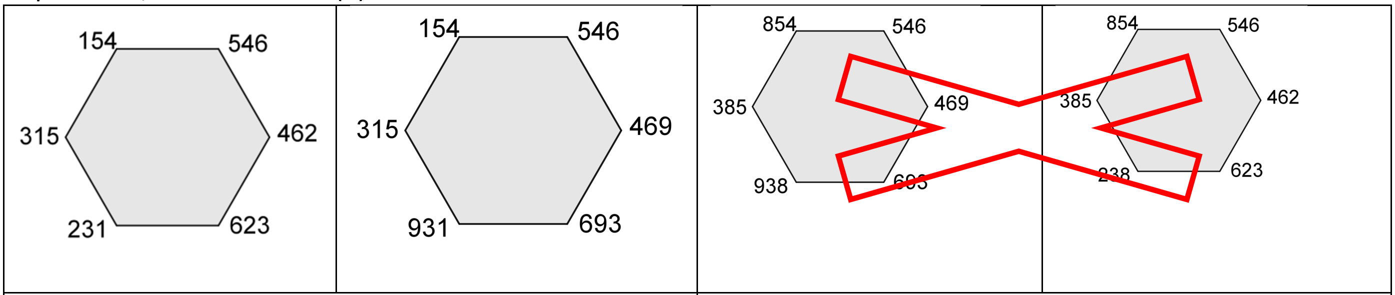
Rédaction possible pour « Les derniers seront les premiers »

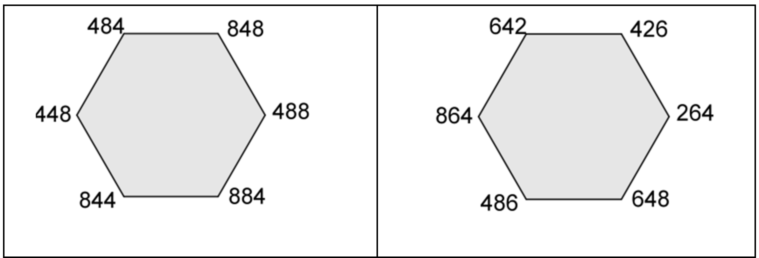
1. Partons de 154. On trouve $78 \times 7 = 546$, $66 \times 7 = 462$ ou $67 \times 7 = 469$.
Si on poursuit avec 462, on trouve $89 \times 7 = 623$, puis $33 \times 7 = 231$ ou $34 \times 7 = 238$
Si on poursuit avec 231, on trouve $45 \times 7 = 315$, qui donne bien 154
Exploitons les autres possibilités : 469 donne $99 \times 7 = 693$ et 693 donne $133 \times 7 = 931$ ou $134 \times 7 = 938$ (*)
Après 931, on retrouve 315.
Après 238, on trouve 385 (*)



Deux solutions	(*) Deux suites renvoyant à 854 (pas solutions, donc)

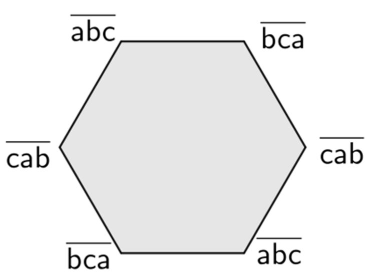
2. Considérons un multiple de 5 apparaissant dans un tel cycle. Son chiffre des unités est un 0 ou un 5. Le 0 est interdit. Donc le chiffre des unités est un 5, qui se transforme en chiffre des dizaines du nombre suivant, qui se termine donc par 55. Le suivant est donc 555, interdit. Comme l'interdit arrive au troisième nombre considéré, il n'y a pas de cycle de six nombres solution.

3. Le cycle avec des multiples de 6 représenté ci-contre règle la question pour 2 et 3 aussi, puisque tout multiple de 6 est un multiple de 2 et de 3.
Un cycle constitué de multiples de 4 est représenté ci-contre.
Le tableau ci-dessous envisage les terminaisons des multiples de 8 compris entre 112 et 992 et, pour chacune d'elles, la terminaison possible pour le nombre suivant dans un cycle (on a éliminé les 0). Ce tableau permet de constater que la terminaison 88 est inéluctable, or les multiples de 8 commençant par 88 sont 880 et 888, tous deux interdits. Pas de solution, donc.



