Comment descendre d'un degré (Lagrange)

Soit à résoudre une équation du quatrième degré dont les racines sont x_1, x_2, x_3, x_4.
Posons $y_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$.
Cette expression est invariante par certaines permutations de $(1, 2, 3, 4)$: les transpositions (12) et (34), leur produit qu'on note $(12)(34)$, les produits $(13)(24)$ et $(14)(23)$, les permutations circulaires (1324) et (1423) et l'identité. Cela en fait 8.
C'est la même chose pour $y_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$
et $y_2 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$
Les produits des sommes de deux racines ne peuvent donc prendre que **trois** valeurs.

Et maintenant, attention !

Le polynôme $P(y) = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$ a des coefficients qui sont des fonctions symétriques de y_1, y_2 et y_3 et donc des fonctions symétriques des racines de l'équation de départ.
Et donc les coefficients de P s'expriment à l'aide des coefficients de l'équation de départ, et comme **IL EST DE DEGRE 3**, on sait écrire y_1, y_2 et y_3 en fonction des coefficients de l'équation de départ.

Ce n'est pas fini, c'est x_1, x_2, x_3, x_4 qu'on veut. On peut s'arranger pour avoir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (en jouant sur le coefficient du terme de degré 3, à un changement d'inconnue près) et cela va nous donner des choses comme

$$(x_1 + x_2)^2 = -y_1$$

Et on finit par la résolution d'un système de 4 équations linéaires à 4 inconnues.