LYCÉE JEAN PERRIN
Technologies et Sciences de l'Ingénieur
SAINT OUEN L'AUMÔNE

CCF MATHEMATIQUES

Brevet technicien supérieur

Spécialité : Systèmes Numériques
Option B
Épreuve E3
Coefficient : 3

Situation d'évaluation n°1
Durée : 55 minutes

— Le sujet comporte 3 pages.
— L'épreuve comporte deux exercices.
— L'usage de la calculatrice et de logiciels de géométrie, de calcul formel sont autorisés.
— La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Thèmes abordés

— Nombres complexes
— Fonctions
— Suites numériques

Exercice 1

Dans cet exercice, j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

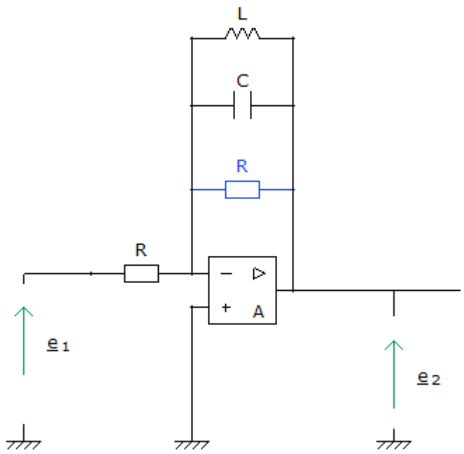
A l'entrée du filtre ci-contre, on applique une tension sinusoïdale e_1 de pulsation ω.

A la sortie on recueille une tension sinusoïdale e_2 de même pulsation ω.

On note $T(\omega)$ la fonction de transfert associée. On montre que :

$$T(\omega) = -\frac{j\frac{L\omega}{R}}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}}$$

où R est exprimée en Ω, L en H, C en F et ω en $rad.s^{-1}$.



Données numériques : $R = 10^3\Omega$,$L = 0,004H$ et $C = 10^{-7}F$.

1. On définit la pulsation de résonance ω_0 et le facteur de qualité Q du filtre :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Montrer que :

$$T(\omega) = \frac{-1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

2. On se propose d'étudier l'ensemble (E) du plan complexe décrit par le point M d'affixe $T(\omega)$ lorsque ω parcourt $]0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(\omega) = Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})$$

(a) Montrer que pour tout $\omega \in]0; +\infty[$,

$$T(\omega) = \frac{-1}{1+jh(\omega)}$$

(b) Étudier les variations de h.

(c) Préciser les limites de h et en déduire l'ensemble des valeurs prises par $h(\omega)$ lorsque ω varie dans $]0; +\infty[$.

(d) Quel est alors l'ensemble (D) décrit par le point P d'affixe $z = 1 + jh(\omega)$ lorsque ω varie dans $]0; +\infty[$?

(e) On note Z la transformation qui associe au point P le point M d'affixe $T(\omega)$. Décomposer Z à l'aide de deux transformations géométriques que vous préciserez.

(f) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer (D) et (E) dans le plan complexe et en déduire l'ensemble (E) décrit par le point M.

3. Déterminer alors pour quelle valeur de ω le module de $T(\omega)$ sera maximal. (On expliquera la méthode utilisée.) Quelle valeur retrouve-t-on ?

Appeler le professeur pour présenter votre raisonnement

Exercice 2

Une entreprise du secteur bâtiments et travaux publics doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 20 000 tonnes de déchets par an.

En 2010, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5% par rapport à la quantité de déchets rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets rejetés pour l' année $(2010 + n)$.

On définit aussi la suite (s_n) par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ s_n = r_n - 4000.$$

1. Calculer r_o et r_1 puis s_0 ets_1.

2. A l'aide d'un tableur calculer les dix premiers termes de ces suites et conjecturer la nature de la suite (s_n).

Appeler le professeur pour présenter votre raisonnement.

3. Démontrer alors la conjecture émise.

   On admet que pour tout n entier naturel :

$$r_n = 36000 \times 0,95^n + 4000$$

4. La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.
5. L'entreprise respectera-t-elle son engagement ? Justifier.
6. Un ingénieur de l'entreprise a proposé l'algorithme ci-dessous afin de vérifier si l'engagement était réalisable. Cet algorithme est codé en langage algobox.

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 1
  R PREND_LA_VALEUR 40000
  TANT_QUE (R>20000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    R PREND_LA_VALEUR R*0.95+200
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHERCALCUL N+2010
FIN_ALGORITHME
```

   Cet algorithme est disponible sur le bureau de l'ordinateur sous le nom ENTREPRISE. Validez-vous cet algorithme ?

Appeler le professeur pour présenter votre raisonnement et vos éventuelles modifications.