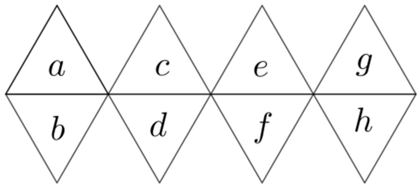
Avec des multiples de 4	*Avec des multiples de* $6 = 3 \times 2$

Terminaison	12	16	24	28	32	36	44	48	52	56	64	68	72	76	84	88	92	96
Nombre suivant	128	168	248	288	328	368	448	488	828	568	648	688	728	768	848	888	928	968



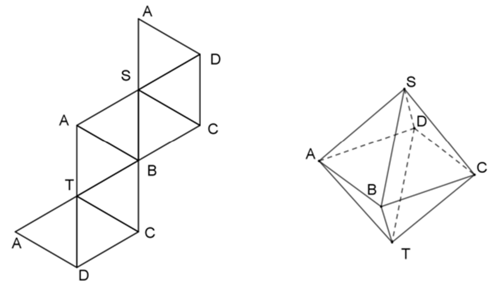
La somme des trois chiffres d'un multiple de 9 est égale à 9 ou à 18. Comme on en conserve deux pour écrire le nombre suivant, le chiffre des centaines passe en chiffre des unités, car la somme ne peut évoluer de plus de 9 (sauf en introduisant un 0, interdit). Les cycles obtenus sont donc du type ci-contre (la notation $\overline{abc}$ désigne le nombre $100a + 10b + c$, a, b et c étant des chiffres non nul et non tous les trois égaux, tels que $a + b + c = 9$ ou $a + b + c = 18$.

Rédaction possible pour « octaèdre régulier »



1. Si les huit faces sont numérotées comme sur la figure ci-contre, les quatre sommes correspondant à quatre sommets d'un carré (ici, ces points sont alignés) sont :
$(a + b) + (c + d), (c + d) + (e + f), (e + f) + (g + h), (g + h) + (a + b)$
Si ces quatre sommes sont égales, elles sont toutes égales au quart de leur total. Comme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, chaque somme vaut le quart du double de 36, c'est-à-dire 18.

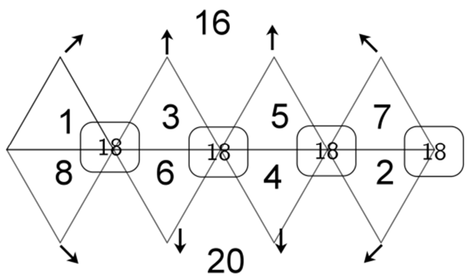
2. Si trois de ces sommes sont égales, par exemple $(a + b) + (c + d) = (c + d) + (e + f) = (e + f) + (g + h)$, on en déduit que $(a + b) = (e + f)$ et $(g + h) = (c + d)$ et donc que $(g + h) + (a + b) = (c + d) + (e + f)$. La quatrième somme est égale aux trois premières.



L'octaèdre et son patron : les carrés sont ABCD, SBTD et SATC

3. S'il y a cinq totaux identiques :
- ou bien quatre sont réalisés en les sommets d'un carré, par exemple ABCD, et le cinquième en S ou T. Dans ce cas, trois sont réalisés en des sommets d'un carré, par exemple SAC, et alors il en va de même en la quatrième T ;
- ou bien trois et pas quatre sont réalisés en des sommets d'un carré, mais alors il en est de même en le quatrième sommet de ce carré, et on a directement six sommes identiques.

4. Si on observe quatre sommes identiques et pas cinq, ces sommes sont réalisées en les sommets d'un carré (étant donné quatre sommets de l'octaèdre, trois sont des sommets d'un carré, et on observerait la même somme en ce sommet, il y aurait cinq sommes identiques). La somme observée en ces quatre sommets est donc 18. Chaque entier compris entre 1 et 8 étant utilisé trois fois (les faces ont trois sommets),la somme des sommes observées en les sommets est 108. Ôtons 72 pour les quatre sommets coplanaires, reste 36, moins 16 égale 20 pour le dernier sommet.
La répartition ci-contre prouve que ce résultat est possible.



