Niveau : 2^{nde}

Thème : Inégalités, intervalles

Cette fiche n'a pas vocation à être un cours clé en main. Elle est un support à la réflexion pédagogique et didactique.

***Questions à se poser avant** de construire sa séquence (constituée de plusieurs séances) sur le thème :*

- *Quels énoncés mathématiques (définitions, propriétés, théorèmes) à faire écrire par les élèves ?*
- *Quelle démonstration(s) à construire avec les élèves ?*
- *Quels prérequis nécessaires y compris pour faciliter l'accès des élèves aux démonstrations ?*
- *Quelles traces dans le cahier de cours ?*

CONTEXTE

Programme officiel : https://euler.ac-versailles.fr/rubrique176.html

« Au cycle 4, les élèves ont étudié les inégalités pour comparer des valeurs numériques. La notion d'intervalle, présentée comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités, est nouvelle. »

« Capacités attendues

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée. »

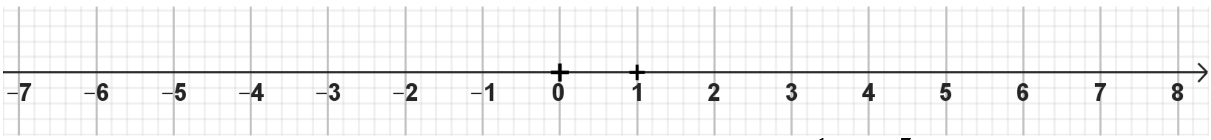
Prérequis

Au travers de questions flash, on fait un état des lieux et on réactive les savoirs et savoir-faire des élèves sur :

- la comparaison de nombres décimaux ;
- la comparaison de nombres rationnels ;
- l'ensemble des nombres réels et la droite numérique ;
- le signe d'un produit ou d'un quotient de nombres dont on connait les signes.

Activité rapide : questions flash

QF 1 :



Sur la droite graduée ci-dessus, placer les points d'abscisses $3, \frac{1}{4}, -5, \frac{7}{2}$.

Cette question permet de revoir l'association d'un nombre à un point d'une droite graduée.

QF 2 :

Ranger dans l'ordre croissant les nombres $2{,}3$; $-0{,}25$; $2{,}28$; $-0{,}3$

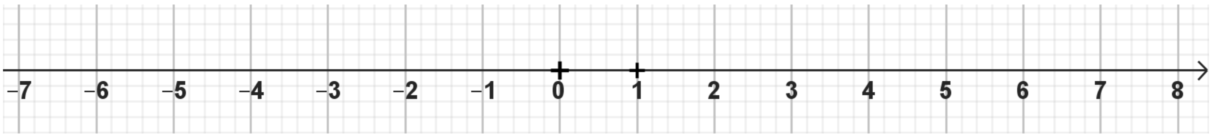
Cette question permet de revoir comment comparer des nombres décimaux.

QF 3 :

Ranger dans l'ordre croissant les nombres $\frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$.

Cette question permet de revoir comment comparer des nombres rationnels.

QF 4 :



Représenter, pour chaque cas et sur la droite ci-dessus, les nombres réels x vérifiant les conditions données :

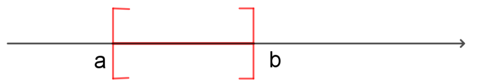
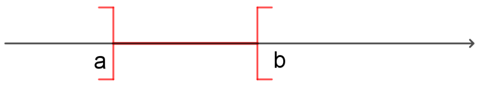
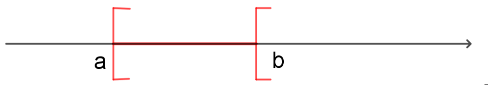
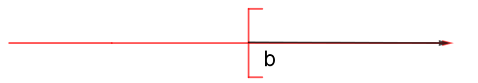
x est compris entre 2 et 7 ; x est inférieur ou égal à 3 ; x est supérieur ou égal à -2

Cette question permet de préparer à la notion d'intervalle.

Trace dans le cahier de cours

Notion d'intervalle

En reprenant QF4, on peut multiplier les exemples en associant intervalle, inégalités et représentation graphique avant de dresser un tableau récapitulatif mais non exhaustif pour décrire différents intervalles, ensemble de nombres réels représentés sur la droite numérique avec lien à faire ressortir entre la position des crochets et le type d'inégalité.

