Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

Fiche numéro 2

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées sous forme numérique (format .pdf ou image) par les professeurs selon les modalités précisées lors de l'inscription.

Exercice 2. 1 Bataille d'exposants

Sachant que $2^{200} \times 2^{203} + 2^{163} \times 2^{241} + 2^{126} \times 2^{277} = 32^n$, quelle est la valeur de n ?

$2^{200} \times 2^{203} + 2^{163} \times 2^{241} + 2^{126} \times 2^{277} = 2^{403} + 2^{404} + 2^{403} = 2 \times 2^{403} + 2^{404} = 2 \times 2^{404} = 2^{405}$

D'autre part, $32^n = (2^5)^n = 2^{5n}$.
n est donc l'entier solution de l'équation $5n = 405$ soit $n = 81$.

Exercice 2. 2 Équations en chaîne

Déterminer tous les triplets de réels (x, y, z) vérifiant le système d'équations : $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-3)(z+2) = 0. \\ x + yz = 9 \end{cases}$

La première équation équivaut à $x = 1$ ou $y = 2$.
La deuxième équation équivaut à $x = 3$ ou $z = -2$.
<u>1er cas :</u> $x = 1$. Alors on ne peut avoir $x = 3$ donc $z = -2$ et la troisième équation donne $y = -4$.
<u>2e cas :</u> $x \neq 1$. Alors, d'après la première équation, $y = 2$ et on a deux possibilités pour la deuxième équation :

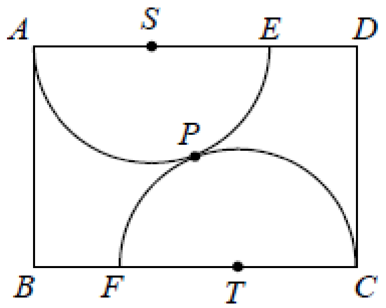
- $x = 3$ et alors la troisième équation donne $z = 3$
- $z = -2$ et alors la troisième équation donne $x = 13$.

Les seuls triplets possibles sont donc $(1, -4, -2), (3,2,3), (13,2,-2)$;
On vérifie que ces triplets sont bien solutions du système initial.

Exercice 2. 3 Contact

Dans la figure ci-contre, on considère le rectangle ABCD tel que :
$AB = 4$ et $BC = 6$.
Le demi-cercle de diamètre $[AE]$ a pour centre S.
Le demi-cercle de diamètre $[FC]$ a pour centre T.
Les deux demi-cercles, de centres S et T sont tangents au point P et ont le même rayon r.

Quelle est la valeur de r ?



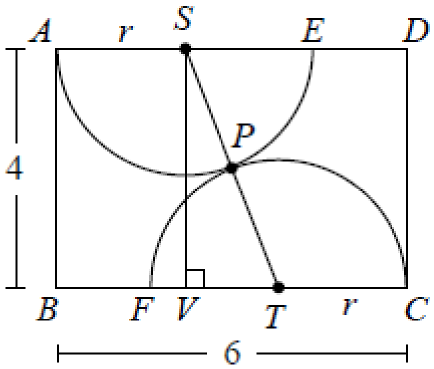
Soit V le projeté orthogonal de S sur (BC). Le quadrilatère $ABVS$ =
a trois angles droits. C'est donc un rectangle et on en déduit les égalités :
$BV = AS = r$ et $SV = 4$.
D'autre part les demi-cercles étant tangents en P et de même rayon r, le point P appartient au segment $[ST]$ et on a :
$ST = SP + PT = 2r$.
Enfin $VT = BC - BV - TC = 6 - 2r$.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle SVT rectangle en V, on obtient l'égalité :

$$ST^2 = VT^2 + SV^2$$

qui se traduit par l'équation $(2r)^2 = (6 - 2r)^2 + 4^2$

soit, après simplifications, $24r = 52$ ce qui donne $r = \frac{13}{6}$.



Exercice 2. 4 Deux sacs de boules

Bruno et Crystel ont chacun un sac de 9 boules. Dans chaque sac, les boules sont numérotées de 1 à 9. Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule de leur propre sac.

Soit b la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Bruno et soit c la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Crystel.

Déterminer la probabilité pour que la différence entre b et c soit un multiple de 4.

Supposons que Bruno enlève la boule numéro x de son sac et que Crystel enlève la boule numéro y de son sac.

Alors $b = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - x = 45 - x$

et $c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - y = 45 - y$.

Donc $b - c = (45 - x) - (45 - y) = y - x$.

