ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then $C = 1+2+3+4+\&c$
$\therefore 4C = \quad 4 \quad + 8 \quad + \&c$
$\therefore -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$
$\therefore C = -\frac{1}{12}$.

Lycée
Marie Curie
Versailles

Lycée
Camille Pissarro
Pontoise

Un calcul écrit par Srinivasa RAMANUJAN (mathématicien indien, 1887-1920) conduit à l'égalité $1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$. Et pourtant, « on sait que… ».
Pour les anciens Grecs, les longueurs apparaissant en géométrie sont commensurables, jusqu'à l'obstacle de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Les nombres utilisés par les propagateurs du calcul écrit (Al Khwarizmi, Léonard de Pise) traduisent des situations concrètes, commerciales ou artisanales. On appelle « fausses racines » les solutions négatives des équations, avant que d'Alembert affirme qu'un polynôme de degré n a n racines. Gauss rappelle que ces racines doivent pour le moins « passer » par les opérations sur les nombres (qu'on n'appelle pas encore réels). Voilà les nombres complexes. Les opérations de base sur les quaternions sont gravées par Hamilton sur un pont de Dublin…
Alors, pourquoi pas une somme infinie associée à $-\frac{1}{12}$?

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale candidats au Concours général, les 20 et 21 février 2023

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, particulièrement des candidats au Concours général.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christophe VITALIS, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Michel ABADIE (lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, Pontoise), Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, Pontoise), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, Pontoise), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, Pontoise), Sylvain MAGNE (Lycée Suger, VAUCRESSON), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet-le Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Sacha DHENIN
… Et les professeurs accompagnant leurs élèves : Steve BOURGADE (Lycée Bascan RAMBOUILLET), Stéphanie DE QUERCIZE (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas DIDRIT (Lycée La Salle Passy Buzenval, RUEIL MALMAISON), Tancrède HUET (Lycée Alexandre Dumas, SAINT CLOUD), Cécile LHUILLIER (Lycée Hoche, VERSAILLES), Anne-Hélène MÉNARD (Lycée Bascan RAMBOUILLET),

Lundi 20 février 2023

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Accueil		
10 h 10	Exposé : Paradoxes		
11 heures	Arithmétique SD + LA	Géométrie Sy Ma	Équations MA
12 heures	Repas		
12 h 45 – 14 h 15	Arithmétique SD + LA	Géométrie Sy Ma	Équations MA
14 h 30 – 17 h	Géométrie Sy Ma	Équations MA	Arithmétique SD + LA

Mardi 21 février 2023

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Suites HC	Dénombrement SM	Dénombrement CD
11 h 20 – 12 h 30	Suites HC	Arithmétique FR	Géométrie Se Mo
12 h 30	Repas		
13 h 15 – 14 h 35	Dénombrement CD	Arithmétique FR	Géométrie Se Mo
14 h 40 – 17 h	Équations MP	Suites HC	Suites CD

Emploi du temps à Pontoise

Lundi 20 février 2023

10 heures	**Suites** RC
	Repas
13 heures	**Dénombrement** CH
15 heures	**Arithmétique** BB

Mardi 21 février 2023

10 heures	**Equations** TD
	Repas
13 h 00	**Géométrie** CH
15h45	**Exposé : Paradoxes**

Mardi 21 février 2023

Arithmétique

Exercice 1 $a^n + b^n$ multiple de $a + b$?
Soit n un entier naturel non nul pair. Déterminer les entiers naturels a, b premiers entre eux et tels que $a + b$ divise $a^n + b^n$.

Exercice 2 La somme des puissances multiple de la somme ?
Soit k un entier naturel impair.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, la somme $1 + 2 + \cdots + n$ divise la somme $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Exercice 3 Nombres premiers dans certaines suites
1. Déterminer tous les entiers naturels non nuls a et b tels que $a^4 + 4b^4$ soit un nombre premier.
2. Montrer qu'il y a une infinité d'entiers naturels non nuls c tels que, pour tout entier naturel non nul n, $c + n^4$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 4 Avec des *ppcm*
Montrer que pour tous les entiers m et n tels que $m > n > 0$, on a
$ppcm(m, n) + ppcm(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$.