Intervalle	Représentation	Inégalités
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$
$]a, b[$		$a < x < b$
$[a, b[$		$a \leq x < b$
$[a, +\infty[$		$a \leq x$
$]-\infty, b]$		$x < b$

Exemples à donner (intervalle, représentation ou inégalités) en demandant aux élèves de trouver les autres traductions. On peut aussi faire inventer des exemples par les élèves.

Oralement, on parle d'intervalles ouverts, fermés, bornés, non bornés.

Inégalités

Définition :

- On dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$. On note $a \leq b$.
  On dit aussi que b est supérieur ou égal à a et on note $b \geq a$.
- On dit qu'un nombre a est strictement inférieur à un nombre b lorsque $b - a > 0$. On note $a < b$.
  On dit aussi que b est strictement supérieur à a et on note $b > a$.

*Il est important de préciser que cette définition conduit à une **méthode pratique pour comparer deux nombres** et est la base pour démontrer les propriétés qui suivent.*
Il est important de démontrer au moins quelques-unes de ces propriétés.

Propriété 1 :
Pour tous nombres réels a, b et c :
si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

Démonstration
- Si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$

soit $(b + c) \geq (a + c)$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $b - a \geq 0$ et $d - c \geq 0$. Or $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$ et la somme de deux nombres positifs est un nombre positif donc $(b + d) - (a + c) \geq 0$

soit $a + c \leq b + d$.

Propriété 2 :
Pour tous nombres réels a, b, c et d :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Démonstration
$bc - ac = (b - a)c$ donc :
- si $a \leq b$ et $c \geq 0$ soit $b - a \geq 0$ et $c \geq 0$ alors $(b - a)c \geq 0$ soit $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ soit $b - a \geq 0$ et $c \leq 0$ alors $(b - a)c \leq 0$ soit $ac \geq bc$
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors, d'après ce qui précède, $ac \leq bc$ (car $c \geq 0$)et $bc \leq bd$ (car $b \geq 0$) donc $ac \leq bd$.

Propriété 3 :
Pour tous nombres réels a et b :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.

Démonstration
Si $0 < a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ et $ab > 0$ donc, comme $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$, $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. De plus $\frac{1}{b} > 0$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'une au moins de ces propriétés.

Exercices d'application à donner comme :
- Soit a et b deux nombres réels tels que $2 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 4$.
  Encadrer $a + b, a - b, ab, 2a + 3b$ ….
- Un encadrement du périmètre ou de l'aire d'un rectangle quand on a un encadrement de la longueur et de la largeur.

Distance entre deux nombres - Intervalle $[a-r, a+r]$

Définition :

La distance $d(x,y)$ entre deux nombres réels x et y est la distance entre les points d'abscisses x et y de la droite numérique.

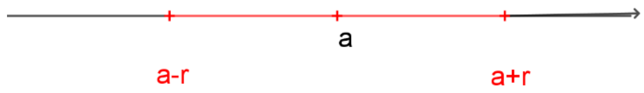
Propriété :

Pour tous nombres réels x et y, $d(x,y) = d(y,x)$

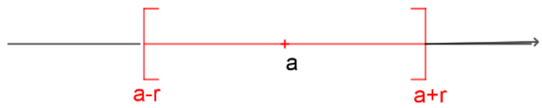
On note aussi cette distance $|x-y|$ et on a $|x-y| = |y-x|$

Propriété :

1. Pour tous nombres réels a, x et r, $r > 0$, les formulations suivantes sont équivalentes :
   - $d(a,x) = r$
   - $|x-a| = r$
   - $x = a - r$ ou $x = a + r$



2. Pour tous nombres réels a, x et r, $r > 0$, les formulations suivantes sont équivalentes :
   - $d(a,x) \leq r$
   - $|x-a| \leq r$
   - $a - r \leq x \leq a + r$



Comme pour les différents intervalles, on multiplie les exemples en les illustrant toujours par une représentation sur la droite numérique et en faisant passer les élèves d'une formulation à l'autre éventuellement à l'aide d'un tableau à compléter.

Pour faire travailler les élèves en autonomie sur ces notions

https://euler.ac-versailles.fr/rubrique176.html

en cliquant sur le lien « Programme augmenté Seconde générale et technologique », on pourra consulter les rubriques « Nombres et calculs » puis « Manipuler les nombres réels » et les liens sur « intervalle de **R** » ou « distance entre deux nombres réels » ou « représentation de l'intervalle $[a-r, a+r]$ ».