes

Un prisme fermé dont la base est rectangulaire a une hauteur de 8 cm et tient sur une de ses faces de dimensions 2 cm sur 5 cm.
Le prisme contient alors de l'eau d'une profondeur de 6 cm, comme dans la figure ci-contre.
On bascule le prisme de manière qu'il tienne sur la face ayant la plus grande aire.
Quelle est la nouvelle profondeur de l'eau ?



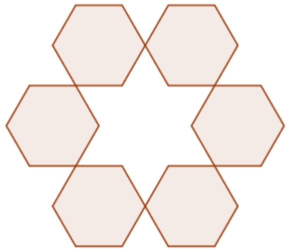
2. L'aire du parterre



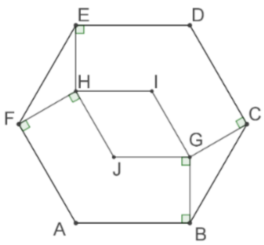
Dans un parc municipal, un parterre de fleurs est constitué de deux carrés identiques accolés. La longueur du segment de contact entre ces carrés est 4 m. Le périmètre du parterre est 44 m.
Quelle est son aire ?

3. Une étoile

La figure ci-contre est composée de six hexagones réguliers identiques associés pour former une « étoile » centrale. Si chaque hexagone a pour aire 12, quelle est l'aire de l'étoile ?



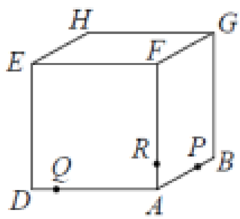
4. Un losange dans un hexagone



Dans la figure ci-contre, l'aire de l'hexagone régulier ABCDEF est 6.
Les perpendiculaires en B et C aux côtés [AB] et [CD] se coupent en G, les perpendiculaires en E et F aux côtés [DE] et [EF] se coupent en H. Les perpendiculaires en G à [BG] et en H à [FH] se coupent en J et les perpendiculaires en G à [CG] et en H à [EH] se coupent en I.
Quelle est l'aire du polygone HIG J ?

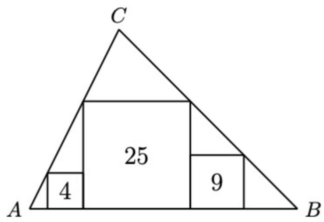
5. Pyramide dans un cube

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont les arêtes ont pour longueur 100, un point P situé sur $[AB]$, un point Q situé sur $[AD]$ et un point R situé sur $[AF]$ de manière que $AP = x, AQ = x + 1$ et $AR = \frac{x+1}{2x}$, où x désigne un nombre réel non nul.
Déterminer pour quelle valeur de x le volume de la pyramide $APQR$ est égal au volume du cube divisé par 2 000.
(On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au dixième près.



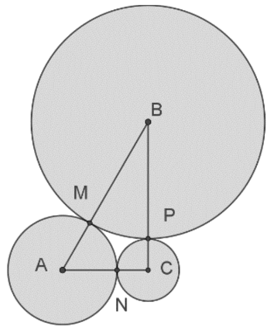
6. Carrés inscrits

Déterminer l'aire du triangle ABC sachant que les trois carrés inscrits de la figure ci-contre ont pour aire 4, 25 et 9.



7. Interstice entre trois disques

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est un « demi-triangle équilatéral » (l'angle en A mesure 60°) de côté 12.
Il est recouvert par trois disques, de centres A, B et C, tangents deux à deux et qui laissent apparaître le triangle curviligne MNP.
Quelle est l'aire de ce triangle curviligne ?
(on démontre que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$)



GÉOMÉTRIE PLANE

1. Vrai-Faux

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

a) Si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA = KB$.

b) Si $KA = KB$, alors K est le milieu de $[AB]$.

c) Si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA + KB = AB$.

d) Si $KA + KB = AB$, alors K est le milieu de $[AB]$.

e) Si $K \in [AB]$, alors $KA + KB = AB$.

f) Si $KA + KB = AB$, alors $K \in [AB]$.

2. Dans un triangle équilatéral

Déterminer la hauteur d'un triangle d'un triangle équilatéral de côté a.

3. Hauteurs dans un triangle

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On trace les droites

- D_A parallèle à (BC) passant par A ;
- D_B parallèle à (CA) passant par B ;
- D_C parallèle à (AB) passant par C.

