académie Versailles RÉGION ACADÉMIQUE ÎLE-DE-FRANCE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	**Épreuve E3**	**Mathématiques**
	NOM : **Prénom :**	CCF - Situation d'évaluation n°2 Session 2016
		BTS Systèmes numériques. Option B Lycée Jules Ferry 29 avenue du Maréchal Joffre 78 000 Versailles
Professeur responsable	Sophie Gillon	Durée : 55 minutes

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- L'utilisation des logiciels est recommandée. Vous préciserez alors sur votre copie le logiciel utilisé et la démarche choisie.
- L'exercice 1 question 2 comporte un appel obligatoire au professeur afin de valider oralement votre démarche.
- L'exercice 1 question 6 comporte un appel facultatif permettant de justifier oralement la démarche numérique utilisée.
- Pour les autres questions suivies de la mention "Appel", l'élève pourra, de façon facultative (maximum 2 appels), appeler le professeur pour expliquer oralement une démarche, valider un raisonnement, ou demander une aide.
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
- Le sujet comporte 4 pages d'énoncé.

<u>Thèmes :</u>

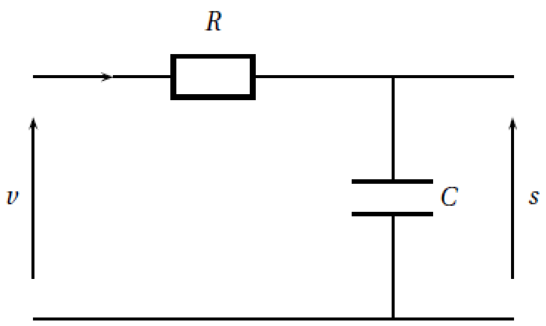
Équations différentielles et transformée en Z

(Les deux parties peuvent être traitées de façon totalement indépendante)

Calcul matriciel et probabilités

Exercice 1 :

On considère un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur représenté par le schéma ci-dessous :



s représente la tension entre les bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par une source de tension v et parcouru par un courant i.

Les fonctions s et v sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ RCs'(t)+s(t)=v(t)$$

Où R est la résistance exprimée en Ohms, C la capacité du condensateur exprimée en Farads, s la tension en Volts, v tension en Volts.

La condition initiale n'est pour l'instant pas précisée.

Dans tout cet exercice, on prendra $R=250\times10^{3}\,\Omega$ et $C=20\times10^{-9}\,F$.

Partie A : équations différentielles

Q1 En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, proposez une représentation des courbes des fonctions solutions possibles de l'équation différentielle (E), dans le cas où $v(t)=2$ et la condition initiale de la forme $s(0)=a$, pour tout nombre t positif ou nul, a réel quelconque.

APPEL

Q2 Quelle conjecture sur l'écriture de la solution générale s de l'équation différentielle $0{,}005s'(t)+s(t)=2$, C_1 étant une constante réelle quelconque, pouvez-vous proposer parmi les écritures suivantes :

$s(t)=C_1e^{-200t}+2t$	$s(t)=C_1e^{-200t}+2$	$s(t)=C_1e^{200t}+2$	$s(t)=C_1e^{-200t}$

Vous recopierez votre réponse sur votre copie et celle-ci sera argumentée par utilisation de Q1, ou de tout logiciel.

Appelez le professeur afin de valider cette question et la précédente

Q3 **Démontrez** alors la conjecture choisie dans la question précédente par résolution algébrique de l'équation différentielle $0{,}005s'(t)+s(t)=2$.

Q4 On suppose de plus que $s(0)=0$. Quelle doit alors être la valeur de la constante C_1 dans la réponse choisie. (votre réponse sera précisément justifiée)
Comment pouvez-vous contrôler votre réponse ?

APPEL

Partie B : Simulation numérique

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal causal discret x et la tension de sortie s par un signal causal discret y.

Un pas de discrétisation T_e en secondes étant choisi, les signaux x et y vérifient alors pour tout nombre entier n l'équation :

$$(E) : 0{,}005\,\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}+y(n)=x(n)$$

Dans toute cette partie, on choisit $T_e = 0{,}5\times10^{-3}$ (en secondes); on admet qu'alors l'équation (E) s'écrit

$$(E_2) : \quad 11y(n)-10y(n-1)=x(n).$$

Q5 On suppose que le signal d'entrée est donné par $x(n)=2e(n)$ où e est l'échelon unité causal discret défini donc par $e(n)=1$ si $n\geq 0$, 0 sinon.

On note Y la transformée en Z du signal causal discret y.

