ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades de mathématiques

Concours par équipes

Élèves de troisième et seconde

Mardi 26 mars 2024

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les trois exercices sont à traiter. Chaque équipe remet une copie rédigée collectivement. Les équipes peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels elles sont parvenues.

On n'écrit pas les réponses sur le sujet.

Exercice 1

Le bal des batraciens

Deux groupes de batraciens, des grenouilles notées G et des crapauds notés C, se font face sur une ligne de nénuphars. À gauche se trouvent les grenouilles qui souhaitent aller à droite et à droite se trouvent les crapauds qui souhaitent aller à gauche.
Les nénuphars ne peuvent supporter qu'un seul batracien à la fois.
Dans la position de départ, il n'y a qu'un nénuphar de libre entre les deux groupes.

Les grenouilles et les crapauds peuvent s'effectuer **deux types de sauts** pour passer d'un nénuphar à un autre :

- un saut pour atteindre le nénuphar devant eux s'il est libre ;
- un saut en passant au-dessus d'un batracien d'une autre catégorie afin d'atteindre le nénuphar suivant s'il est libre.

G	C	

Jamais ils ne reculent, jamais ils ne doublent un batracien de la même catégorie.

À la fin, les grenouilles se retrouvent à droite et les crapauds à gauche, en laissant un nénuphar vide entre eux.

La **longueur d'un saut** correspond au nombre de nénuphars parcourus : ainsi si un batracien saute sur le nénuphar devant lui, il effectue un saut de longueur 1, s'il saute par-dessus un autre batracien, il effectue un saut de longueur 2.
On appelle **distance parcourue** par un batracien la somme des longueurs des sauts permettant de passer d'une position à une autre.

Les deux figures suivantes illustrent avec 6 nénuphars, 3 grenouilles et 2 crapauds :

- la position de départ :

G_3	G_2	G_1		C_1	C_2

- la position finale :

C_1	C_2		G_3	G_2	G_1

Dans le cas simple où il y a une grenouille et un crapaud, les sauts successifs donnent :

Position de départ	G		C
Position après le premier saut		G	C
Position après le deuxième saut	C	G	
Position (finale) après le troisième saut	C		G

On note g le nombre de grenouilles et c le nombre de crapauds.

Partie A
L'objectif de cette partie est de déterminer le nombre minimum de sauts pour que les grenouilles passent de gauche à droite et les crapauds de droite à gauche.

1. Représenter sur la copie les positions successives pour passer de la position de départ à la position finale dans les deux cas suivants :
   a. il y a deux grenouilles et un crapaud ;
   b. il y a deux grenouilles et deux crapauds.
2. Calculs des distances parcourues.
   a. Exprimer, en fonction de c, la distance parcourue par une grenouille pour passer de la position de départ à la position finale.

b. En déduire, la somme des distances parcourues par toutes les grenouilles puis par tous les crapauds pour passer de la position de départ à la position finale.

3. Exprimer en fonction de c et de g le nombre de sauts de longueur 2 effectués par l'ensemble des batraciens pour passer de la position de départ à la position finale.
4. Démontrer que le nombre minimum de sauts pour passer de la position de départ à la position finale est $g \times c + g + c$.

Partie B

On suppose désormais qu'il y a le même nombre de grenouilles et de crapauds. Ces batraciens étant des animaux nocturnes, le ballet des sauts commence à minuit. Chaque saut prend exactement une seconde. Il ne peut y avoir deux sauts simultanément.
On observe qu'à 6 heures du matin, les batraciens ont atteint la position finale.

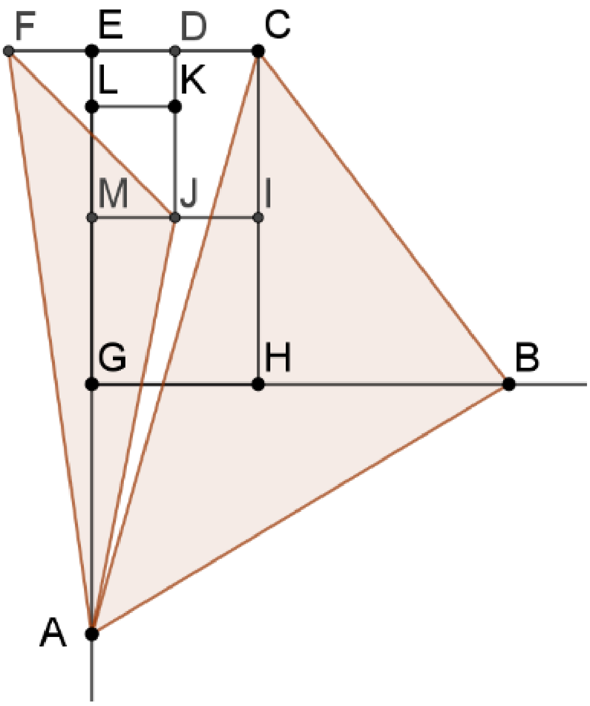
1. Montrer que $(g+1)^2 < 21\,601$.
2. En déduire le nombre maximum de batraciens.

Exercice 2

Un peu d'aires

Dans tout l'exercice, les longueurs sont exprimées en centimètre et les aires en centimètre carré.

On donne un rectangle ECHG dont la longueur CH vaut deux fois la largeur CE.
M et I sont les milieux respectifs de [EG] et [CH], J le milieu de [MI], D le milieu de [CE].
Les points L et K sont situés respectivement sur les segments [EM] et [DJ] et sont tels que la droite (LK) est parallèle à (CE) et la longueur ML vaut deux fois la longueur LE.
F est le symétrique de D par rapport à E.
Le point A est situé sur la demi-droite [EG) en dehors du segment [EG], le point B est situé sur la demi-droite [GH) en dehors du segment [GH] et on a :
GA = HB = CF.
On donne enfin l'aire du rectangle ELKD : 24 cm².



1. Calculer la longueur EC.
2. Quelle est l'aire du triangle FJA ?
3. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

Nombres à quatre chiffres

L'objectif de cet exercice est de déterminer quels sont les nombres entiers N ayant exactement quatre chiffres dans leur écriture décimale et vérifiant la propriété P : « la somme des chiffres de N est supérieure ou égale au produit des chiffres de N ».
Pour cela, on pose $N = \overline{abcd}$ où $a \neq 0$.
Exemples :
$N = 1035$ convient car $1 + 0 + 3 + 5 = 9$, $1 \times 0 \times 3 \times 5 = 0$ et $5 \geq 0$.
$N = 2156$ ne convient pas car $2 + 1 + 5 + 6 = 14$, $2 \times 1 \times 5 \times 6 = 60$ et $14 < 60$.

1. Montrer que si l'un des chiffres de N est nul alors N convient.

On considère maintenant que tous les chiffres de N sont non nuls.

2. Expliquer pourquoi l'ordre des chiffres a, b, c et d de N n'intervient pas dans la vérification de la propriété P et pourquoi $a + b + c + d \leq 36$.

On considère dans les questions **3.** et **4.** que $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

3. Montrer que si N vérifie P alors l'un au moins des chiffres de N est égal à 1.

4. Déterminer tous les entiers N vérifiant P et tels que $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

5. Déterminer tous les entiers N vérifiant P.