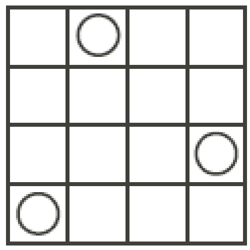
Pépinière virtuelle fiche 1 (émise le 23 novembre 2020). Énoncés avec solutions

Exercice 1. 1 Un impair

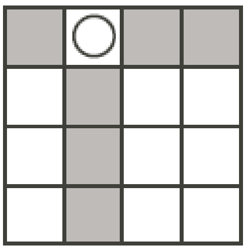
Le nombre impair m est un entier strictement positif composé de trois chiffres distincts. Le chiffre des centaines – non nul comme il se doit – égal au produit des chiffres des unités et des dizaines. Quel est l'entier m?

On cherche un entier impair m qui peut s'écrire $m = 100a + 10b + c$, où a, b et c sont des entiers tous distincts, compris entre 0 et 9 et tels que $a = bc$.
Quelques remarques :
c doit être impair comme m ;
$a \neq 0$, ce qui entraine b et c aussi non nuls puisque $a = bc$;
b comme c ne peut être égal à 1 car a, b et c sont des entiers tous distincts.
Comme a est compris entre 1 et 9, on écrit toutes les décompositions de a en produit bc où c est un entier impair. Le seul produit qui convient est $6 = 2 \times 3$.
Le seul entier m qui convient est 623.

Exercice 1. 2 Pas vu, pas pris



On a placé trois pièces de monnaie, au hasard, sur trois cases différentes du quadrillage 4 X 4 ci-contre.
Déterminer la probabilité pour qu'il n'y ait pas deux pièces sur la même ligne ni dans la même colonne.



On place les pièces de monnaie une à la fois.
On place d'abord une pièce au hasard dans une case du quadrillage. Il reste 15 cases dans lesquelles on peut placer la 2^{e} pièce. Or, 6 de ces 15 cases sont dans la même ligne ou dans la même colonne que la 1^{e} pièce. On ne peut donc placer la 2^{e} pièce que dans une des autres 9 cases.
Donc, la probabilité pour que les deux pièces ne soient ni dans la même ligne, ni dans la même colonne est égale à $\frac{9}{15}$ soit $\frac{3}{5}$

Il reste 14 cases dans lesquelles on peut placer la 3^{e} pièce. Or, 6 de ces 14 cases sont dans la même ligne ou dans la même colonne que la 1^{e} pièce et 4 autres de ces cases sont dans la même ligne ou la même colonne que la 2^{e} pièce. Donc, la probabilité pour que la troisième pièce soit placée dans une ligne différente et dans une colonne différente que les deux premières pièces est égale à $\frac{4}{14}$ soit $\frac{2}{7}$ Donc, la probabilité pour que les trois pièces soient dans des lignes différentes et des colonnes différentes est égale à $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$3 soit $\frac{6}{35}$.

Exercice 1. 3 Fonction réciproque

Soit f la fonction affine définie sur **R** par $f(x) = 2x - 4$.
1. Montrer que tout réel b a un unique antécédent a par la fonction f et exprimer b en fonction de a.
2. On note g la fonction qui à b associe le nombre a défini dans la question précédente. On dit que g est la *fonction réciproque* de la fonction *f*.
Montrer que pour tout nombre réel x, $f\big(g(x)\big) = x$ et $g\big(f(x)\big) = x$.
3. Montrer qu'il existe une fonction h définie sur **R** et telle que pour tout réel x, $f(h(g(x))) = 2x^2 + 16x + 26$.
Calculer $h(\pi)$.

1. a est un antécédent de b par *f* équivaut à $f(a) = b$ c'est-à-dire $2a - 4 = b$ soit $a = \frac{1}{2}b + 2$ et il y a donc bien un unique antécédent a de b par f.
2. D'après la question précédente, $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
Par définition de la fonction g, pour tout réel x, $g(x)$ est l'antécédent par f de x donc $f\big(g(x)\big) = x$.
De plus, $f(x)$ est l'image de x par la fonction f donc x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f. Comme cet antécédent est unique et par définition de la fonction g, $g\big(f(x)\big) = x$.

Remarque : on pourrait retrouver ces égalités par le calcul algébrique des images successives.

3. D'après la question 2. et si la fonction h existe alors, pour tout réel x, $f\left(h\left(g\left(f(x)\right)\right)\right) = f(h(x))$.

