académie Versailles RÉGION ACADÉMIQUE ÎLE-DE-FRANCE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	**Épreuve E3**	**Mathématiques**
	NOM : **Prénom :**	CCF - Situation d'évaluation n°2 Session 2016
		BTS Systèmes numériques. Option B Lycée Jules Ferry 29 avenue du Maréchal Joffre 78 000 Versailles
Professeur responsable		Durée : 55 minutes

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- L'utilisation des logiciels est recommandée. Vous préciserez alors sur votre copie le logiciel utilisé et la démarche choisie.
- L'exercice 2 question 7 comporte un appel obligatoire au professeur afin de valider oralement votre démarche.
- L'exercice 2 question 11 comporte un appel facultatif permettant de justifier éventuellement oralement la démarche utilisée.
- Pour les autres questions suivies de la mention "Appel", l'élève pourra, de façon facultative (maximum 1 appel), appeler le professeur pour expliquer oralement une démarche, valider un raisonnement, ou demander une aide.
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
- Le sujet comporte 4 pages d'énoncé. (un formulaire est proposé page 4)

<u>Thèmes :</u>

Calcul matriciel et transformée de Fourier discrète

Équation différentielle

Transformée en Z

Exercice 1 : **Thème : transformée de Fourier discrète**

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit le nombre complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Dans tout cet exercice on prendra $n = 3$.

Q1 Placez les images des nombres complexes $1, \omega, \omega^2$ sur le cercle trigonométrique fourni avec le document réponse, muni d'un repère orthonormé (O, I, J) dans le plan complexe.
Exprimez en fonction de $1, \omega, \omega^2$ les nombres complexes $\omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}, \omega^{-4}$ et placez leurs images sur le graphique précédent.

Soit $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ une séquence de nombres complexes (obtenue par discrétisation d'un signal).
On rappelle que la transformée de Fourier discrète (TFD) de cette séquence est la séquence $(X_0, X_1, X_2, ..., X_{n-1})$ définie par $X_p = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \omega^{-kp}$ pour p variant de 0 à n-1.

Q2 Exprimez X_0, X_1, X_2 en fonction de x_0, x_1, x_2 et de ω^{-1}, ω^{-2} (votre démarche sera clairement expliquée).

Q3 Proposez alors une écriture matricielle donnant la séquence (X_0, X_1, X_2) en fonction de la séquence (x_0, x_1, x_2).
Déterminez la TFD de la séquence $(-1;1;0)$, vous donnerez votre réponse sous forme algébrique exacte et réduite.

APPEL

Q4 On sait que $TFD(x_0, x_1, x_2) = \left(2; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Déterminez la séquence initiale (x_0, x_1, x_2). (vous justifierez votre réponse précisément)

APPEL

Exercice 2 : **Filtre numérique passe-bas du premier ordre**

On dispose d'un filtre analogique passe-bas du premier ordre dont l'équation différentielle est $(E): 7s'(t) + s(t) = f(t)$ où s est la fonction causale définie et dérivable sur R associée au signal analogique de sortie, f est la fonction causale associée au signal analogique d'entrée, le coefficient 7 correspond à la valeur $7ms$ de la constante de temps τ du filtre analogique, l'unité de temps étant la milliseconde.

Partie A : résolution d'une équation différentielle

Q5 En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, proposez une représentation des courbes des fonctions solutions possibles de l'équation différentielle (E), dans le cas où $f(t) = 1$ pour tout nombre t positif, et la condition initiale de la forme $s(0) = k$ avec k nombre réel quelconque.

APPEL

Q6 Quelle conjecture sur l'écriture de la solution générale s de l'équation différentielle (E_2) : $7s'(t)+s(t)=1$, C_1 étant une constante réelle quelconque, pouvez-vous proposer parmi les écritures suivantes :

$s(t)=C_1e^{-\frac{1}{7}t}+t$	$s(t)=C_1e^{-\frac{1}{7}t}+1$	$s(t)=C_1e^{-7t}+1$	$s(t)=C_1e^{\frac{1}{7}t}+t$

Vous recopierez votre réponse sur votre copie et celle-ci sera argumentée par utilisation de Q1, ou de tout logiciel.

Appelez le professeur afin de valider cette question et la précédente

Q7 **Démontrez** alors la conjecture choisie dans la question précédente par une résolution algébrique de l'équation différentielle (E_2) : $7s'(t)+s(t)=1$.

Q8 On suppose de plus que $s(0)=0$. Quelle doit alors être la valeur de la constante C_1 dans la réponse choisie. (votre réponse sera précisément justifiée).
Comment pouvez-vous contrôler votre réponse ?

Partie B

On peut alors réaliser un filtre numérique passe-bas du premier ordre tel que :

- Le signal d'entrée est le signal causal échantillonné du signal d'entrée analogique avec la période $T_e=1$, ce signal est donc associé à la suite x définie pour tout entier naturel n par $x(n)=f(n)$.
- Le signal de sortie est le signal numérique causal associé à la suite y définie par l'équation aux différences obtenue en remplaçant dans l'équation différentielle précédente : $s'(t)$ par $y(n)-y(n-1)$, $s(t)$ par $y(n)$, et $f(t)$ par $x(n)$.
- On suppose que le signal d'entrée est l'échelon unité discret $e(n)=1$ pour tout entier naturel n .