Les droites D_{A} et D_{B} se coupent en C'. Les droites D_{B} et D_{C} se coupent en A'. Les droites D_{C} et D_{A} se coupent en B'.

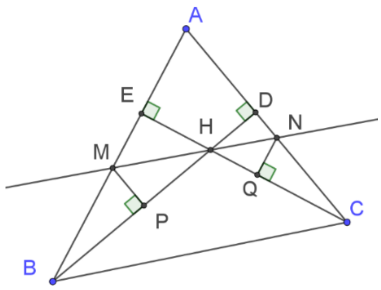
a. Que représente la droite (AH) pour le segment [B'C'] ?

b. Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

4. Des perpendiculaires créent des parallèles

Les hauteurs (BD) et (CE) du triangle ABC se coupent en H, orthocentre du triangle. Une droite passant par H coupe [AB] en M et [AC] en N. On appelle P le projeté de M sur (BD) et Q le projeté de N sur (CE).

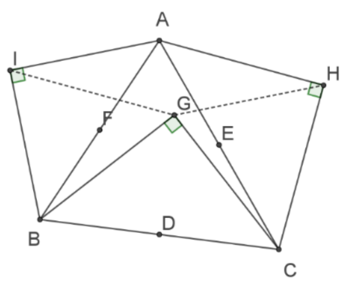
Montrer que (EP) et (DQ) sont parallèles.



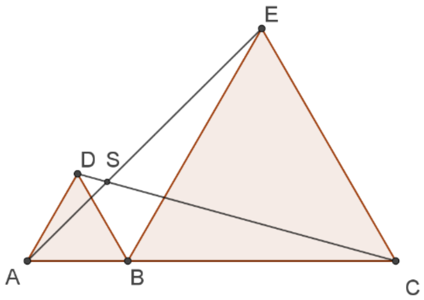
5. Apparition d'un parallélogramme

On donne un triangle ABC et trois triangles rectangles isocèles AIB, BGC et CHA dont les sommets des angles droits sont, pour I et H, extérieurs au triangle ABC tandis que G lui est intérieur.

Montrer que AIGH est un parallélogramme.

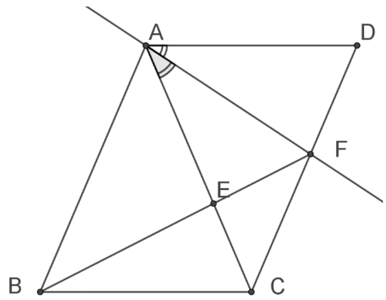


6. Tarif unique 60°



Les triangles ABD et BCE sont équilatéraux (de sens direct) et le point B appartient au segment [AC]. Les segments [AE] et [CD] se coupent en S. Combien mesure l'angle $\widehat{ASD}$?

8. Dans un parallélogramme

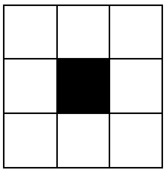


Le parallélogramme ABCD est tel que la diagonale [AC] a la même longueur que les côtés parallèles [AB] et [CD]. La bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{CAD}}$ coupe le côté [CD] en F. La droite (BF) coupe [AC] en E.
Le triangle ABE est isocèle de sommet principal E.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$?

DÉNOMBREMENT

1. Le centre est plus fort que le bord

On considère un tableau carré divisé en cases carrées identiques. On note n le nombre de cases sur un côté.



Exemple : dans le tableau carré ci-contre, toutes les cases sont identiques, il y a 8 cases sur le bord et une case au centre.
Dans le cas général, quels sont les entiers n pour lequel le centre contient plus de cases que le bord ?

2. Pyramide humaine

Sept gymnastes réalisent une pyramide humaine, comme celle représentée ci-contre. Ils sont numérotés de 1 à 7 et la contrainte à réaliser est que le pied de l'un ne peut en toucher un autre que si le numéro de ce dernier est plus élevé. Combien y a-t-il de pyramides possibles ?

3. Passe ton bac d'abord !

On a aménagé une salle d'examen de sorte qu'elle contienne exactement n rangées de m tables, m et n étant supérieurs à 3. Lorsqu'il est assis à sa table, un candidat a pour *voisins* les candidats assis devant lui sur la même rangée ou les rangées immédiatement voisines, les candidats situés immédiatement à sa droite ou à sa gauche, et ceux situés derrière lui, sur la même rangée ou les rangées immédiatement voisines. Le maximum de l'effectif des *voisins* d'un candidat est donc 8, certains en ont moins.
La tradition veut que les candidats se saluent en échangeant une poignée de mains. Dans la salle, 1 020 poignées de mains ont été échangées. Combien y a-t-il de candidats ?

