Olympiades nationales de mathématiques 2020

Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

Addition du cancre, suites de Farey et cercles de Ford

Dans tout l'énoncé, a, b, c, d désignent des entiers naturels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Partie A : l'addition du cancre

Le bon élève sait que, pour additionner deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, il faut d'abord réduire ces fractions au même dénominateur.

Toutefois, pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles, on définit « l'addition du cancre », notée $\oplus$ par : $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Ainsi, si avec l'addition standard, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. , on aura avec « l'addition du cancre » $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$.

1. Calculer $\frac{2}{3} \oplus \frac{4}{5}$ puis $\frac{4}{6} \oplus \frac{4}{5}$. Pourquoi est-il important de supposer $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ irréductibles ?
2. Justifier que $(1 \oplus 1) \oplus 2 = \frac{3}{2}$ et que $1 \oplus (1 \oplus 2) = \frac{4}{3}$. Que dire de la nécessité des parenthèses ?
   On dit que l'addition des cancres n'est pas associative.
3. Justifier que $2 \times (\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}) = \frac{4}{5}$ et calculer $\frac{2}{2} \oplus \frac{2}{3}$. Que dire de la nécessité des parenthèses ?
   On dit que l'addition des cancres n'est pas distributive.
4. Justifier que si $x = \frac{a}{b}$ et $x = \frac{c}{d}$ sont des fractions irréductibles, alors $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$.

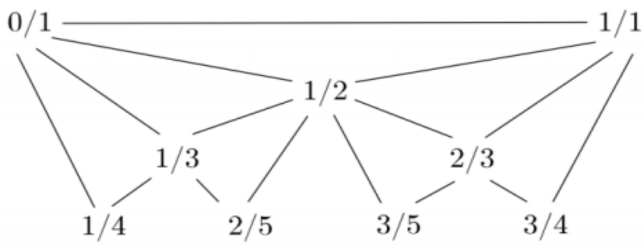
Partie B : suites de Farey

Pour tout entier $n > 1$, on appelle **suite de Farey** d'ordre n, notée F_n, la liste, rangée dans l'ordre croissant, des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, dont le dénominateur ne dépasse pas n.

Par exemple, en remarquant que $0 = \frac{0}{1}$ et $1 = \frac{1}{1}$, on a :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) \quad F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right) \quad F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right) \text{ etc.}$$

Le diagramme ci-dessous permet alors de représenter les différents termes des suites de Farey :



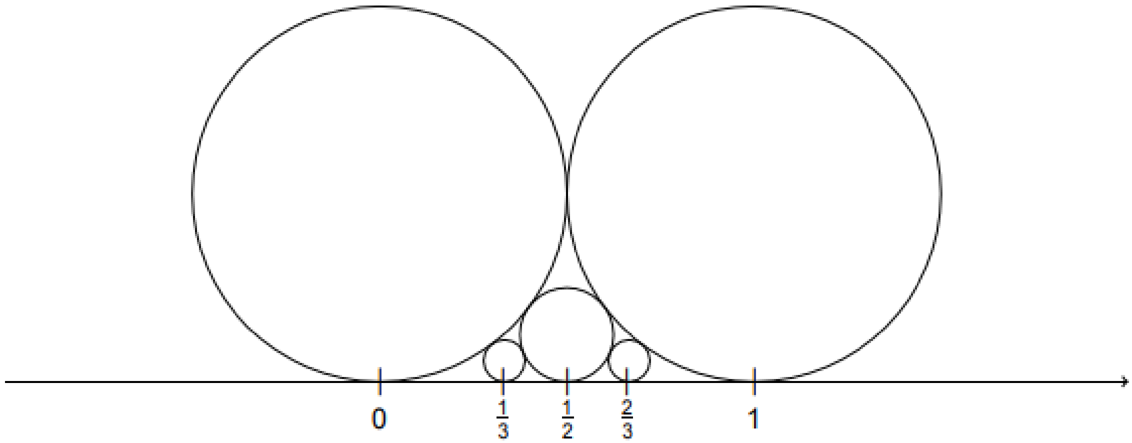
1. Recopier et compléter le schéma précédent, et déterminer F_4, F_5, F_6.
2. Justifier que pour tout $n \geq 1$, les termes d'une suite F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions consécutives de F_{n+1}, avec $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors l'une au moins de ces deux fractions appartient à F_n.
4. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions *consécutives* dans cet ordre d'une suite de Farey.
   On admettra pour toute la suite de l'énoncé que dans ce cas, on a $bc - ad = 1$.
   Montrer qu'alors $\frac{a}{b} < (\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}) < \frac{c}{d}$.
   Un candidat attentif remarquera que, plus précisément, $\frac{a+c}{b+d}$ est la première fraction qui apparaît entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dans la suite de Farey d'ordre supérieur. Ce résultat ne sera pas démontré ici.

