

Dérivation : nombre dérivé et évolution temporelle

Contexte pédagogique

Objectifs

- Calculer un nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente.
- Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré.
- Utiliser la calculatrice et les outils logiciels.
- Interpréter le nombre dérivé en termes de vitesse de propagation ou de disparition d'une épidémie.

Extrait du programme de l'enseignement de mathématiques du cycle terminal STMG

Bulletin officiel n° 6 du 9 février 2012

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Dérivation Application : nombre dérivé, tangente.	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer le nombre dérivé et l'identifier au coefficient directeur de la tangente. • Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré. • Tracer une tangente. 	La tangente en un point K d'abscisse x_K est définie comme la droite passant par K de coefficient directeur $f'(x_K)$.
Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3. 	

Prérequis, capacités

- Équation réduite d'une droite.

Utilisation d'outils logiciels :

- Courbe de tendance à l'aide d'un tableur.
- Tracé de droites

Les intentions

En travaillant dans un tableur à partir des données du réseau Sentinelles sur la grippe de l'hiver 2009, nous étudions les vitesses d'apparition et de disparition de l'épidémie et les relierons aux nombres dérivés associés.

Graphiquement, il est aisé de se rendre compte de l'augmentation plus ou moins rapide d'une quantité ou de sa diminution en comparant les tangentes à la courbe en différents points.

Présentation du problème : étude de l'épidémie de grippe de l'hiver 2009

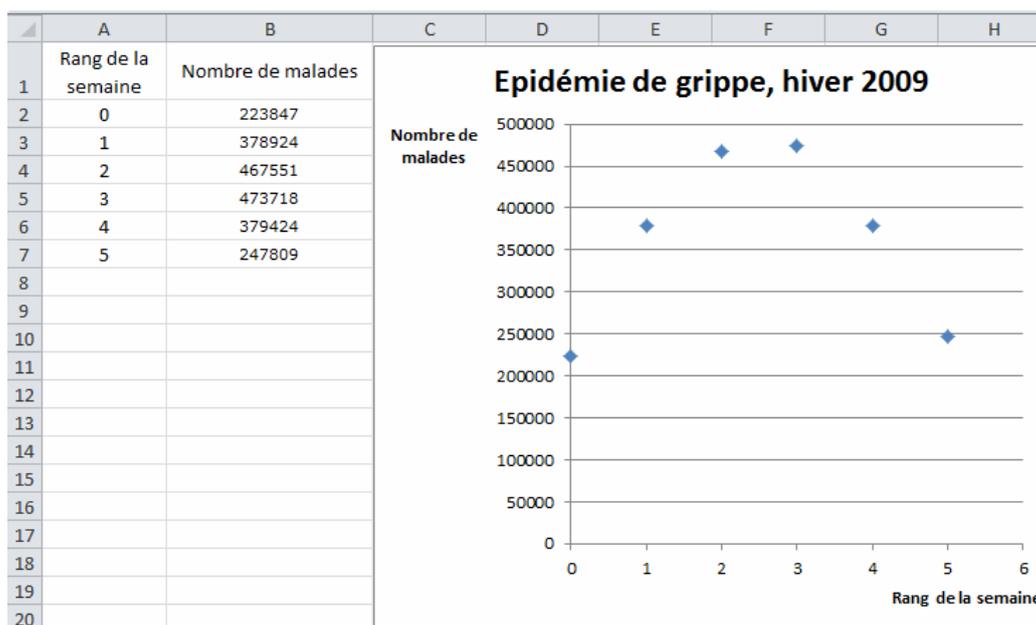
Le réseau Sentinelles fournit les chiffres suivants pour l'épidémie de grippe de l'hiver 2009 :

Semaine	46	47	48	49	50	51
Rang de la semaine	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas	223 847	378 924	467 551	473 718	379 424	247 809