Rédaction possible pour « Suite de chiffres »

1. La suite débutant par 1 – 7 – 8 – 9 se poursuit ainsi :

Somme	$1+7+8+9=25$	$7+8+9+5=29$	$8+9+5+9=31$	$9+5+9+1=24$	$5+9+1+4=19$	$9+1+4+9=23$	$1+4+9+3=17$	$4+9+3+7=23$	$9+3+7+3=22$	$3+7+3+2=15$
Reste mod. 10	5	9	1	4	9	3	7	3	2	5
Somme	$7+3+2+5=17$	$3+2+5+7=17$	$2+5+7+7=21$	$5+7+7+1=20$	$7+7+1+0=15$	$7+1+0+5=13$				
Reste mod. 10	7	7	1	0	5	3				

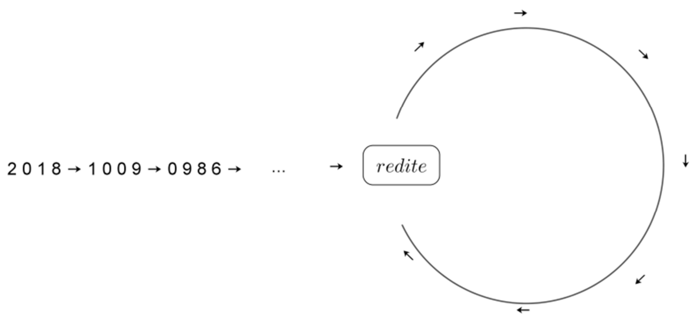
2. La suite débutant par 5 – 5 – 5 – 5 se poursuit ainsi :

Somme	$5+5+5+5=20$	$5+5+5+0=15$	$5+5+0+5=15$	$5+0+5+5=15$	$0+5+5+5=15$	$5+5+5+5=20$				
Reste mod. 10	0	5	5	5	5	0				

Après un 0, ce sont à nouveau quatre 5 qui se succèdent. Le motif se reproduit, quatre 5 suivis d'un 0.

3. On observe les parités des termes de la suite commençant par $2, 0, 1, 8$: pair, pair, impair, pair. Le cinquième terme est nécessairement impair et le schéma « pair, pair, impair, pair, impair » se reproduit à l'infini. Comme la suite de chiffres $2, 0, 1, 7$ correspond à « pair, pair, impair, impair », on ne la retrouvera pas.

4. Il y a 5^5 motifs formés avec cinq chiffres dans l'ordre « pair, pair, impair, pair, impair » (car il y a cinq chiffres pairs, 0, 2, 4, 6, et 8, et cinq chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9). Ces 3 125 motifs correspondent à 3 906 suites de 4 chiffres.
Chaque suite de quatre chiffres a un successeur unique, mais on peut remarquer qu'elle a aussi un prédécesseur unique. En effet, la succession de chiffres a, b, c, d succède à x, y, z, t tels que $d = t + a + b + c - 10k$ où k vaut $0, 1, 2$ ou 3. Donc $t = 10k + d - (a + b + c)$ et il n'y a qu'un nombre entier compris entre 0 et 10 vérifiant cette égalité. On peut ainsi « remonter » à z, y et x.
Comme il n'y a qu'un nombre fini de suites de quatre chiffres possibles, une d'elles doit réapparaître.



Cette suite dite « redite » a un prédécesseur (qui l'a fait apparaître pour la première fois) et un « autre » qui la fait apparaître pour la deuxième fois : c'est impossible, puisque toute suite de quatre chiffres n'a qu'un seul prédécesseur. On doit donc décaler : c'est ce prédécesseur qui est la « redite »… et ainsi de suite, finalement c'est 2018 qui est répété (cela s'appelle parfois le *théorème de la poêle à frire*).

Pour information, 2, 0, 1, 8 réapparaissent dans cet ordre aux rangs 1 561 et suivants.