5. Voici un algorithme écrit dans le langage python3. Si x est un réel entre 0 et 1, que représentent les valeurs a, b, c et d renvoyées ?

```
def mystere(x)
  a=0
  b=1
  c=1
  d=1
  while b+d <= 6:
    e = a+c
    f = b+d
    if (e/f) < x:
      a = e
      b = f
    else:
      c = e
      d = f
  return (a, b, c, d)
```

Partie C : cercles de Ford

On appelle cercle de Ford associé à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ le cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$et de rayon $\frac{1}{2q^2}$. On peut alors représenter les différentes suites de Farey avec ces cercles de Ford. Par exemple, la suite F_3 se représente par les différents cercles ci-dessous :



L'objectif de cette partie est de démontrer la propriété suivante : « les cercles de Ford associés à deux termes consécutifs d'une même suite de Farey sont tangents entre eux. »

1. Préciser les coordonnées des points A et B, centres des cercles de Ford respectivement associés à $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, où $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions consécutives d'une même suite de Farey.

2. Montrer alors que $AB = \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}$.

3. Conclure.

Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Les mathématiques Wasan 和算

Durant la période Edo (environ 1600 – 1868), une école particulière de mathématiques, dite « Wasan » s'est développée au Japon. L'enseignement était ouvert à tous, et on trouvait affichés dans les temples des problèmes de mathématiques, souvent à base de cercles : les « Sangaku ». On se propose dans ce sujet d'en résoudre quelques-uns.

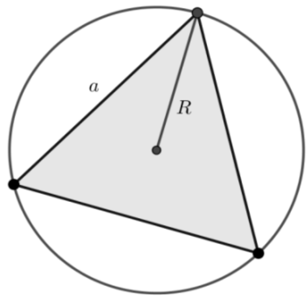
1. Un premier Sangaku visible au temple de Katayamahiko

a. *Une propriété du triangle équilatéral (figure ci-contre).*

Un triangle équilatéral de côté a est inscrit dans un cercle de rayon R.

Démontrer que $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

On pourra utiliser la propriété suivante : les médianes d'un triangle se coupent au centre de gravité qui se situe au premier tiers des médianes en partant de la base.

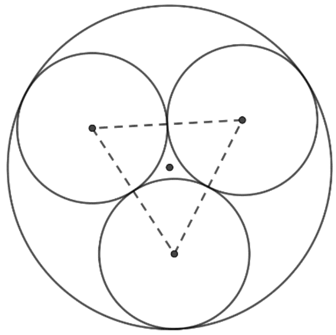


Le Sangaku de Katayamahiko (figure ci-contre).

b. Trois cercles de même rayon r sont tangents entre eux et inscrits dans un cercle de rayon r'.

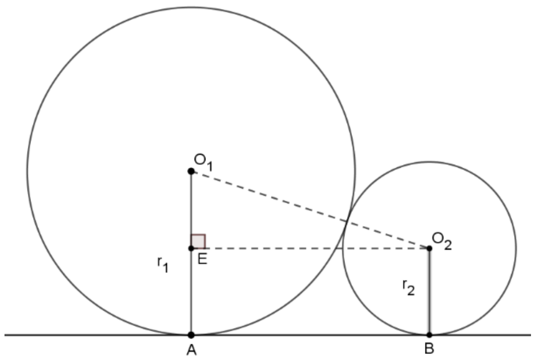
Démontrer que

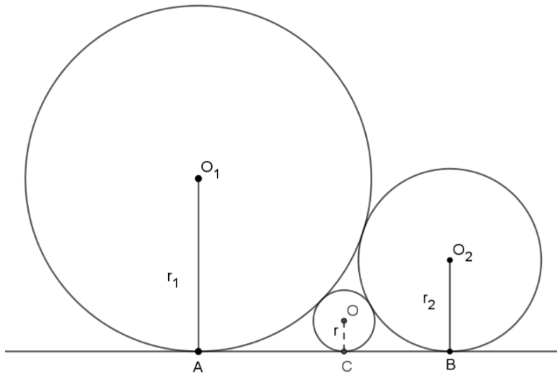
$$r' = (\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1)r$$



2. *Cercles tangents à une même droite*

a. Deux cercles de rayon r_1 et r_2 sont tous les deux tangents à la même droite en A et B, et tangents entre eux, comme sur la figure à gauche ci-dessous. Démontrer que $AB^2 = 4r_1r_2$.





b. Un troisième cercle de rayon r est tangent aux deux cercles précédents et à la même droite, comme sur la figure à droite ci-dessus.