On admet que l'équation aux différences obtenue est alors (E_3): $y(n)=\frac{7}{8}y(n-1)+\frac{1}{8}e(n)$.

Q9 En appliquant la transformée en Z aux deux membres de l'équation (E_3) : $y(n)=\frac{7}{8}y(n-1)+\frac{1}{8}e(n)$,

montrez que la transformée en Z du signal y notée $Y(z)$ peut s'écrire $Y(z)=\frac{1}{8}\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{7}{8}\right)}$.

APPEL

Q10 En utilisant un logiciel de calcul formel, proposez une démarche permettant de modifier l'écriture de $\frac{Y(z)}{z}$ afin de déterminer le signal original $y(n)$ de $Y(z)$.
En déduire l'original $y(n)$ de $Y(z)$ en fonction de l'entier n .

Appel facultatif permettant d'expliquer votre démarche

Signal	Transformée en Z
Échelon unité discret e : Pour tout $n \in N, e(n)=1$	$Ze : z \mapsto Ze(z)=\frac{z}{z-1}$
Impulsion unité d : $d(0)=1$ et pour tout $n \in N^*, d(n)=0$	$Zd : z \mapsto Zd(z)=1$
Rampe discrète r : Pour tout $n \in N, r(n)=n$	$Zr : z \mapsto Zr(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$
Signal carré discret c : Pour tout $n \in N, c(n)=n^2$	$Zc : z \mapsto Zc(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
Signal exponentiel discret : Pour tout $n \in N, x(n)=a^n$, a réel non nul	$Zx : z \mapsto Zx(z)=\frac{z}{z-a}$
Multiplication par a^n : $y(n)=x(n)a^n$, a réel non nul	$Zy(z)=Zx\left(\frac{z}{a}\right)$
Signal retardé : $y(n)=x(n-n_0), n_0 \in N$	$Zy(z)=\frac{1}{z^{n_0}}Zx(z)$
Signal avancé : $y(n)=x(n+1)$	$Zy(z)=z(Zx(z)-x(0))$

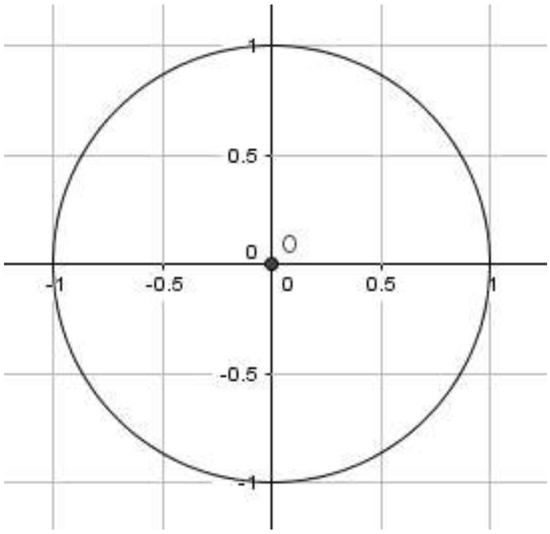
Grille d'évaluation des situations de CCF

GRILLE NATIONALE D'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES BTS SN option B – Sous-épreuve E3			
NOM :		Prénom :	
Situation d'évaluation n°2		Date de l'évaluation :4/05/2016	
1. Liste des contenus et capacités du programme évalués			
Contenus	Équations différentielles, transformées en Z, calcul matriciel et transformée de Fourier discrète.		
Capacités	Extraire l'information, proposer des méthodes de résolution, proposer des conjectures numériques, traduire une situation en langage mathématique, démontrer un résultat, vérifier la validité d'un résultat, calculer à la main et à l'aide d'outils numériques, rendre compte d'une démarche à l'oral, présenter une démarche à l'écrit, visualiser sur un écran.		
2. Évaluation[1]			
Compétences	Capacités	Questions de l'énoncé	Appréciation du niveau d'acquisition[2]
S'informer	Rechercher, extraire et organiser l'information.	Q2, Q5, Q8, Q9,Q10	
Chercher	Proposer une méthode de résolution. Expérimenter, tester, conjecturer.	Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10	
Modéliser	Représenter une situation ou des objets du monde réel. Traduire un problème en langage mathématique.	Q3, Q4, Q5	
Raisonner, argumenter	Déduire, induire, justifier ou démontrer un résultat. Critiquer une démarche, un résultat.	Q2, Q3, Q4, Q7, Q8, Q9, Q10	
Calculer, illustrer, mettre en œuvre une stratégie	Calculer, illustrer à la main ou à l'aide d'outils numériques, programmer.	Q1, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10	
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit. Présenter un tableau, une figure, une représentation graphique.	Q1, Q4, Q6, Q7, Q8, Q10	
		TOTAL	**/ 10**

[1] Des appels (2 au maximum) permettent de s'assurer de la compréhension du problème et d'évaluer la communication orale et les capacités liées à l'usage des outils numériques.
Sur les 10 points, 3 points sont consacrés à l'évaluation de l'utilisation des outils numériques dans le cadre de différentes compétences.

[2] Le professeur peut utiliser toute forme d'annotation lui permettant d'évaluer par compétences.

<u>**DOCUMENT Réponse**</u> **: NOM :** **Prénom :**

Q1		
Q2		
Q3		

Q4		

Ex 2 :

Q5		
Q6		
Q7		

Q8		
Q9		
Q10		