2. Ensembles surprenants

1. *a.* Soit $E = \{1, 2, 3, 2\,020\}$. $P(E) = 1 \times 2 \times 3 \times 2\,020 = 12\,120$
et $C(E) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2\,020^2 = 4\,080\,414$. Donc E n'est pas surprenant.

b. Soit $F = \{6, 15, 87\}$. $P(F) = 6 \times 15 \times 87 = 7\,830$ et $6^2 + 15^2 + 87^2 = 7\,830$. F est un ensemble surprenant.

2. *a.* L'égalité s'écrit aussi : $(x-1)(P(A) - 1 - x) = 0$. Il y deux solutions, 1 et $P(A) - 1$.

b. Supposons que le nombre $P(A) - 1$ appartient à A. Il existe donc un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 1)$.
On peut encore écrire : $(k-1)P(A) = k$, ce qui implique que $k - 1$ divise k et donc $k = 2$ et finalement $P(A) = 2$, ce qui est exclu par l'énoncé.

c. Comme $A' = A \cup \{P(A) - 1\}$, on a : $P(A') = P(A) \times (P(A) - 1)$ et $C(A') = C(A) + (P(A) - 1)^2$.
Par conséquent $f(A') = P(A) - C(A) - (P(A) - 1)^2 + P(A) \times (P(A) - 1) - P(A) = f(A) - 1$

d. Un élément nouveau (bien choisi) diminue de 1 la « distance » entre le produit des éléments et la somme de leurs carrés. En opérant n fois cet élargissement, on parvient à A_n tel que $f(A_n) = 0$, donc à un ensemble surprenant contenant A. Il n'y a pas de risque de rencontrer un élément déjà dans l'ensemble d'après **2. *b.***

e. Appliquons l'algorithme précédent à l'ensemble $G = \{3, 4, 9\}$

Éléments de l'ensemble	**Leur produit *P***	**La somme de leurs carrés**	***P* −1**
$3, 4, 9$	108	106	107
$3,4,9,107$	$11\,556$	$11\,555$	$11\,555$
$3, 4, 9, 107, 11\,555$	$133\,529\,580$	$133\,529\,580$	

Comme dit plus haut, il a fallu deux opérations pour parvenir à un ensemble surprenant.

3. *a.* Supposons que le nombre $P(A) - 2$ appartienne à A. Il existe un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 2)$. Cette égalité s'écrit : $(k-1)P(A) = 2k$. On en conclut que $k - 1$ divise $2k$. Il s'ensuit que $k = 2$ ou $k = 3$ (*), ce qui donne les possibilités $P(A) = 4$ ou $P(A) = 3$, contrairement à l'hypothèse.
b. Comme dans la question précédente, nous adjoignons le nombre $P(A) - 2$ à l'ensemble A pour obtenir l'ensemble A_1. On compare $f(A_1)$ et $f(A)$:

$$f(A_1) - f(A) = P(A)(P(A) - 2) - C(A) - (P(A) - 2)^2 - P(A) + C(A)$$

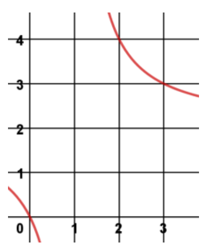
Ou encore : $f(A_1) - f(A) = P(A) - 4$.
En passant de A à A_1, la différence entre le produit des éléments et la somme de leurs carrés (qui est, au départ, négative) augmente. On poursuit le processus jusqu'à trouver par adjonction successive d'éléments (là encore il n'y a pas possibilité de redondance), un ensemble A_n tel que :
- ou bien $f(A_n) = 0$, auquel cas c'est terminé, A_n est surprenant ;
- ou bien $f(A_n) > 0$, et on est ramené à la situation de la question **2.** On sait comment continuer pour trouver un ensemble surprenant qui contienne tous ceux qui l'ont précédé dans le processus, dont A.

4. Il ne reste plus à examiner que les sous-ensembles finis non vides de **N*** dont le produit des éléments est strictement inférieur à 5. Pour chacun d'entre eux, on cherche un ensemble surprenant qui le contienne. On peut adjoindre à chacun le nombre 5, qui assure que le (nouveau) produit est supérieur à 5 et on se ramène aux cas précédents.

5. On a vu au début de l'énoncé que $P(A) = 10$ et $C(A) = 30$. On applique l'algorithme du **3. *b.***

Éléments de l'ensemble	**Leur produit *P***	**La somme de leurs carrés**	***P* −2**
$1, 2, 5$	10	30	8
$1, 2, 5, 8$	80	94	78
$1, 2, 5, 8, 78$	$6\,240$	6178	

La différence $f(A_2) - f(A)$ est cette fois égale à 62 ; elle relève donc de l'algorithme du **2. *d.*** Avec cette méthode, on adjoint 62 éléments aux 5 de A_2. Cela en fait 67 (on ne saurait les écrire tous, le nombre de chiffres augmente très vite…)



(*) Si on ne veut pas utiliser l'arithmétique, il suffit de regarder les points à coordonnées entières positives de l'hyperbole $x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$