Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 1

Etude de la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs

On se propose d'étudier les différences de carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs définies de la manière suivante : $d(1)=1^2-0^2$; $d(2)=2^2-1^2$; $d(3)=3^2-2^2$; $d(4)=4^2-3^2$ …
Et plus généralement on notera $d(n)$ une telle différence où n désigne un entier naturel non nul.

1. À l'aide d'un tableur, réaliser le tableau ci-dessous dans lequel seront programmés les calculs des différences $d(1)$, $d(2)$, $d(3)$ … $d(9)$.

Entier naturels n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Différences $d(n)$										

2. Faire une conjecture sur la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture
> et une aide éventuelle.

3. On considère la fonction f définie pour tout nombre x par $f(x)=x^2-(x-1)^2$.

   a. À l'aide d'un tableur, représenter graphiquement cette fonction f pour x compris entre -10 et 10.
   Faire une conjecture sur la nature de la fonction f.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la représentation
> graphique et une aide éventuelle.

   b. Démontrer cette conjecture.

4. En observant les valeurs prises par la fonction f pour des valeurs entières positives de x, déduire le résultat conjecturé à la question 2.

5. Peut-on écrire 277 sous la forme d'une différence de carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs ? Si oui, quelle est cette différence ? Si non pourquoi ?
   Même question pour le nombre 354.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 2

Etude de la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs

On se propose d'étudier les différences de carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs définies de la manière suivante : $d(1) = 1^2 - 0^2$; $d(2) = 2^2 - 1^2$; $d(3) = 3^2 - 2^2$; $d(4) = 4^2 - 3^2$ …
Et plus généralement, on notera une telle différence $d(n)$ où n désigne un entier naturel non nul.

1. À l'aide d'un tableur, calculer les différences $d(1)$, $d(2)$, $d(3)$ … et déterminer les nombres entiers consécutifs dont la différence des carrés est égale à 143.

2. Faire une conjecture sur la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus et de la conjecture.

3. Démontrer la conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la preuve.

4. Une unité de longueur étant choisie, on considère les triangles rectangles dont les longueurs de deux côtés sont deux nombres entiers naturels consécutifs. Déterminer la longueur du 3ème côté.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 3

Des programmes de calculs

1. On donne le programme de calculs suivant

Programme 1
a) Choisir un nombre
b) Multiplier ce nombre par 3
c) Retrancher 5
d) Elever au carré
e) Retrancher 25

À l'aide d'un tableur, appliquer ce programme de calculs à quelques nombres entiers.

Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus et une aide éventuelle.

2. On donne également les programmes de calculs suivants :

Programme 2
a) Choisir un nombre
b) Multiplier ce nombre par 3
c) Retrancher 10
d) Multiplier par le triple du nombre choisi

Programme 3
a) Choisir un nombre
b) Elever au carré
c) Multiplier par 9
d) Retrancher trente fois le nombre choisi

À l'aide du tableur, appliquer ces programmes de calculs aux mêmes nombres que le programme 1. Émettre une conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. Démontrer cette conjecture.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 4

Le plus grand cylindre

Une unité de longueur étant choisie, on considère une sphère de centre O, de rayon 1 et les cylindres inscrits dans cette sphère dont l'axe passe par O.
On cherche à déterminer les dimensions du cylindre de volume maximum.

1. Justifier que, pour chaque cylindre de hauteur h et de rayon r, on a : $r^2 = 1 - \frac{h^2}{4}$ et exprimer le volume V d'un tel cylindre en fonction de h.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la formule
> et une aide éventuelle.

2. À l'aide d'un tableur, pour h variant de 0 à 2 de 0,2 en 0,2, calculer r^2 puis le volume V du cylindre correspondant.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des résultats obtenus.

3. Représenter graphiquement le volume V en fonction de h.
4. Faire une conjecture sur la hauteur h pour laquelle le volume V est maximum.

> Appeler l'examinateur pour une vérification du graphique et
> de la conjecture.

5. Donner un encadrement au centième de la valeur de h pour laquelle le volume du cylindre est maximum.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 5

Comparaison d'aires dans un triangle

On considère un triangle ABC et un point D situé à l'intérieur du triangle ABC. La droite (d) parallèle à la droite (BC) passant par D coupe les segments [AB] et [AC] respectivement en M et N.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour réaliser une figure.

   > Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. a. Afficher les aires des triangles BCM et BCN puis faire varier la position du point D.
   Émettre une conjecture.

   > Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture.

   b. Démontrer le résultat conjecturé.

3. a. Afficher les aires des triangles ACM et ABN puis faire varier la position du point D.
   Émettre une conjecture.

   > Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture.

   b. Démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 6

Une bande de même aire qu'un carré

Soit a un nombre strictement positif.
Une unité de longueur étant choisie, on considère un carré C de côté de longueur 3 bordé par une bande de largeur constante égale à a.
Construire le cercle circonscrit au carré C.

Le but de l'exercice est de déterminer a pour que l'aire du carré C soit égale à l'aire de la bande.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire la figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Afficher l'aire du carré C et l'aire de la bande. Pour quelle valeur de a l'aire du carré semble-t-elle égale à celle de la bande ? Quelle conjecture peut-on alors faire sur le cercle ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la valeur trouvée et de la conjecture.

3. Montrer que a est solution du problème si et seulement si a est strictement positif et a est solution de l'équation $(3+2a)^2 = 18$.

4. Déterminer la valeur exacte de la solution du problème.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 7

Comparaison d'aires dans un triangle

On considère une droite (*d*) et deux points A et B du plan.
On cherche, s'ils existent des points M de la droite (*d*) tels que le triangle AMB soit rectangle en M.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

3. Faire varier les points A et B et émettre une conjecture sur les différents cas possibles :

   - il existe plusieurs points M satisfaisant au problème,
   - il existe un unique point M satisfaisant au problème,
   - il n'existe pas de point M satisfaisant au problème.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

4. Démonter ces conjectures.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 8

Prendre la tangente ...

On considère un cercle (C) de diamètre [AB].
Le point D est un point de (C) distinct de A et de B et le point H est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD.
La droite (DA) recoupe le cercle de diamètre [AH] en M et la droite (DB) recoupe le cercle de diamètre [BH] en N.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour réaliser une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Quelle semble être la nature du quadrilatère DMHN ?

3. En faisant varier la position du point D, émettre une conjecture sur la position de la droite (MN).

> Appeler l'examinateur pour une vérification de cette conjecture.

4. Démontrer les conjectures des questions 2 et 3.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 9

Produit d'aires : quatre triangles réunis

Soit ABCD un quadrilatère convexe. On considère K le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. a. Afficher le produit des aires des triangles ABK et CDK et celui des aires des triangles BCK et DAK.
   b. Faire varier les sommets du quadrilatère ABCD puis émettre une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. En calculant les aires des triangles dans le quadrilatère, démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 10

Egalité d'aires

Une unité de longueur est choisie.
On considère un carré ABCD tel que AB = 10.
Pour tout point M du segment [AB], on considère le point J du segment [AD] puis le point I tels que le quadrilatère AMIJ soit un carré.
On appelle H le point d'intersection des droites (MI) et (DC).

Le but de l'exercice est de déterminer s'il est possible de choisir un point M du segment [AB] tel que les aires du triangle CID et du carré AMIJ soient égales.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie faire une figure.
   Afficher les distances AM et IH ainsi que les aires respectives du triangle CID et du carré AMIJ.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier le point M sur le segment [AB] et émettre une conjecture sur la position du point M pour que les aires du triangle CID et du carré AMIJ soient égales.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. On note x la longueur du segment [AM].

   a. Exprimer en fonction de x l'aire du carré AMIJ et l'aire du triangle CID.
   b. Traduire ce problème par une équation d'inconnue x.
   c. Montrer que cette équation est équivalente à l'équation $(x+10)(x-5)=0$.

4. Démontrer la conjecture faite à la question 2.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 11

Produit d'aires : quatre triangles réunis

Une unité de longueur est choisie.
On considère un rectangle ABCD tel que AB = 10 et AD = 4.
Soit P un point quelconque du segment [DC]. On note *x* la longueur du segment [DP].

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de *x* telles que le triangle APB soit rectangle en P.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire le rectangle ABCD et afficher la longueur DP. Pour quelle(s) position(s) du point P et pour quelle(s) valeur(s) de la longueur DP le triangle APB semble-t-il rectangle en P ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Déterminer par une construction géométrique la (ou les) position(s) de P conjecturée(s). Lire la(ou les) distance(s) DP qui répond(ent) à la question.

> Appeler l'examinateur pour vérification de la construction et de la conjecture sur les distances.

3. a. Démontrer que « APB est un triangle rectangle en P » se traduit par l'équation $2x^2 - 20x + 32 = 0$.
   b. Montrer que cette équation peut s'écrire $(2x-16)(x-2) = 0$.