Exercice 5 Six diviseurs et c'est tout
Déterminer les nombres premiers p tels que $p^2 + 11$ possède exactement 6 diviseurs distincts.

Exercice 6 Un curieux « diviseur moyen »
Soit p et q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que la moyenne arithmétique de tous les diviseurs de l'entier $n = p^a q^b$ est un nombre entier.

Exercice 7 Des multiples de 11
1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la somme S des carrés de deux entiers naturels m et n soit un multiple de 11.
2. Trouver un carré parfait de 4 chiffres qui, « retourné », donne aussi un carré parfait.

Suites numériques

Exercice 1 Combien vaut $u_{2\,023}$?
Soit (u_n) la suite définie sur $\boldsymbol{N}^*$par $u_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$. Calculer $u_{2\,023}$.

Exercice 2 Somme de puissances et carré de la somme
Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs et telle que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2.$$
Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = n$.

Exercice 3 n en divise pourtant beaucoup…
Soit n un entier strictement positif, k un entier tel que $2 \leq k \leq n$ et k entiers strictement positifs deux à deux distincts $a_1, a_2, \dots, , a_k$ appartenant à l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$ tels que, pour tout entier i, $1 \leq i \leq k-1$, n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$.
Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Exercice 4 Entre $3,999$ et 4
Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $x_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} \leq x_n$.

1. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999$.
2. Trouver une telle suite telle que $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \leq 4$.

Exercice 5 Suite arithmétique ?
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, $|u_m + u_n - u_{m+n}| \leq \frac{1}{m+n}$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique.

Exercice 6 Suites entremêlées
Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :
$$x_1 = \frac{1}{10},\ y_1 = \frac{1}{8} \text{ et, pour tout entier } n \geq 1, x_{n+1} = x_n + x_n^2 \text{ et } y_{n+1} = y_n + y_n^2.$$
Existe-t-il des entiers naturels non nuls n et m tels que $x_n = y_m$?

Exercice 7 Somme des termes positive
Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $x_{2k} = -x_k$ et $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$.
Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$.

Exercice 8
Montrer que pour toute paire d'entiers strictement positifs k et n, il existe k entiers strictement positifs (non nécessairement distincts) $m_1, m_2, \dots, m_k$ tels que :
$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Fonctions – Équations et inéquations

Exercice 1 Trois inconnues

Déterminer tous les triplets (x, y, z)de réels strictement compris entre 0 et 1 et vérifiant :

$$\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)=\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right). \qquad (1)$$

Exercice 2 Une équation fonctionnelle

Pour tout réel x, on appelle partie entière de x qu'on note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Déterminer toutes les fonctions numériques f définies sur **R** telles que :

$$\text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(E(x)y)=f(x)E(f(y)). \qquad (1)$$

Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie sur **R** et telle que :

$$\text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(x+y)\leq yf(x)+f(f(x)).$$

Montrer que pour tout réel $x\leq 0$, $f(x)=0$.

Exercice 4

Soit $f$une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)=0$ et, pour tout réel $x\in\left[0,\frac{7}{10}\right]$, $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins sept solutions dans l'intervalle $[0,1]$.
2. Donner un exemple de telle fonction.

Exercice 5

Déterminer tous les nombres réels p pour lesquels l'équation

$$x^3-2p(p+1)x^2+(p^4+4p^3-1)x-3p^3=0$$

admet trois racines réelles distinctes et qui sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 6

Soit x, y, z des réels strictement positifs et deux à deux distincts.
Montrer que $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$.

Exercice 7

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que pour tous entiers $m\geq 1$ et $n\geq 1$

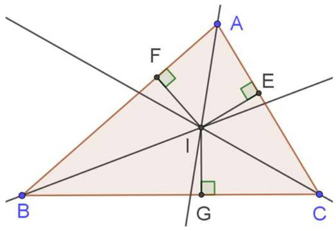
$$f(f(m)+f(n))=m+n.$$

Géométrie – Nombres complexes

Exercice 1 – tiré d'un problème du concours général 2006

Rappel :
Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point I.