4. Des multiples de 12

Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs de 6 chiffres, dont l'écriture comporte uniquement les chiffres 0 et 2, et qui sont divisibles par 12 ?
Précision : l'écriture d'un nombre à six chiffres ne peut pas débuter par un 0.

5. Portes ouvertes ou fermées

Une salle contient quatre portes. Chacune des quatre portes est aléatoirement ouverte ou fermée.
Quelle est la probabilité qu'exactement deux des quatre portes soient ouvertes ?

6. Tuiles à placer

On doit placer 16 tuiles carrées dans un quadrillage 4×4. Il y a quatre tuiles de chacune des couleurs suivantes : vert, jaune, rouge et noir. Chaque rangée doit contenir une tuile de chaque couleur. Sachant qu'aucune tuile ne peut être de la même couleur que ses voisines (deux tuiles sont des voisins si elles se touchent le long d'un côté ou à un coin).
De combien de façons différentes peut-on disposer ces tuiles ?

7. Choix de barrettes

Le tiroir de barrettes de Lucie contient 4 barrettes rouges, 5 barrettes bleues et 7 barrettes vertes. Chaque matin, elle choisit au hasard une barrette qu'elle portera pour la journée. Elle remet cette barrette dans son tiroir chaque soir. Un matin, Maxime enlève k barrettes avant que Lucie ne puisse faire son choix quotidien. La probabilité pour que Lucie choisisse une barrette rouge est alors doublée.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

NOMBRES

1. Nombres à diviseurs singuliers

Un entier n est dit « nombre à diviseurs singuliers » si, pour chacun de ses diviseurs d, un au moins des nombres $d - 1$ et $d + 1$ est un nombre premier.

a. Soit n un nombre à diviseurs singuliers. Quels sont les entiers impairs susceptibles d'être des diviseurs de n ?

b. Quelles sont les puissances de 2 susceptibles d'être des diviseurs de n ?

c. Quel est le plus grand des nombres à diviseurs singuliers ?

2. Les tribulations de la moyenne

Dans ce problème, on étudie les ensembles d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 100 et dont le nombre 100 lui-même est un élément. Pour chacun de ces ensembles, on peu calculer la moyenne de la série constituée par ses éléments, du plus petit au plus grand (100). Quel est le plus petit entier parmi les moyennes de ces séries ?

3. Combien de carrés ?

On demande de déterminer les entiers naturels p pour lesquels il existe un entier n inférieur ou égal à 800 tel que $p^2 = 8n + 1$.

4. Nombres battus

Dans cet exercice, on appelle *nombre battu* tout entier naturel N possédant les propriétés suivantes (on écrit les nombres dans le système décimal, les propriétés suivantes montrent que 0 ne peut pas être utilisé) :

1. N est un multiple de 11 ;
2. N est un multiple de 12 ;
3. Tout entier formé avec les mêmes chiffres que N apparaissant le même nombre de fois est un multiple de 12.

Combien y a-t-il de *nombres battus* s'écrivant avec 5 chiffres ?

5. Dix, onze, douze, elles seront toutes rouges

Matéo, qui vient d'apprendre à compter (c'est un enfant, il commence par 1), attribue une couleur à chaque entier. Il décide que tout entier impair sera rouge, que pour tout entier n, les nombres n et $4n$ seront de la même couleur et que chaque entier n sera de la même couleur qu'au moins un des deux nombres $n + 2$ et $n + 4$.

Montrer que tous les entiers seront rouges.

6. Sommes et moyennes

Charles écrit une liste de quatre entiers. Il calcule la moyenne de chaque groupe de trois entiers qu'il peut former à partir des quatre entiers. Ces moyennes sont 32, 39, 40, 44.

Parmi les quatre entiers, quel est l'entier le plus grand ?

7. Somme de chiffres

On définit le *score* d'un entier naturel comme la somme de ses chiffres.

a) Quel est le plus petit entier naturel de score 20 ?
b) Quel est le plus petit entier naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 et des 3 et dont le score est 23 ?
c) Quel est le plus grand entier naturel ne s'écrivant qu'avec des 2 et des 3 et dont le score est 23 ?
d) Quel est le plus petit entier naturel dont le score est 2 023 ?