Puisque $1 \leq x \leq 9$ et $1 \leq y \leq 9$ alors $-9 \leq -x - 1$ et par somme $-8 \leq y - x \leq 8$.

Puisque $b - c$, qui est égal à $y - x$, peut prendre des valeurs de -8 à 8, alors pour être un multiple de 4, il doit être égal à $-8, -4, 0, 4$ ou 8.

Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule parmi les 9 boules de leur sac et chaque boule a la même chance d'être choisie. La probabilité de choisir une boule est donc égale à $\frac{1}{9}$. La probabilité de choisir deux boules (une boule de chaque sac) est donc égale à $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$, c'est-à-dire $\frac{1}{81}$.

Pour calculer la probabilité demandée, on va donc compter le nombre de couples (x, y) tels que $y - x$ est égal à $-8, -4, 0, 4$ ou 8, et multiplier ce nombre par $\frac{1}{81}$.

Si $y - x = -8$, alors (x, y) doit être égal à (9,1).

Si $y - x = 8$, alors (x, y) doit être égal à (1,9).

Si $y - x = -4$, alors (x, y) doit être égal à $(5,1), (6,2), (7,3), (8,4)$ ou $(9,5)$.

Si $y - x = 4$, alors (x, y) doit être égal à $(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)$ ou $(5,9)$.

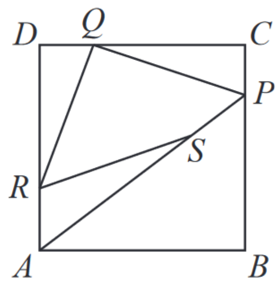
Si $y - x = 0$, alors (x, y) doit être égal à $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8)$ ou $(9,9)$.

Il y a donc 21 couples (x, y). La probabilité demandée est donc égale à $\frac{21}{81}$ soit $\frac{7}{27}$.

Exercice 2. 5 Partage d'un carré

On considère un carré $ABCD$ dont les côtés ont pour longueur 4. Soit k un réel compris strictement entre 0 et 4, on considère les points P, Q, R, S situés respectivement sur les segments$[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$ de manière que :

$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QD} = \frac{DR}{RA} = \frac{AS}{SP} = \frac{k}{4-k}.$$



Quelle est la valeur de k qui minimise l'aire du quadrilatère $PQRS$?

L'aire du carré $ABCD$ vaut 16. Celle du quadrilatère est l'aire du quadrilatère ABC moins la somme des aires des triangles ABP, PCQ, QDR et RAS.

Comme $\frac{BP}{PC}=\frac{k}{4-k}$. Alors il existe un réel x tel que $BP=kx$ et $PC=(4-k)x$.
Comme de plus $4=BC=BP+PC=4x$, on en déduit $x=1$ et donc $BP=k$ et $PC=4-k$.
De même, $CQ=DR=k$ et $QD=RA=4-k$.
L'aire du triangle ABP, rectangle en B est donc égale à $\frac{1}{2}AB\times BP=2k$.
L'aire du triangle PCQ, rectangle en C est donc égale à $\frac{1}{2}PC\times CQ=\frac{1}{2}\times(4-k)k$.
L'aire du triangle QDR, rectangle en D est donc égale à $\frac{1}{2}QD\times DR=\frac{1}{2}\times(4-k)k$.
Pour calculer l'aire du triangle RAS, on commence par calculer celle du triangle APR qui a une base $[RA]$ associée à la hauteur 4.
L'aire du triangle ARP est donc égale à $\frac{1}{2}\times(4-k)4=2(4-k)$.
La base $[AP]$ du triangle ARP est divisée en deux segments de longueurs AS et SP qui sont dans le rapport $\frac{k}{4-k}$.
On a donc $\frac{AS}{AP}=\frac{AS}{AS+SP}=\frac{\frac{AS}{SP}}{\frac{AS}{SP}+1}=\frac{\frac{k}{4-k}}{\frac{k}{4-k}+1}=\frac{k}{k+4-k}=\frac{k}{4}$. On en déduit que l'aire du triangle ARS est égale à $\frac{k}{4}$ fois celle du triangle ARP (puisque ces deux triangles ont la même hauteur, la distance de R à la droite (AP)).
Cette aire vaut donc $\frac{k}{4}\times 2(4-k)=\frac{1}{2}k(4-k)$.
L'aire du quadrilatère $PQRS$ est donc égale à

$$16-2k-3\times\frac{1}{2}k(4-k)=16-2k-\frac{3}{2}\times 4k+\frac{3}{2}k^2=\frac{3}{2}k^2-8k+16$$

Le minimum de cette expression, puisque $\frac{3}{2}>0$, est atteint pour $k=-\frac{-8}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}$.