4. Démontrer la conjecture faite à la question 2.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 12

Une échelle

Une unité de longueur étant choisie, on considère une échelle de longueur 5 glissant le long d'un mur : le haut de l'échelle glisse verticalement le long du mur, le bas de l'échelle glisse horizontalement sur le sol.

Le but de l'exercice est de trouver une courbe sur laquelle se déplace le milieu de l'échelle lors du glissement de celle-ci.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour réaliser une figure dans laquelle l'échelle sera représenter par un segment [AB].

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Placer le milieu I du segment [AB] et afficher la trace de ce point.

3. Émettre une conjecture quant à la courbe cherchée.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

4. Démontrer la conjecture.
   .

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 13

Tangente d'un angle aigu

Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu.
Un cercle (C) de centre O et de rayon r coupe les demi-droites [Ox) et [Oy) respectivement en A et B.
La tangente en A au cercle (C) coupe la demi-droite [Oy) en T.

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour réaliser une figure.
   Afficher les longueurs r et AT ainsi que la tangente de l'angle $\widehat{xOy}$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier la mesure de l'angle $\widehat{xOy}$ et conjecturer une relation entre r, AT et $\tan(\widehat{xOy})$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer cette conjecture.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 14

Tangente d'un angle aigu

Soit ABC un triangle. Une droite (*d*) coupe la droite (BC) en A', la droite (AC) en B' et la droite (AB) en C'.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
   Afficher le produit des rapports $\frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} \times \frac{AC'}{C'B}$.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et du produit des rapports.

2. Faire varier la position des points A, B, C et de la droite (*d*). Émettre une conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer la conjecture.

   Aide : on pourra considérer la droite (Δ) passant par B et parallèle à la droite (A'B') et le point D point d'intersection des droites (AC) et (Δ) puis montrer les égalités $\frac{B'D}{AB'} = \frac{BC'}{AC'}$ et $\frac{B'D}{CB'} = \frac{BA'}{CA'}$.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 15

Puissance d'un point par rapport à un cercle

On considère un cercle (C) de centre O, de rayon r et un point M à l'extérieur du cercle.
Une droite (d) passant par M coupe le cercle en A et B. Les points A et B peuvent être éventuellement confondus.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
   Afficher le produit $\mathrm{MA} \times \mathrm{MB}$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. a. Faire varier la position de la droite (d) et émettre une conjecture concernant la valeur du produit $\mathrm{MA} \times \mathrm{MB}$.
   b. Afficher la différence $\mathrm{MO}^2 - r^2$. Émettre une autre conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

3. En considérant le point I milieu du sgment [AB], exprimer le produit $\mathrm{MA} \times \mathrm{MB}$ en fonction de MO^2 et de r^2.
   Conclure.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 16

Duplication

Soit $\hat{a}$ un angle aigu dont la mesure en degré vérifie $0 < \hat{a} < 45$.
Le but de l'exercice est d'établir une relation entre $\sin(2\hat{a})$, $\cos(\hat{a})$ et $\sin(\hat{a})$.

On considère un triangle ABC rectangle en C avec $\widehat{\mathrm{BAC}} = \hat{a}$ et O le centre de son cercle circonscrit.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
   Afficher $\hat{a}$ et $\widehat{\mathrm{BOC}}$. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Afficher $\sin\hat{a}$ et $\sin(\widehat{\mathrm{BOC}})$. Peut-on penser que $\sin(\widehat{\mathrm{BOC}}) = 2\sin\hat{a}$?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la réponse à l question 2.

3. Afficher $2\sin\hat{a}\cos\hat{a}$. Faire varier la mesure de l'angle $\hat{a}$ et émettre une conjecture.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une vérification de la conjecture.

4. a. Démontrer la conjecture émise à la question 1.
   b. Soit H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC. En considérant les triangles rectangles HOC, BAC et HAC, démontrer la conjecture faite à la question 3.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 17

Un lieu géométrique

On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre [AB] et un point M de ce cercle.
Soit N le milieu du segment [AM].

