Résolution de problèmes et communication mathématique

Les pratiques pédagogiques évoluent. Le plan Villani-Torossian a recensé des dizaines de façons de faire évoluer les connaissances des élèves, en rappelant entre autres l'intérêt pour les professeurs comme pour les élèves des échanges collectifs oraux en classe et du travail collaboratif. La lettre de rentrée 2023 *aborde également cet aspect.*

Il reste que l'évaluation des aptitudes se trouve souvent condensée dans des travaux écrits, en temps libre et hors la classe ou en temps limité (c'est encore la méthode de référence des examens). Il est donc important de savoir quelle confiance accorder aux travaux écrits et de mieux définir ce qu'il faudrait en attendre.

Nous n'envisageons ici que des travaux écrits qui, partant d'un ou plusieurs énoncés, comportant une ou plusieurs questions, demandent à l'élève de rédiger une solution.

Qu'est-ce qu'un énoncé ?

Dans les travaux écrits traditionnels, l'élève se trouve placé devant un énoncé, qui expose une situation mathématique, définit quelques objets mathématiques, propose éventuellement une figure et pose une liste de questions, le plus souvent enchaînées.

Le premier travail à faire est de comprendre la situation proposée, accepter les définitions, refaire la figure pour comprendre comment elle a été fabriquée, regarder ensuite la première question posée. On devra revenir régulièrement à l'énoncé, pour éviter que l'esprit s'échappe du problème ou perde de vue les définitions données.

Comment répondre à une question ?

Le fait que la résolution de problèmes serve de base à une évaluation peut conduire l'élève à « voir la solution » qui s'impose à lui ou qu'il croit reconnaître. Ce qui fait qu'il sabote la question et éventuellement d'autres.

Résoudre un problème ne consiste pas, contrairement à ce que peut croire un élève, à montrer qu'on sait le faire ou, plus grossièrement, qu'on a trouvé la réponse. Il s'agit aussi de montrer qu'on maîtrise les outils nécessaires et qu'on est capable d'exposer une solution. On s'adresse à un lecteur, qui possède a priori les connaissances mises en œuvre mais est censé ne pas s'être attaqué au problème. Il faut lui permettre de comprendre que la solution proposée est bien une solution du problème.

Rôle de la figure

Dans des réunions de correcteurs destinées à établir un barème, il arrive qu'on entende : « La figure n'était pas demandée, elle ne compte pas ».

Même en présence d'une figure très explicite, on doit écrire les hypothèses qu'on utilise : un quadrilatère possède trois angles droits, on ne l'appelle pas rectangle avant d'avoir écrit qu'il possède trois angles droits, on écrit qu'un point appartient à un cercle avant de dire que sa distance au centre du cercle est égale au rayon, ou vice versa, etc. Un bon moyen de comprendre un énoncé géométrique est de faire soi-même la figure correspondante. On s'aperçoit, par exemple, que le point d'intersection de deux droites est situé sur un cercle : illusion, figure réalisée dans un cas particulier, propriété à rappeler, propriété à établir ?
La figure réalisée sur la copie est celle qui sera consultée par le lecteur, surtout si on a apporté des compléments par rapport à la figure initiale. Plus elle est soignée, mieux on est compris.

Exemples donnés dans l'énoncé, exemples donnés en appui de la résolution

Les situations proposées dans les travaux écrits ne sont pas des archétypes. Le travail proposé consiste précisément à utiliser le produit de l'étude des situations étudiées au cours de la scolarité pour rendre accessible une situation originale au niveau considéré.

Un énoncé présente des objets mathématiques. Il arrive qu'il donne des définitions. Ces définitions n'ont souvent de valeur que dans le cadre du problème posé. Il arrive que des exemples soient proposés en appui de ces définitions. Ces exemples ont pour but d'aider le lecteur à comprendre les définitions, non à les remplacer ou à en réduire le champ d'application.

Dans la rédaction de la solution d'un problème, les exemples ne servent à rien. Ils ne peuvent constituer une preuve, la preuve doit s'appuyer sur un raisonnement ou des calculs maniant des vérités générales. Tout au plus peut-on faire quelques essais *au brouillon* pour détecter d'éventuels *contre-exemples* au résultat envisagé. Il se peut, bien sûr, que l'énoncé demande de fournir des exemples, c'est une autre histoire.