Problème 2. 1

A - Un résultat préliminaire

Soient a,b et c trois réels tels que $\neq 0$.
On considère l'équation du second degré $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, d'inconnue x.
1. Démontrer que si cette équation admet deux solutions distinctes, alors leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.
2. Démontrer que si a et c sont de signes différents alors l'équation admet deux solutions distinctes de signes différents.

B - Extraction de décimales

1. Soit x un nombre réel.
On appelle **partie entière** de x l'unique entier n tel que $n\leq x<n+1$.
On note alors $E(x)$ cet entier n.
Par exemple $E(\sqrt{2})=1$ et $E(100\sqrt{2})=141$.
a. Donner $E(10\pi)$, $10E(10\pi)$ puis $E(100\pi-10E(10\pi))$.
b. Vérifier que $E\big(1000\pi-10E(100\pi)\big)=1$.

c. Calculer $E\left(10^k\pi-10E(10^{k-1}\pi)\right)$ pour l'entier $k=6$.
2. On considère la fonction B qui, à un réel x associe le bloc des six chiffres qui suivent la virgule dans l'écriture décimale de x affichée par la calculatrice.
Par exemple $B(\sqrt{2})=414213$ et $B(1{,}05)=050000$.
a. Donner $B(\pi)$.
b. À l'aide de la question 1, écrire un algorithme permettant d'obtenir $B(x)$ à chaque saisie de x par un utilisateur.

C - La fonction « Password »

L'administrateur d'un site internet a créé un petit algorithme utilisant la fonction B précédente afin de générer automatiquement le mot de passe d'un utilisateur en fonction de sa date de naissance.

Pour la suite, j désigne le jour, m le mois et a l'année de naissance de l'utilisateur.

1. On considère l'équation (E) : $jx^2 + mx + 1\,890 - a = 0$.
Démontrer que, compte tenu des valeurs possibles pour j, m et a, cette équation admet deux solutions distinctes de signes différents. On notera, par la suite, $r(j, m, a)$ la solution positive de cette équation.

2. On considère la fonction suivante :

```
Fonction Password(j, m, a)
    r ← r(j, m, a))
    Renvoyer(B(r))
```

a. Que renvoie la fonction Password pour Mileva qui est née le 19 juin 1974 ?
b. Justifier que cette fonction permet toujours d'obtenir un mot de passe.
c. L'administrateur a décidé, pour des raisons de sécurité, que le mot de passe 000000 est interdit.
(i) Zinedine est né le 1er décembre 1998.
Vérifier que, dans ce cas, la fonction Password donne le mot de passe interdit.
(ii) Albert, qui n'est pas encore centenaire, a son anniversaire le fameux « Pi Day », c'est à dire le 14 mars. Sachant que la fonction Password lui attribue le mot de passe interdit, combien de bougies va-t-il souffler cette année ?

Éléments de solution

A- Un résultat préliminaire
1. et **2.** Démarche algébrique élémentaire.

1. Extraction des décimales
a. $\mathbf{(10\pi) = 31 ; 10E(10\pi) = 310 ; E(100\pi - 10E(10\pi)) = 4}$ **.**

b. Simple vérification.

c. Pour chaque entier $k \geq 1$, $E(10^k\pi - 10(10^{k-1}\pi))$ fournit la k-ième décimale du nombre π lorsque l'on considère son écriture décimale.
Pour $k = 6$ on obtient la sixième décimale de π, donc $E(10^6\pi - 10(10^5\pi))$ = 2
2. a. $\mathbf{B(\pi) = 141592.}$
b. Un exemple possible d'algorithme

k est un nombre
x est un nombre
B est une liste de nombres
Pour k allant de 1 à 6
$B[k]$ prend la valeur $E(10^k x - 10(10^{k-1}x))$
Fin Pour
Afficher B

B- La fonction « Password »

1. Sachant que le doyen actuel de l'humanité n'a pas plus de 127 ans, l'année de naissance d'un individu encore en vie est nécessairement supérieure à 1890.

