	BTS Conception et réalisation de systèmes automatisés **Contrôle en Cours de Formation**	
	Nom : **Prénom :** **Établissement : Lycée Gustave Monod** **Ville : Enghien les Bains (95)**	
Épreuve E3 : Mathématiques	**Situation d'évaluation n°2**	**Date :** **Durée : 55 min**

La présente évaluation repose sur deux exercices indépendants.

L'usage d'une calculatrice et/ou de logiciels installés sur l'ordinateur (géométrie, calcul formel) fait partie intégrante des attendus de l'épreuve.

La clarté du raisonnement ainsi que la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Thèmes abordés :

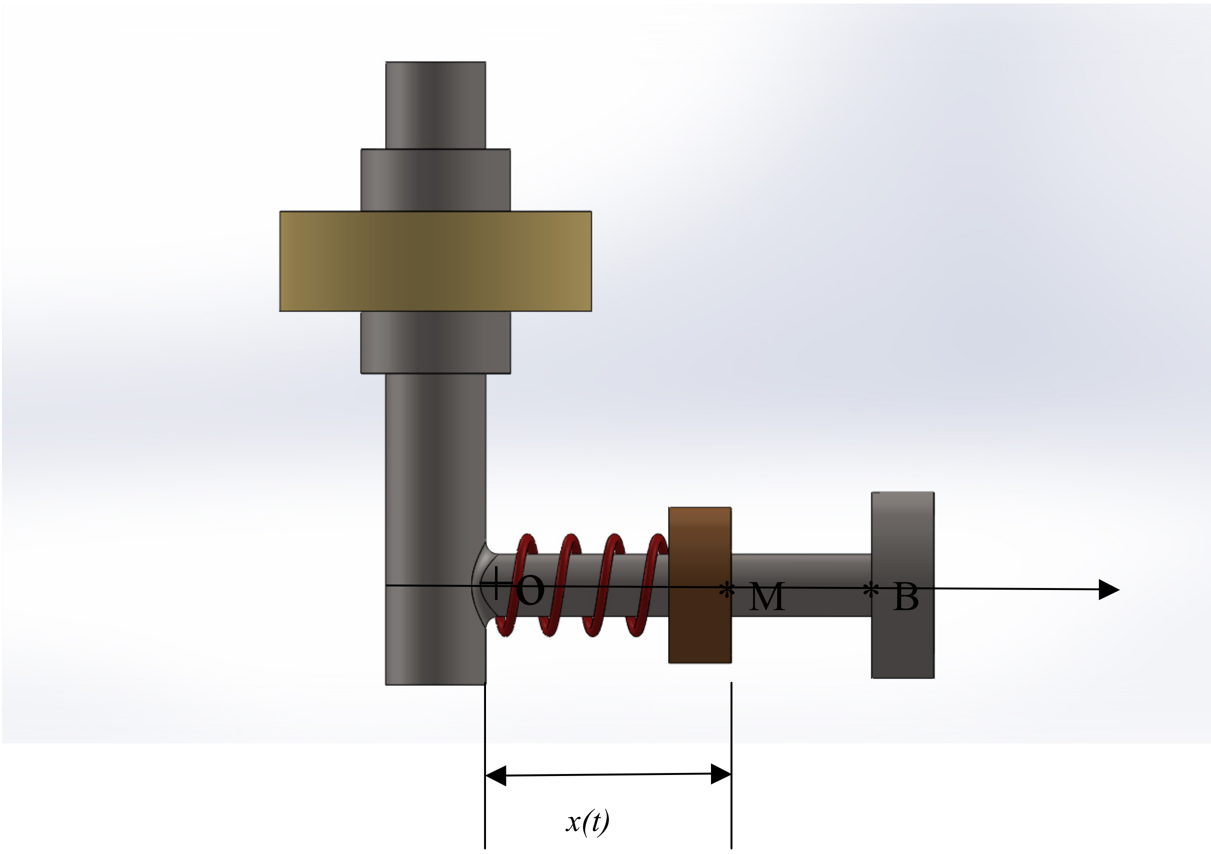
- Équations différentielles du second ordre
- Statistique, probabilités et estimation

Modalités de déroulement de l'épreuve

- Bien veiller à ne pas oublier d'appeler le professeur aux endroits indiqués dans le sujet afin d'expliciter la démarche suivie ou de faire valider la réponse obtenue.

Exercice 1

Etude du fonctionnement d'un système de sécurité



Dans une machine un arbre doit tourner à une vitesse angulaire constante **ω** qui ne peut dépasser un certain seuil. Aussi un système de sécurité a été conçu afin de détecter une vitesse excessive : une tige sur laquelle peut glisser sans frottement un anneau qu'on pourra assimiler à un point matériel **M** de masse **m**, a été solidarisée perpendiculairement à l'arbre. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur **k** est enfilé sur la tige, il est relié d'un côté à l'axe au point **O** et de l'autre à **M** de sorte que si l'arbre est animé d'une vitesse excessive suite à un dérèglement, le point **M** viendra coïncider avec le point **B** et ce contact actionnera un capteur qui déclenchera l'arrêt de la machine.
Nous allons donc étudier le mouvement de **M** sur l'axe (**OB**) que l'on munit d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,)$ où $\overrightarrow{OB} = l\,\vec{\imath}$, l étant la longueur OB (unité : le mètre).