Le point I est le centre d'un cercle dit inscrit dans le triangle et tangent aux côtés du triangle.



Soit ABC un triangle et h la longueur de la hauteur issue de A. On note Γ le cercle inscrit dans le triangle ABC, I son centre et r son rayon. On rappelle que I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC.
On note Δ_{B} (respectivement Δ_{C}) la droite passant par B et perpendiculaire à (BI) (respectivement passant par C et perpendiculaire à (CI)).

1. ***a.*** Soit J le point d'intersection de Δ_{B} et Δ_{C}.
Montrer que J est à égale distance des droites (AB), (BC) et (CA).
b. En déduire que J appartient à la droite (AI) et est le centre d'un cercle Γ' tangent aux droites (AB), (BC) et (CA). Ce cercle Γ' est le cercle exinscrit dans l'angle A au triangle ABC.

2. Montrer que les triangles AIC et ABI sont semblables ainsi que les triangles AIB et AJC.
En déduire que $\mathrm{AI} \times \mathrm{AJ} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.

3. Soit f l'homothétie de centre A qui envoie J sur I. Préciser les images par f du cercle Γ' et de la droite (BC).
En déduire que $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AJ}} = \frac{h-2r}{h}$.

Exercice 2 – tiré d'un problème du concours général 2013

1. Dans l'espace, soit D_1 et D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2. Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et sécante à la fois à D_1 et D_2. Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?
L'espace étant muni d'un repère orthonormal, soit ABCDEFGH le cube dont les sommets ont pour coordonnées A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1).
Soit respectivement D_1, D_2, D_3 les droites (EF), (BC), (DH).
Soit $\mathcal{S}$ l'ensembles des points M(x, y, z) tels que $xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0$.

2. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2, D_3.

3. Montrer que les droites D_1, D_2, D_3 sont incluses dans $\mathcal{S}$.

4. Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$ rencontre $\mathcal{S}$ en 0, 1 ou 2 points.

5. En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans $\mathcal{S}$.

6. Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2 et D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathcal{S}$.
Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

Exercice 3 – tiré d'un problème du concours général 2015

On considère, dans l'espace, un tétraèdre $ABCD$ (non aplati).

1. ***a***. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b. Montrer que si G_A est le centre de gravité du triangle BCD, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$.

c. On appelle médiane issue d'un sommet du tétraèdre la droite reliant ce sommet au centre de gravité de la face opposée au sommet. Montrer que les médianes du tétraèdre sont concourantes au point G.

2. Montrer qu'il existe une unique sphère passant par A, B, C et D. On l'appelle sphère *circonscrite* au tétraèdre et on note O son centre.

3. On appelle *hauteur* issue d'un sommet la droite passant par ce sommet et orthogonale au plan de la face opposée à ce sommet. On dit qu'un tétraèdre est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si tétraèdre est régulier ?

Exercice 4 – tiré d'un problème du concours général 2005

On admet que :

- la composée $s' \circ s$ de deux symétries axiales s et s' d'axes sécants en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ est la rotation de centre I et d'angle $2\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{u'}\right)$.
- Si r est la rotation de centre O et d'angle α et si M' est l'image d'un point M distinct de O alors $z_{\mathrm{M}'} = z_M \mathrm{e}^{i\alpha}$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ a pour affixe 1 et $\vec{v}$ a pour affixe i, on considère le nombre complexe $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit O, A, B, et C les points d'affixes respectives 0, 1, j et j^2.

On désigne par s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales par rapport respectivement aux droites (OA), (OB) et (OC).

Soit M un point du plan d'affixe $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, où $\rho \in \left]0, +\infty\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$.

1. On note $\mathrm{M}_1 = s_1(\mathrm{M}), \mathrm{M}_2 = s_2(\mathrm{M}), \mathrm{M}_3 = s_3(\mathrm{M})$. Montrer que les points $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ ont pour affixes respectives $\bar{z}, j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.

2. Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC). Montrer que le point J d'affixe $-\frac{1}{2}$ est le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4]$.

3. a. A quelle condition nécessaire et suffisante les points M_2, M_3 et M_4 sont-ils alignés ?

On suppose désormais que les points M_2, M_3 et M_4 ne sont pas alignés et on note Ω le centre du cercle circonscrit à $M_2M_3M_4$.

b. Justifier le fait que Ω appartient à la droite (OM_1). Dans la suite, on note son affixe $z_\Omega = \lambda\mathrm{e}^{-i\theta}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.

c. Montrer que $\lambda = -\frac{1+2\rho\cos\theta}{\rho+2\cos\theta}$.

d. En déduire une expression du rayon R, du cercle circonscrit au triangle $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$.

e. Montrer que ce rayon est égal à 1 si et seulement si « $\rho = 1$ ou $(\rho + 2\cos\theta)^2 = 1 - 3(\cos\theta)^2$ ».

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1

Albert et Béatrice jouent à un jeu. On a posé 2021 cailloux sur une table. En alternance et en commençant par Albert, ils vont retirer un certain nombre de cailloux de la table en respectant la règle suivante. Si $n \geq 1$, au $n^{ème}$ tour, le joueur dont c'est le tour, c'est-à-dire Albert si n est impair et Béatrice si n est pair, peut retirer un nombre de cailloux entre 1 et n. Au premier tour, Albert doit donc retirer 1 caillou ; au deuxième tour, Béatrice peut retirer 1 ou 2 cailloux ; au troisième tour, Albert peut en retirer 1, 2 ou 3, et ainsi de suite. Celui qui retire le dernier caillou de la table perd la partie. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie pour gagner à coup sûr.

Exercice 2 – tiré du concours général 2014

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » dans un lancer est notée p avec $0 < p < 1$.

Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi, si un joueur obtient « pile » au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer ; s'il obtient « pile » au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1 ; s'il obtient « pile » au $n^{\text{ième}}$ (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas « pile » durant les n lancers, son score est n.

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1. Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 – tiré du concours général 2019

1. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes *A*, *B* et *C* qui contiennent chacune quatre jetons indiscernables au toucher. Les jetons de *A* portent les numéros 12, 10, 3 et 1, ceux de *B* portent les numéros 9, 8, 7 et 2, et ceux de *C* portent les numéros 11, 6, 5 et 4.
   On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans *A*, *B* et *C*.
   Montrer que $P(X_A > X_B) = \frac{9}{16}$ et que $P(X_B > X_C) = \frac{9}{16}$. Que vaut $P(X_C > X_A)$?
2. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois dés cubiques et équilibrés D_1, D_2 et D_3.
   Les faces de D_1 portent les numéros 6, 3, 3, 3, 3, 3, celles de D_2 portent les numéros 5, 5, 5, 2, 2, 2, et celles de D_3 portent les numéros 4,4,4, 4, 4, 1.
   a. On lance indépendamment chacun de ces trois dés et on note respectivement X_1, X_2 et X_3 les numéros indiqués par la face supérieure des dés D_1, D_2 et D_3.
   Calculer les trois probabilités $P(X_1 > X_2), P(X_2 > X_3)$ et $P(X_3 > X_1)$.
   b. Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne.
   Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?
   c. Finalement, il est décidé que c'est Paul qui choisit en premier. Quel(s) dé(s) a-t-il intérêt à choisir ?
   d. Claire et Paul décident alors de modifier les règles. L'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé deux fois de suite et celui dont la somme des numéros est la plus grande gagne.
   Paul choisit en premier et il prend le dé *D*2. Quel dé Claire a-t-elle intérêt à choisir ?
   De façon générale, avec ces nouvelles règles, Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

Exercice 4

Soit $n \geq 100$ un entier. Clara écrit les nombres $n, n+1, \ldots, 2n$ sur des cartes distinctes. Elle mélange ensuite les $n+1$ cartes, puis les sépare en deux piles.

Montrer qu'au moins l'une des piles contient deux cartes pour lesquelles la somme des nombres est un carré parfait.