On cherche une courbe à laquelle le point N appartient lorsque le point M décrit le cercle (C).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, réaliser une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire afficher la trace du point N lorsque M décrit le cercle (C). Quel semble être la courbe cherchée ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer le résultat conjecturé.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 18

Etude de périmètre

Soit ABC un triangle isocèle en A et M un point du segment [BC].
La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe le segment [AC] en R.
La droite passant par M et parallèle à (AC) coupe le segment [AB] en N.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
   Afficher la longueur AB et le périmètre du quadrilatère ARMN.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier le point M sur le segment [BC] et émettre un conjecture sur le périmètre du quadrilatère ARMN.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer la conjecture.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 19

Une bissectrice en rapports

Soit ABC un triangle.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté [BC] en I.

1. Faire une figure avec un logiciel de géométrie.
   Afficher les rapports $\dfrac{IB}{IC}$ et $\dfrac{AB}{AC}$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier la position des points A, B et C et émettre une conjecture.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. a. Soit (Δ) la droite passant par B et parallèle à la droite (AC) et D le point d'intersection des droites (AI) et (Δ). Montrer que le triangle ABD est isocèle.

   b. Démontrer la conjecture.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 20

Un carré parfait

Soit n un entier naturel et $N = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer la nature du nombre N.

1. À l'aide d'un tableur, organiser le calcul de N et de $\sqrt{N}$ pour n entier naturel inférieur ou égal à 20.
   Quelle conjecture peut-on émettre sur N ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture
> et une aide éventuelle.

2. Représenter graphiquement les 21 valeurs obtenues pour $\sqrt{N}$ en fonction de n.
   En utilisant les fonctionnalités du tableur, conjecturer une équation de la courbe à laquelle appartiennent les points de coordonnées $\left(n;\sqrt{N}\right)$.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture
> et une aide éventuelle.

3. On pose $a = n(n+3)$ et $b = (n+1)(n+2)$.
   a. Exprimer b puis N en fonction de a.
   b. En déduire la validité des conjectures émises aux questions 1 et 2.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 21

Des familles de trois enfants

Dans cet exercice, on suppose que :
- dans une famille, chaque naissance a autant de chances d'être celle d'un garçon ou celle d'une fille,
- le sexe d'un enfant d'une famille ne dépend pas du sexe des enfants précédents.

Antoine se dit qu'étant donné qu'une famille de trois enfants peut être composée soit de trois filles, soit de trois garçons, soit de deux garçons et une fille soit de deux filles et un garçon, il y a une chance sur deux pour que les trois enfants soient du même sexe.

1. On simule 1 000 compositions de familles de trois enfants avec un tableur.
   a. Dans une feuille de calcul, construire le tableau suivant.
   b. Dans les cellules B2, C2, D2, E2 et F2, entrer les formules pour simuler les naissances de trois enfants d'une famille.
   c. Recopier vers le bas ces formules pour obtenir les mille compositions.

	A	B	C	D	E	F
1	Famille n°	*1er enfant*	*2ème enfant*	3ème enfant	Nombre de filles	Nombre de garçons
2	1					
3	2					
…	…					
1 001	1 000					

Appeler l'examinateur pour une vérification de la simulation et une aide éventuelle.

2. Calculer la fréquence des familles ayant trois enfants du même sexe lors de cette simulation.
   Que pensez-vous de la conjecture d'Antoine ?

3. Dessiner un arbre représentant les différentes compositions possibles d'une famille de trois enfants.
   Déterminer la probabilité d'avoir trois enfants du même sexe et conclure.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 22

A égale distance

Une unité de longueur étant choisie. On considère un carré ABCD de côté 4 et un carré CEFG de côté 3. Les points D, C, E sont alignés et M est un point du segment [DC].

Le but est de déterminer la position du point M telle que AM = MF.
On pose DM = x.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie, faire une figure.
   Afficher les longueurs AM, MF et DM.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et une aide éventuelle.

2. Faire varier la position du point M sur le segment [DC] et émettre une conjecture sur la longueur x qui correspond à la position cherchée .

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture et une aide éventuelle.

3. Démontrer le résultat conjecturé à la question 2.

Épreuve pratique de mathématiques en troisième

Sujet numéro 23

Autour des médianes

On considère un triangle ABC.
La médiane issue du sommet B coupe le segment [AC] en M, et celle issue du point C coupe le segment [AB] en N.
On appelle I le point d'intersection des deux médianes.
Le point P est le milieu du segment [BI] et le point Q est le milieu du segment [IC].

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie, faire une figure.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure
> et une aide éventuelle.

2. Quelle conjecture peut-on faire sur le quadrilatère MNPQ ?

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture
> et une aide éventuelle.

3. Démontrer le résultat conjecturé.