Or $f\left(h\left(g\left(f(x)\right)\right)\right) = 2(f(x))^2 + 16f(x) + 26 = 2(2x-4)^2 + 16(2x-4) + 26 = 8x^2 - 6$.

Soit $f(h(x)) = 8x^2 - 6$. Comme, toujours d'après la question 2. $g\left(f(h(x))\right) = h(x)$, on en déduit que $h(x) = g(8x^2 - 6) = \frac{1}{2}(8x^2 - 6) + 2 = 4x^2 - 1$.

On peut vérifier que la fonction h convient et $h(\pi) = 4\pi^2 - 1$.

Exercice 1. 4 Pollution sonore

On aligne les microphones A, B et C en ligne droite de manière que A soit situé à 1 km à l'ouest de B et que C soit situé à 2 km à l'est de B. Un grand bruit est produit à un point P, ce dernier n'étant pas situé sur cette ligne. Le son voyage à une vitesse de $\frac{1}{3}\mathrm{km.s^{-1}}$ et a été capté par chacun des trois microphones.

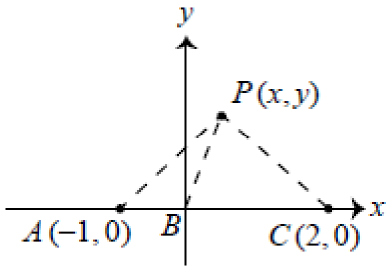
Le microphone B est le premier à capter le son. Le microphone A capte le son $\frac{1}{2}$ s après le microphone B tandis que le microphone C le capte 1 s après le microphone A.

Déterminer la distance entre le microphone B et le point P.

On place les points A, B et C dans un repère orthonormé dont l'origine est B et tel qu'on ait $A(-1{,}0)$ et $C(2{,}0)$.

On note (x, y) les coordonnées de P et on pose $PB = d$.

Puisque le son arrive au point A $\frac{1}{2}$ s après qu'il soit arrivé à B et que le son voyage à la vitesse $\frac{1}{3}\mathrm{km.s^{-1}}$, le point A est situé à $\frac{1}{6}$ km de plus du point P que le point B soit $PA = d + \frac{1}{6}$.



Puisque le son arrive au point C 1 s après être arrivé au point A, le point C est situé à $\frac{1}{3}$ km de plus du point P que le point A soit $PC = d + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = d + \frac{1}{2}$.

Ceci s'écrit :

$PB^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = d^2$ soit $x^2 + y^2 = d^2$

$PA^2 = (x+1)^2 + y^2 = \left(d + \frac{1}{6}\right)^2$ soit $x^2 + 2x + 1 + y^2 = d^2 + \frac{1}{3}d + \frac{1}{36}$

$PC^2 = (x-2)^2 + y^2 = \left(d + \frac{1}{2}\right)^2$ soit $x^2 - 4x + 4 + y^2 = d^2 + d + \frac{1}{4}$

En soustrayant la première équation à la deuxième, on obtient : $2x + 1 = \frac{1}{3}d + \frac{1}{36}$.

En soustrayant la première équation à la troisième, on obtient : $-4x + 4 = d + \frac{1}{4}$.

On en tire $2(2x+1) + (-4x+4) = 2\left(\frac{1}{3}d + \frac{1}{36}\right) + d + \frac{1}{4}$ soit $6 = \frac{5}{3}d + \frac{11}{36}$ soit $d = \frac{41}{12}$.

Le point P est donc à $\frac{41}{12}$ km du point B

Exercice 1. 5 Parallélogramme

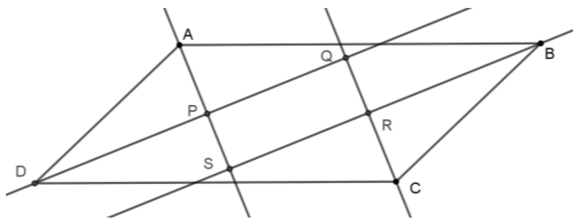
On considère un parallélogramme ABCD. On note $AB = a$ et $BC = b$ et on suppose que $a > b$.

Les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles du parallélogramme forment un quadrilatère $PQRS$.

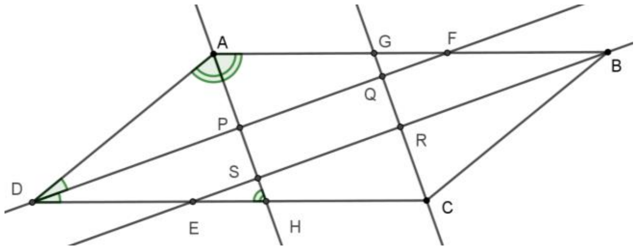
1. Démontrer que PQRS est un rectangle.