(i) Démontrer que

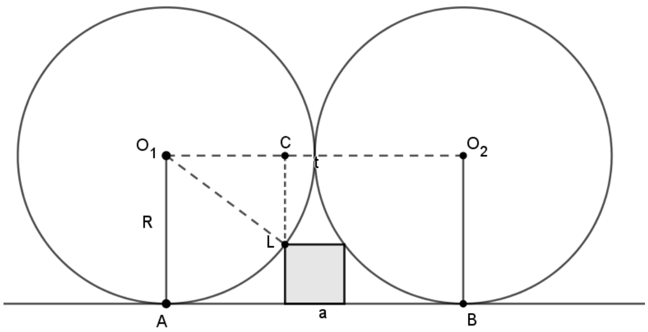
$$r = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2}}$$

(ii) Pour réaliser ce Sangaku, un artiste souhaite utiliser uniquement des valeurs entières toutes différentes pour les rayons des trois cercles. Proposer trois rayons entiers r, r_1 et r_2 qui conviennent.

c. On considère encore deux cercles, cette fois ci de même rayon R, tous deux tangents à une même droite et tangents entre eux. Un carré de côté a est inscrit entre les deux cercles et la droite, comme sur la figure ci-contre.

(i) Démontrer que $\frac{5}{4}a^2 - 3Ra + R^2 = 0$

(ii) En déduire a en fonction de R.



3. **Suite de cercles**

(Figure ci-contre)

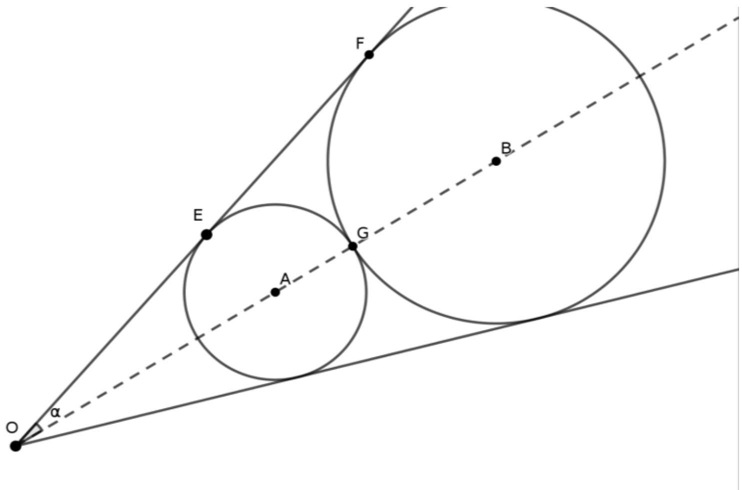
Dans un secteur angulaire d'angle 2α, on inscrit deux cercles tangents entre eux, de rayons R_1 et R_2 , avec $R_1 < R_2$, et tangents aux côtés du secteur angulaire.

Prouver que les droites (EG) et (GF) sont perpendiculaires.

a. Écrire un procédé de construction, utilisant règle, équerre et compas, du cercle de centre B connaissant le cercle de centre A.

b. Réaliser la construction sur l'annexe.

c. Prouver que $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.



4. Sangaku visible au temple de Meiserinji

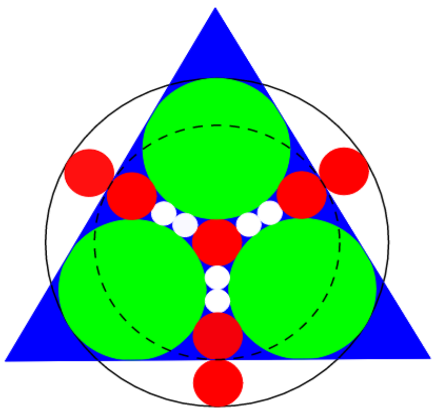
Ce Sangaku a été proposé par un jeune garçon de 15 ans, Tanabe Shigetoshi.

Tous les cercles de la figure sont tangents entre eux.

Tous les cercles de même couleur ont le même rayon.

On appelle r le rayon des plus petits, les cercles blancs au centre de la figure.

On appelle R le rayon du cercle dessiné en pointillé.



a. Exprimer R en fonction de r.