L'unité de temps étant la seconde, la position du point **M** à l'instant t est alors repérée par son abscisse $\boldsymbol{x(t)}$ dans le repère précédent qui, d'après le principe fondamental de la dynamique vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x'' + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = \frac{k}{m}\,l_0 \qquad \text{où } l_0 \text{ est la longueur à vide du ressort}$$

où x et l_0 sont en mètres, m en kilogrammes, ω en radians par seconde et k en Newton par mètre.
A l'origine des temps, M est à une distance l_0 de l'origine O, la vitesse de M est nulle et les données numériques sont :

$$\boldsymbol{m = 0,05\ \mathrm{kg} \qquad k = 125\ \mathrm{N.m^{-1}} \qquad l_0 = 0,09\ \mathrm{m} \qquad l = 0,15\ \mathrm{m}}$$

Question 1

Compte-tenu des données numériques ci-dessus, vérifier que l'équation (E) régissant le mouvement de M peut se mettre sous la forme :

$(E) \qquad x'' + (2500 - \omega^2)x = 225$ où ω est exprimé en radians par seconde.

Puis, préciser les valeurs des conditions initiales : $x(0)$ et $x'(0)$.

Question 2

On se place dans cette question dans le cas où : $\boldsymbol{\omega = 14\ \mathrm{rd.s^{-1}}}$.

a. Ecrire l'équation (E) dans ce cas particulier.

b. Déterminer une fonction constante solution particulière de (E).

c. Déterminer la forme générale des solutions de (E) puis la solution de (E) vérifiant les conditions initiales.

d. Expliquer en quoi l'expression précédente de $x(t)$ qui donne la position de M à tout instant t permet d'affirmer

- d'une part que pour tout $t > 0, x(t) \geq 0{,}09$ soit $x(t) \geq l_0$;
- d'autre part que pour tout $t > 0, x(t) < 0{,}15$ soit $x(t) < l$ interpréter ce résultat.

Appeler le professeur

Question 3

On se place dans le cas général où $\mathbf{0} < \boldsymbol{\omega} < \mathbf{50}$ et on admet que la position du point M est donnée à tout instant t par :

$$x(t) = -\frac{0{,}09\,\omega^2}{2500 - \omega^2}\cos\left(\sqrt{2500 - \omega^2}\,t\right) + \frac{225}{2500 - \omega^2}$$

a. A l'aide d'un logiciel, déterminer à partir de quelle valeur $\boldsymbol{\omega_0}$ de $\boldsymbol{\omega}$**,** le système de sécurité provoque l'arrêt de l'arbre.

Appeler le professeur

b. Pour la valeur $\boldsymbol{\omega_0}$ ainsi trouvée, déterminer à quel instant le point M vient heurter la butée.

Exercice 2

1. Une entreprise fabrique en grande série des rondelles dont l'épaisseur, exprimée en mm, définit une variable aléatoire X qui est supposée suivre une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.
On a mesuré sur un échantillon de 100 rondelles, leur épaisseur et obtenu les résultats suivants :

Epaisseur (en mm)	[2 ; 2,1[	[2,1 ; 2,2[	[2,2 ; 2,3[	[2,3 ; 2,4[	[2,4 ; 2,5[
Effectif	4	25	41	24	6

a. Calculer à 10^{-3} près, la moyenne x_e et l'écart type σ_e de cet échantillon en utilisant une calculatrice ou un tableur.
En déduire l'estimation ponctuelle de σ fournie par cet échantillon.

b. On rappelle que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à chaque échantillon de 100 rondelles, associe la moyenne des épaisseurs des cales de l'échantillon suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{\sigma}{10}$.
Déterminer un intervalle de confiance de m au seuil de confiance de 95%.

Appeler le professeur

2. On suppose que dans la production, 3% des rondelles présentent des défauts de surface qui les rendent inutilisables. Ces rondelles sont livrées en boîte de trente.
On tire au hasard une de ces boîtes (on assimilera cette épreuve à un tirage successif avec remise de 30 pièces dans la production).

a. Proposer une démarche permettant de calculer la probabilité que la boîte contienne x rondelles défectueuses.

b. Utiliser cette démarche pour calculer un arrondi à 10^{-2} près de :
- la probabilité que la boîte contienne exactement deux rondelles défectueuses ;
- puis la probabilité que la boîte contienne que la boîte contienne au moins vingt-huit sans défaut.