La langue mathématique

Tout au long de sa scolarité, l'élève enrichit son vocabulaire et sa maîtrise de la langue mathématique. Ses interlocuteurs, professeurs ou lecteurs de son travail, s'attendent à ce que ses écrits témoignent d'un certain niveau de maîtrise.

Comme l'écrit Blaise Pascal dans « De l'esprit géométrique » : « On ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est−à−dire que les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus ; et je ne parle que de celles−là seulement. » Les termes mathématiques doivent avoir été successivement définis au cours de la scolarité, et les élèves doivent les utiliser dans le sens qui a été donné. On ne peut, toujours selon Blaise Pascal, utiliser un mot qui a fait l'objet d'une définition en lui donnant un autre sens qu'en prenant des précautions lourdes et en avertissant le lecteur. Autant ne pas le faire, mais si on le fait le critère pascalien « remplacer mentalement le défini par sa définition » doit s'appliquer.

La logique

On a rompu depuis des années avec un enseignement de la logique délivré ex-nihilo, et les manuels scolaires ne proposent plus de chapitre consacré à cette partie des mathématiques. N'empêche que dans un texte rédigé par un élève le lecteur doit pouvoir « lire » une progression logique dans les arguments utilisés.

Le schéma de phrase « on sait que…, or..., donc… » montre comment rassembler des hypothèses issues de l'énoncé, les identifier aux hypothèses d'un théorème général pour aboutir à une certaine conclusion. Cette syntaxe ne doit cependant pas être un carcan, d'autres formulations respectant raisonnement et logique sont possibles. On peut s'autoriser quelques ellipses ou allusions, alléger le style, mais le principe du raisonnement déductif est là. Il faut prendre garde au fait qu'un « donc » peut conclure une chaîne de conclusions devenues successivement prémisses, et indiquer clairement sur quoi on conclut.

La quantification est indispensable. On est souvent amené à écrire qu'une affirmation, dans laquelle un objet mathématique est désigné par x, ne traite pas de x. Il faut alors indiquer *au début* de la phrase « pour tout x… » On est souvent aussi amené à introduire des objets non décrits par l'énoncé.

Il faut impérativement les *présenter* et indiquer leur rôle dans le déroulement logique des arguments : « soit M le point défini par… », ou « il existe un entier k tel que… »

Les notations

Pour être compris, il faut parler au lecteur en langue mathématique et demeurer fidèle à l'énoncé, en respectant les notations données. Si on est amené à introduire un nouvel objet, on doit le définir et le nommer.

Comme les définitions, certaines notations sont universelles, on ne peut se dispenser de connaître leur mode d'emploi : le signe = s'utilise pour exprimer que deux « noms » donnés à des objets mathématiques n'en désignent qu'un, le signe ⇔ indique que deux affirmations sont condition nécessaire et suffisante chacune pour l'autre (à n'utiliser que lorsque la confusion n'est pas possible et sans « enchaîner »), des notations différentes permettent de distinguer les longueurs, les segments, les droites, etc.

L'orthographe et la grammaire

La langue mathématique possède une orthographe d'usage (pour les termes propres aux mathématiques hypoténuse, icosaèdre, parallélépipède, récurrence) et une orthographe grammaticale : le temps de l'exposition mathématique est le présent de l'indicatif. Pour exprimer une supposition, on peut avoir recours au conditionnel présent ou passé, la proposition subordonnée suivante étant conjuguée au subjonctif.

On doit aussi considérer comme relevant de l'orthographe d'usage la conjugaison des verbes « mathématiques » : résoudre, conclure, déduire et les participes passés *inclus(es)* et *exclu(es).*

On a souvent recours à des pronoms pour alléger le style en évitant les répétitions. Il faut veiller à ce qu'aucune phrase ne contienne plusieurs pronoms renvoyant à plusieurs objets. Les articles aussi sont sources de confusion (rappelons qu'*un rayon* d'un cercle est un segment, tandis que *le rayon* d'un cercle est un nombre).

La beauté des mathématiques

Bertrand Russell, dans *The study of Mathematics* écrit « Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty ». Les paragraphes ci-dessus rappellent tout à la fois quelques fondamentaux de la pratique mathématique et évoquent des repères à faire acquérir aux élèves qui les conduiront à exprimer leurs raisonnements avec clarté, justesse et rigueur. Quand l'un d'eux y verra la beauté suprême, cela nous consolera des multiples faux-pas ou affirmations injustifiées, bien compréhensibles dans une phase d'apprentissage, que nous pouvons voir au quotidien.