On utilisera les notations suivantes pour désigner les rayons des cercles, du plus petit au plus grand :

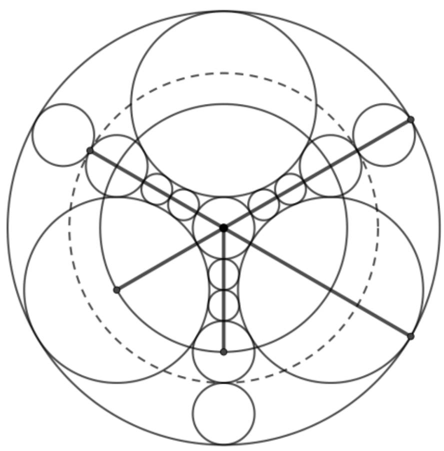
r (6 petits cercles) ; x (7 cercles) ; y (3 cercles) ; R (pointillés) ; z (grand cercle extérieur)

a. *Indice :*

Vous pouvez vous servir de la figure ci-contre, qui reproduit le problème sans le triangle, et rajoutant un cercle supplémentaire à l'intérieur du cercle pointillé, cercle qui passe par les centres de cercles de rayon x et y.

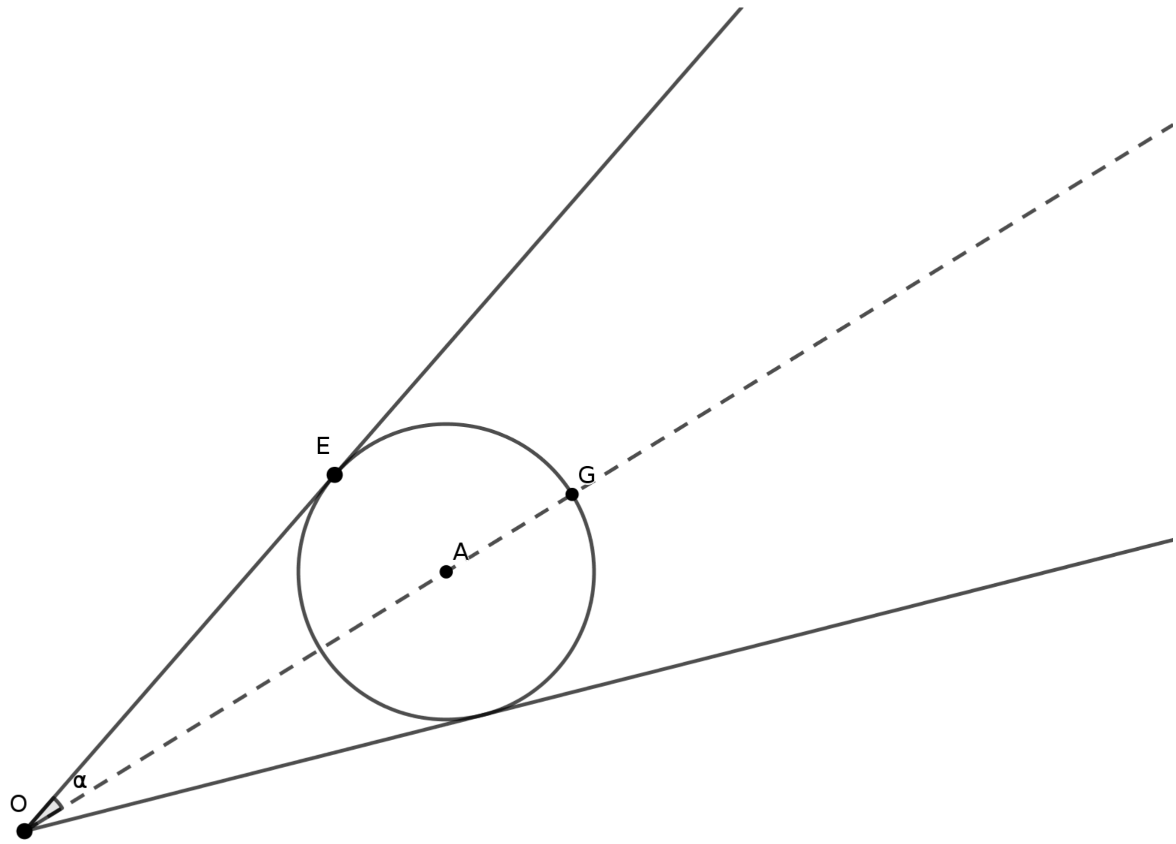
5 segments partant du centre de la figure y sont dessinés.

Ces derniers permettent d'établir un système d'équations faisant intervenir les différents rayons.



ANNEXE DE L'EXERCICE 2, A RENDRE AVEC LA COPIE

Construire avec règle, équerre et compas le cercle manquant.