En appliquant la transformée en Z aux deux membres de l'équation (E_2), montrez que

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2}{11}\times\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{10}{11}\right)}.$$

Signal	Transformée en Z
Échelon unité discret e : Pour tout $n\in N, e(n)=1$	$Ze : z\mapsto Ze(z)=\frac{z}{z-1}$
Impulsion unité d : $d(0)=1$ et pour tout $n\in N^*, d(n)=0$	$Zd : z\mapsto Zd(z)=1$
Rampe discrète r : Pour tout $n\in N, r(n)=n$	$Zr : z\mapsto Zr(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$
Signal carré discret c : Pour tout $n\in N, c(n)=n^2$	$Zc : z\mapsto Zc(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
Signal exponentiel discret : Pour tout $n\in N, x(n)=a^n$, a réel non nul	$Zx : z\mapsto Zx(z)=\frac{z}{z-a}$
Multiplication par a^n : $y(n)=x(n)a^n$, a réel non nul	$Zy(z)=Zx\left(\frac{z}{a}\right)$
Signal retardé : $y(n)=x(n-n_0), n_0\in N$	$Zy(z)=\frac{1}{z^{n_0}}Zx(z)$
Signal avancé : $y(n)=x(n+1)$	$Zy(z)=z(Zx(z)-x(0))$

Q6 Proposez et mettez en œuvre une démarche permettant de modifier l'écriture de $\frac{Y(z)}{z}$ afin de déterminer l'original de $Y(z)$.

En déduire l'original $y(n)$ de $Y(z)$ en fonction de l'entier n.

Appel permettant d'expliquer votre démarche

Exercice 2 :

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n°1, alors il ira soit sur la page n°2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°2, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n°2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$ soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°3, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n°2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$ soit il restera sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les événements et les probabilités suivants :

- A_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°1", et on note $a_n = p(A_n)$.
- B_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°2", et on note $b_n = p(B_n)$.
- C_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°3", et on note $c_n = p(C_n)$.

On notera P_n l'état à la n-ième navigation, vous pourrez choisir indifféremment $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ ou $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Q7 Construire le graphe probabiliste associé à ce processus aléatoire.
Donnez alors la matrice de transition T associée à la matrice état P_n choisie.

Q8 Quelle est la relation de récurrence liant les états P_n et P_{n+1} (vous donnerez la relation correspondant à votre choix de matrice)?
Donnez alors P_n en fonction de n, P_0 et T, où P_0 est l'état initial (non donné pour l'instant)

Q9 Proposez une estimation des fréquences de fréquentation du site et de ses pages à long terme (expliquez votre démarche) lorsque :

a. On commence obligatoirement par la page n°1 : état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
b. On commence obligatoirement par la page n°2
c. On commence obligatoirement par la page n°3

APPEL

<u>DOCUMENT Réponse</u> : NOM : **Prénom :**

Q1		
Q2		
Q3		
Q4		

Q5		
Q6		

Exercice 2 :

Q7		
Q8		

Q9		

Grille d'évaluation des situations de CCF

<table>
<tr><td colspan="4">GRILLE NATIONALE D'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES
BTS SN option B – Sous-épreuve E3</td></tr>
<tr><td colspan="3">NOM :</td><td>Prénom :</td></tr>
<tr><td colspan="3">Situation d'évaluation n°2</td><td>Date de l'évaluation :4/05/2016</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. Liste des contenus et capacités du programme évalués</td></tr>
<tr><td>Contenus</td><td colspan="3">Équations différentielles, transformées en Z, calcul matriciel et processus aléatoires.</td></tr>
<tr><td>Capacités</td><td colspan="3">Extraire l'information, proposer des méthodes de résolution, proposer des conjectures numériques, traduire une situation en langage mathématique, démontrer un résultat, vérifier la validité d'un résultat, calculer à la main et à l'aide d'outils numériques, rendre compte d'une démarche à l'oral, présenter une démarche à l'écrit, visualiser sur un écran.</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Évaluation[1]</td></tr>
<tr><td>Compétences</td><td>Capacités</td><td>Questions de l'énoncé</td><td>Appréciation du niveau d'acquisition[2]</td></tr>
<tr><td>S'informer</td><td>Rechercher, extraire et organiser l'information.</td><td>Q1, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9</td><td></td></tr>
<tr><td>Chercher</td><td>Proposer une méthode de résolution.
Expérimenter, tester, conjecturer.</td><td>Q1, Q2,Q3, Q4, Q5, Q6, Q8, Q9</td><td></td></tr>
<tr><td>Modéliser</td><td>Représenter une situation ou des objets du monde réel.
Traduire un problème en langage mathématique.</td><td>Q1, Q7, Q8, Q9</td><td></td></tr>
<tr><td>Raisonner, argumenter</td><td>Déduire, induire, justifier ou démontrer un résultat. Critiquer une démarche, un résultat.</td><td>Q3, Q4, Q5, Q6, Q8, Q9</td><td></td></tr>
<tr><td>Calculer, illustrer, mettre en œuvre une stratégie</td><td>Calculer, illustrer à la main ou à l'aide d'outils numériques, programmer.</td><td>Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q9</td><td></td></tr>
<tr><td>Communiquer</td><td>Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit.
Présenter un tableau, une figure, une représentation graphique.</td><td>Q2, Q3, Q4, Q6, Q7, Q9</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>TOTAL</td><td>/ 10</td></tr>
</table>

[1] Des appels (2 au maximum) permettent de s'assurer de la compréhension du problème et d'évaluer la communication orale et les capacités liées à l'usage des outils numériques.

Sur les 10 points, 3 points sont consacrés à l'évaluation de l'utilisation des outils numériques dans le cadre de différentes compétences.

[2] Le professeur peut utiliser toute forme d'annotation lui permettant d'évaluer par compétences.