2. Démontrer que $PR = a - b$.

3. On suppose que l'aire du rectangle PQRS est égale à celle du parallélogramme ABCD. Quel est le rapport $\frac{a}{b}$?



1. La bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$ (respectivement $\widehat{ABC}$) coupe la droite (AB) (respectivement (DC)) en F (respectivement E). On définit de manière identique les points H et G.
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme donc ses angles opposés ont deux à deux même mesure.
On en déduit que :



$\widehat{ADF} = \widehat{FDC} = \widehat{BEF} = \widehat{EBC} = x$ et $\widehat{DAH} = \widehat{HAB} = \widehat{DCG} = \widehat{GCB} = y$.
Dans le triangle ADH, on peut donc écrire $2x + 2y = 180°$ soit $x + y = 90°$.
On en déduit, en se plaçant dans le triangle ADP, que $\widehat{APD} = 90°$. On démontre de même que les angles en Q et R sont droits et que le quadrilatère $PQRS$ est un rectangle.
2. Comme $\widehat{HAB}$ et $\widehat{AHD}$ sont alternes-internes, ils ont même mesure y et le triangle ADH est isocèle en D. Donc $DH = AD = b$. On montre de même que le triangle BGC est isocèle en B et que $BG = BC = b$.
Ces deux triangles sont de plus isométriques (deux côtés de même longueur b entourant un angle de même mesure y). De plus, les droites (DF) et (BE) sont les aussi les médiatrices respectives des segments $[AH]$ et $[GC]$. Donc $AP = GR$.
Par ailleurs, le quadrilatère AHCF est un parallélogramme (angles opposés deux à deux de même mesure y et $180° - y$) donc les droites (AP) et (GR) sont parallèles.
Le quadrilatère APRG est donc un parallélogramme et $PR = AG = a - b$.
3. L'aire du quadrilatère PQRS est la somme des aires des deux triangles rectangles PQR et PRS, qui sont isométriques.
Si on appelle α la mesure de l'angle $\widehat{EDP}$ (qui est égal à $\widehat{RPQ}$), et $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle PQRD, on a $\mathcal{A} = (a-b)^2 \sin\alpha\ \cos\alpha$ (trigonométrie dans les triangles rectangles). L'aire A du parallélogramme ABCD est le produit de la longueur a par la hauteur $b \sin 2\alpha$ (trigonométrie dans le triangle rectangle ADM, où M est le projeté orthogonal du point A sur (CD). Finalement, l'égalité des deux aires s'écrit $2ab = (a-b)^2$. L'équation d'inconnue $x = \frac{a}{b}$ s'écrit $x^2 - 4x + 1 = 0$ et sa solution supérieure à 1 ($a > b$) est $2 + \sqrt{3}$

Problème 1. 6 Des carrés et des cubes
Partie A : Somme de deux carrés Origine Bordeaux
1. On cherche à savoir s'il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$a \leq b \text{ et } 2018 = a^2 + b^2.$$

a. Justifier que $a \leq 31$.
b. Démontrer que si a et b sont pairs alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.
c. Démontrer que a et b ne peuvent pas être de parités différentes. Que peut-on en déduire pour a et b ?
d. Quels sont les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier naturel impair ? En déduire que le chiffre des unités de a ne peut-être ni 1, ni 5, ni 9.

2. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $2018 = a^2 + b^2$.

Partie B : Somme de deux cubes
1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls, on pose $N = a^3 + b^3$.
a. Démontrer que

$$N = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ et } 4N - (a+b)^3 = 3(a+b)(a-b)^2$$

b. En déduire que N possède un diviseur d tel que $N \leq d^3 \leq 4N$.
c. Existe-t-il deux entiers naturels a et b tels que $2018 = a^3 + b^3$? On rappelle que 1009 est un nombre premier.

2. Dans cette question $N = 62558$.
a. Vérifier que N est un multiple de 2018.
b. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $N = a^3 + b^3$. Quelles sont les valeurs de $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$?
c. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $62558 = a^3 + b^3$.

2. Ecrire un algorithme qui permet de montrer que 62558 est le plus petit multiple de 2018 qui peut s'écrire comme somme de deux cubes d'entiers naturels non nuls.