Comme $a > 1890$, $1890 - a < 0$;
De plus $1 \leq j \leq 31$, donc les coefficients j et $1890 - a$ dans l'équation $jx^2 + mx + 1\,890 - a = 0$ sont de signes opposés. Par conséquent cette équation admet deux solutions distinctes de signes contraires d'après la partie A.
2.
a. On résout l'équation $19x^2 + 6x - 84 = 0$ qui admet bien une solution positive unique r. $r \approx 1{,}950655329$, donc pour Mileva, la fonction « Password » renvoie 950655.

b. D'après la question C- 1, l'équation $jx^2 + mx + 1\,890 - a = 0$admet deux solutions distinctes de signes contraires : il existe donc une solution positive et la fonction « Password » permet toujours d'obtenir un mot de passe.

c. i. On résout l'équation $x^2 + 12x - 108 = 0$ qui a pour solution 6 et -18.
La solution positive étant 6, la fonction « Password » donne bien 000000.

ii. On cherche donc à déterminer des valeurs possibles de a.

Il suffit de s'intéresser aux équations du type $14x^2 + 3x + 1890 - a = 0$ et de déterminer les valeurs de a qui donnent une solution entière.

Posons $c = a - 1890$ et considérons l'équation $14x^2 + 3x - c = 0$.

$\Delta = 9 + 56c$, avec $0 < c \leq 128$.

La solution positive de cette équation est $\frac{-3+\sqrt{\Delta}}{28}$.

il suffit de faire un balayage avec c variant entre 1 et 128 avec un pas de 1 pour obtenir les solutions entières :

Il y a donc deux possibilités : $c = 17$ ou $c = 62$; or Albert n'est pas centenaire, il est donc né le 14 mars 1952 : il a donc 68 ans le 14 mars 2020.

c	solution r	c	solution r	c	solution r	c	solution r
1	0,1807949196	33	1,4318901019	65	2,0502483301	97	2,5272548008
2	0,2857142857	34	1,4549234092	66	2,0667396848	98	2,5407770042
3	0,3680048106	35	1,4776219809	67	2,0831068724	99	2,5542305032
4	0,4380120544	36	1,5	68	2,0993526559	100	2,5676163348
5	0,5	37	1,5220706754	69	2,1154796975	101	2,5809355097
6	0,5562205579	38	1,543846333	70	2,1314905635	102	2,5941890139
7	0,6080351569	39	1,5653384963	71	2,1473877289	103	2,6073778094
8	0,6563413688	40	1,5865579573	72	2,1631735822	104	2,6205028347
9	0,7017679752	41	1,6075148406	73	2,1788504294	105	2,6335650061
10	0,7447757458	42	1,628218659	74	2,194420498	106	2,646565218
11	0,7857142857	43	1,6486783648	75	2,2098859405	107	2,6595043438
12	0,8248563108	44	1,6689023942	76	2,2252488382	108	2,6723832367
13	0,8624194257	45	1,6888987087	77	2,2405112042	109	2,6852027299
14	0,89858056	46	1,7086748313	78	2,2556749867	110	2,697963638
15	0,9334858775	47	1,7282378796	79	2,2707420717	111	2,7106667568
16	0,9672577826	48	1,7475945961	80	2,2857142857	112	2,7233128644
17	1	49	1,7667513746	81	2,3005933987	113	2,7359027217
18	1,0318013371	50	1,7857142857	82	2,315381126	114	2,7484370725
19	1,0627385253	51	1,8044890987	83	2,3300791312	115	2,7609166447
20	1,0928784012	52	1,8230813024	84	2,3446890278	116	2,7733421502
21	1,1222796056	53	1,8414961237	85	2,3592123815	117	2,7857142857
22	1,1509939253	54	1,8597385447	86	2,3736507124	118	2,7980337331
23	1,1790673647	55	1,8778133188	87	2,3880054964	119	2,8103011598
24	1,2065410113	56	1,8957249847	88	2,4022781672	120	2,8225172193
25	1,2334517414	57	1,91347788	89	2,4164701181	121	2,8346825515
26	1,2598328006	58	1,9310761533	90	2,4305827034	122	2,8467977831
27	1,2857142857	59	1,9485237759	91	2,4446172397	123	2,8588635281
28	1,3111235465	60	1,9658245516	92	2,458575008	124	2,8708803881
29	1,3360855251	61	1,9829821269	93	2,4724572542	125	2,8828489523
30	1,360623042	62	2	94	2,4862651914	126	2,8947697985
31	1,384757041	63	2,0168815287	95	2,5	127	2,9066434928
32	1,4085067981	64	2,0336299387	96	2,5136628299	128	2,9184705905