8. Identité de Lagrange (*)

Cette identité est un cas « simple » de l'identité de Brahmagupta, mais en troisième on ne va pas exagérer les difficultés techniques.

On peut la résumer de la façon suivante : le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

1. $a, b, c\ d$ étant des entiers (ce n'est pas nécessaire, mais cela réduit le contexte), montrer que :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

2. Développer :

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

3. Conclure

L'identité de Brahmagupta, outre qu'elle est formulée originellement dans une langue mathématique « ancienne », postule que, si a, b, c, d, n sont des nombres,

$$(a^2 - nb^2)(c^2 - nd^2) = (ac + nbd)^2 - n(ad + bc)^2$$

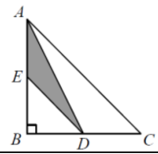
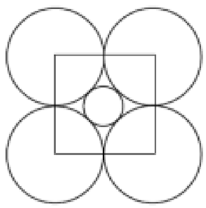
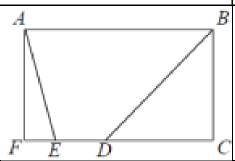
(*) Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) Mathématicien italien en Italie, mathématicien français en France

Pépinière académique de mathématiques octobre 2023

Équipe constituée de :

Exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier les « réponses » que vous donnerez aux questions suivantes. Les professeurs animateurs sont naturellement là pour vous donner des petits coups de pouce (ils vous suggèreront des raisonnements ou des démarches, pas des « réponses », ils peuvent aussi confirmer vos réponses pour vous aider à aller plus loin.

10 questions – 10 réponses – 1 heure

N°	Figure	Énoncé de la question	Réponse
1		Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle isocèle en B, D est le milieu de $[BC]$, E est le milieu de $[AB]$ et $AB = BC = 24$. Quelle est l'aire du triangle AED ?	
2	$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,3 \\ +\quad PQPQ \\ \hline 2\,0\,2\,3 \end{array}$	Dans l'addition ci-contre, P et Q représentent chacun un chiffre. Quelle est la valeur de $P + Q$?	
3		A 9 heures du matin, Gabriel avait tondu la moitié de sa pelouse. A 10 heures du matin, il avait tondu $\frac{7}{8}$ de sa pelouse. Si Gabriel a tondu sa pelouse à un rythme constant, à quelle heure a-t-il terminé de tondre sa pelouse ?	
4		Combien existe-t-il d'entiers positifs à deux chiffres divisibles à la fois par 3 et par 4 et dont le chiffre des unités est inférieur à celui des dizaines ?	
5		Dans la figure ci-contre, chacun des grands cercles (tous identiques de rayon 5) est tangent à deux autres grands cercles et le petit cercle est tangent à chacun des grands cercles. Calculer le rayon r du petit cercle central.	
6		Soit a, b, c, d, e cinq nombres. Sachant que la moyenne de a, b, c est 16, que celle c, d, e est 26 et que celle de a, b, c, d, e est 20, calculer c.	
7		Dans la figure ci-contre, $AFCB$ est un rectangle, $AB = 30, AF = 14$, D et F sont sur $[BC]$, $FE = 5$ et l'aire du quadrilatère $AEDB$ est égale à 266. Quelle est la valeur de DC ?	
8		Une sauterelle robotisée saute de 1 cm vers l'est, puis de 2 cm vers le nord, puis de 3 cm vers l'ouest, puis de 4 cm vers le sud. Après chaque quatrième saut, la sauterelle recommence la séquence de sauts : 1 cm vers l'est, puis 2 cm vers le nord, puis 3 cm vers l'ouest, puis 4 cm vers le sud. Après un total de n sauts, la sauterelle est située à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale. Quelle est la somme des carrés des chiffres de l'entier n ?	
9		Combien de listes de cinq entiers positifs rangés dans l'ordre croissant et tels que la différence entre deux entiers consécutifs de la liste soit toujours égale à 3 peut-on former lorsque le cinquième nombre de la liste est un multiple du premier ?	
10	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \ & 5 & \ \\ \hline 9 & & 17 \\ \hline x & & \\ \hline \end{array}$	Dans le tableau magique (les nombres de chaque ligne, de chaque colonne comme de chaque diagonale ont la même somme) ci-contre, on utilise les neuf entiers impairs compris entre 5 et 21. Quelle est la valeur de x ?	