Partie A

1. *a.* Comme $0 \leq a \leq b$, on a $a^2 \leq b^2$ donc $2a^2 \leq a^2 + b^2 = 2018$ d'où $a \leq \sqrt{1009} \approx 31{,}8$.
a étant entier, on en déduit $a \leq 31$.

b. Si a et b sont pairs, il existe deux entiers a' et b' tels que $a = 2a'$ et $b = 2b'$.
$a^2 + b^2 = 4a'^2 + 4b'^2 = 4(a'^2 + b'^2)$ est un multiple de 4 car $a'^2 + b'^2$ est un entier.

c. Si a et b sont de parités différentes, il en est de même pour a^2 et b^2, donc $a^2 + b^2$ est impair, ce qui est impossible puisque 2018 est pair.
Il est donc impossible que a et b soient de parités différentes, ils ont donc même parité et ne peuvent pas être tous les deux pairs car 2018 n'est pas un multiple de 4. Ils sont donc tous les deux impairs.

d. Les tables de multiplication permettent de dire que les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier impair sont 1, 5, 9. Si le chiffre des unités de a est 1 ou 9, celui de a^2 est 1 et comme celui de $a^2 + b^2$ est 8, celui de b^2 est 7, ce qui est impossible. De même, si le chiffre des unités de a est 5, celui de a^2 est 5 et comme celui de $a^2 + b^2$ est 8, celui de b^2 est 3, ce qui est impossible. Le chiffre des unités de a ne peut donc être ni 1, ni 5, ni 9. C'est donc 3 ou 7.

2. D'après **1.a** et **1.d**, si (a, b) est solution et $a \leq b$ alors a est l'un des nombres 3, 7, 13, 17, 23, 27.
En calculant $b = \sqrt{2018 - a^2}$, on obtient un entier si seulement si $a = 13$. On a alors $b = 43$.
On en déduit que les couples solutions sont $(13{,}43)$ et $(43{,}13)$.

Partie B

1. *a.* $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 = N$.

$$4N - (a+b)^3 = 4(a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)^3 = (a+b)(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2)$$

Soit $4N - (a+b)^3 = (a+b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = 3(a+b)(a-b)^2$

b. Comme a et b sont des entiers, $a^2 - ab + b^2$ et $d = a + b$ sont entiers donc d est un diviseur de N.

$d^3 - N = (a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2$ donc $d^3 - N \geq 0$ d'où $N \leq d^3$.

$4N - d^3 = 3(a+b)(a-b)^2$ donc $4N - d^3 \geq 0$ d'où $d^3 \leq 4N$.

c. Les diviseurs de 2018 sont 1, 2, 1009, 2018.
Aucun d'entre eux ne vérifie l'encadrement $2018 \leq d^3 \leq 4 \times 2018$, donc il n'existe pas deux entiers naturels non nuls a et b tels que $a^3 + b^3 = 2018$. De plus, 2018 n'est pas le cube d'un entier donc il n'existe pas deux entiers naturels a et b tels que $a^3 + b^3 = 2018$.

2. *a.* $N = 31 \times 2018$ est un multiple de 2018.

b. Les diviseurs de N sont 1, 2, 31, 62, 1009, 2018, 31276, 62558.
Le seul qui vérifie l'encadrement $N \leq d^3 \leq 4N$ est 62.
Donc $a + b = 62$ et $a^2 - ab + b^2 = \frac{N}{a+b} = 1009$.

c. $b = 62 - a$ et $a^2 - ab + b^2 = 1009$ donnent $a^2 - a(62 - a) + (62 - a)^2 = 1009$.
Donc $3a^2 - 186a + 2835 = 0$ d'où $a^2 - 62a + 945 = 0$.
La résolution de cette équation donne deux solutions $a = 27$ ou $a = 35$.
On vérifie sans peine que les couples $(27{,}35)$ et $(35{,}27)$ sont solutions. Ce sont donc les seules.

3. À droite**,** Un exemple d'algorithme qui affiche le plus petit multiple de 2018 qui s'écrit comme somme de deux cubes d'entiers naturels non nuls.

Initilisations				
	Affecter la valeur 0 à N Affecter la valeur 0 à S			
Traitement	Tant que S=0			
		Affecter à N la valeur de$N + 2018$ Affecter à M la partie entière de$\sqrt[3]{N/2}$ Pour A variant de 1 à M		
			Affecter à B la valeur $\sqrt[3]{N - A^3}$	
			Si B est un entier	
				Affecter à S la valeur 1
			FinSi	
		FinPour		
	FinTantQue			
	Afficher P			