Exercice national 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Fiabilité

Pour un système mécanique ou électronique, le risque de panne augmente avec le temps.

La fiabilité d'un système est l'étude probabiliste du temps entre deux pannes et on utilise deux indicateurs : la fiabilité notée ici $F(t)$ qui est la probabilité de panne après un instant t et la défaillance notée ici $D(t)$ qui est la probabilité de panne avant un instant t.

Ces deux indicateurs sont liés par les relations : $F(t) = 1 - D(t)$.

Au moment de la mise en route du système, on a $F(0) = 1$ et $D(0) = 0$.

1. *Premiers calculs*

a. Déterminer $F(t)$ si $D(t) = 0{,}6$.

b. Déterminer $D(t)$ si $F(t) = 0{,}7$.

2. *Fiabilité d'un composant électronique*

a. Le tableau suivant donne la fiabilité d'un composant en fonction du temps.

Temps t en centaines d'heures	0	1	2	3	4
Fiabilité $F(t)$	1	0,9	0,81	0,729	0,6561

b. Calculer $\frac{F(t+1)}{F(t)}$ pour tout t entier variant de 0 à 3. D'un terme au suivant dans la deuxième ligne du tableau, la variation relative (taux d'évolution) est-elle constante ?

c. En est-il de même pour la défaillance ?

d. On donne l'algorithme ci-contre (t est le temps en centaines d'heures, F la fiabilité correspondante).

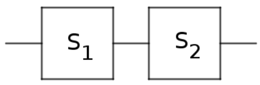
e. Quelle est la valeur de t à la fin de cet algorithme ? Comment interpréter ce résultat ?

```
t ← 0
F ← 1
Tant que F>0,1 :
        t ← t+1
        F ← F×0,9
Fin Tant Que
```

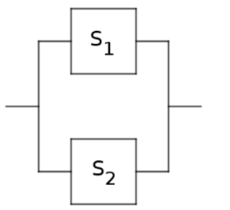
Dans les questions suivantes, on se place à un instant t fixe.

3. *Montage de plusieurs systèmes*

Si plusieurs systèmes sont montés en série, la fiabilité du montage est égale au produit des fiabilités des systèmes qui le composent. Dans le montage ci-contre, en notant F_1 la fiabilité du système S_1 et F_2 la fiabilité du système S_2, la fiabilité F du système vaut $F = F_1 \times F_2$.



Si plusieurs systèmes sont montés en parallèle, la défaillance du montage est égale au produit des défaillances des systèmes qui le composent. Dans le montage ci-contre, en notant D_1 la défaillance du système S_1 et D_2 la défaillance du système S_2, la défaillance D du système vaut $D = D_1 \times D_2$.



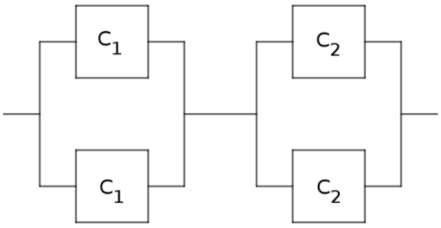
a. Calculer la fiabilité d'un système avec deux composants électroniques en série de fiabilités respectives 0,8 et 0,7.

b. Calculer la fiabilité d'un système avec deux composants électroniques en parallèle de fiabilité respective 0,8 et 0,7.

c. Quel est le pourcentage d'augmentation de fiabilité d'un système avec deux composants identiques de fiabilité 0,9 montés en parallèle par rapport à un seul composant de fiabilité 0,9 ?

4. *Étude d'un montage.*

Le montage ci-dessous est constitué de deux composants de type C_1 en parallèle montés en série avec deux composants de type C_2 montés également en parallèle.



On admet que la fiabilité des composants de type C_1 à la n-ième centaine d'heures après la mise en route est $F_1 = 0{,}9^n$ et que la fiabilité des composants de type C_2 à la n-ième centaine d'heures après la mise en route est $F_2 = 0{,}8^n$.

a. Exprimer les défaillances en fonction de n de chacun des systèmes en parallèle.

b. Soit F la fiabilité du montage. Déterminer F en fonction de n.

c. Au bout de combien d'heures, la fiabilité devient-elle inférieure à 0,5 ?

d. Afin d'augmenter la fiabilité du montage à long terme, on décide de remplacer les composants C_2 du montage par deux autres de même fiabilité p.

e. Quelle valeur minimale à deux décimales doit avoir p pour que la fiabilité du montage dépasse 0,5 pendant au moins mille heures de fonctionnement ?