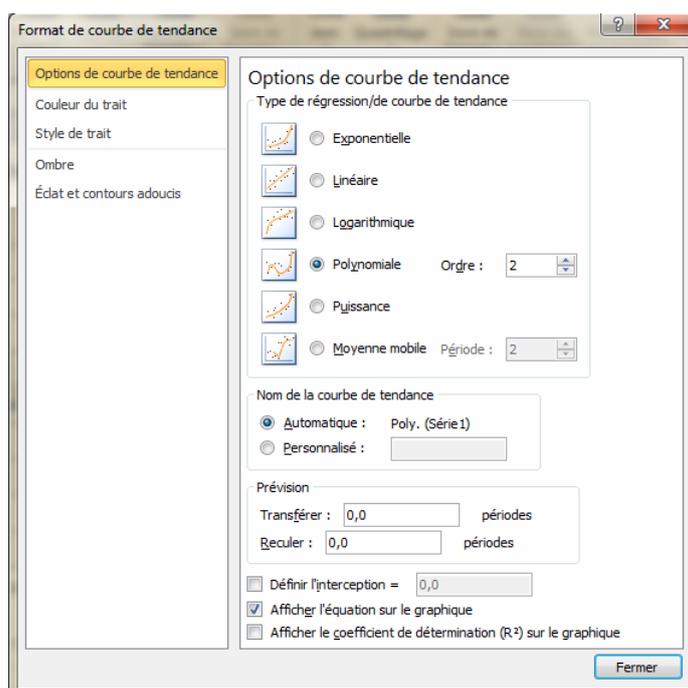
Données réseau Sentinelles, INSERM, UPMC

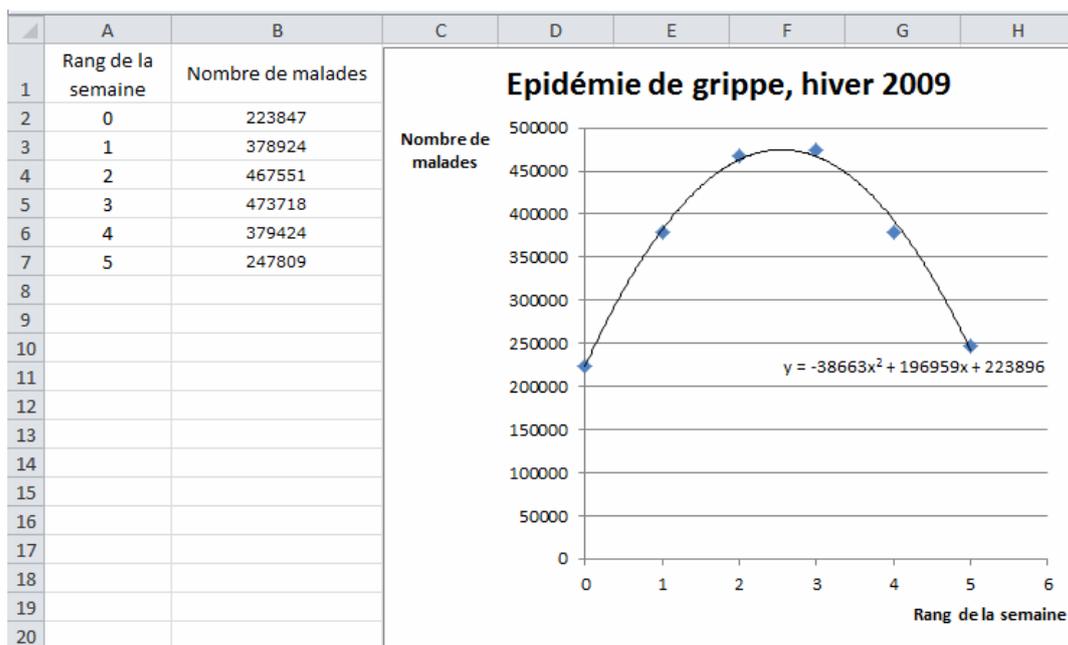
www.sentiweb.fr

En plaçant ces points dans un graphique, tel un nuage de points réalisé à l'aide du tableur, on remarque qu'il est intéressant de les approcher par une fonction polynôme du second degré.



Le tableur nous permet également d'obtenir une courbe de tendance polynomiale de degré 2 approchant ces points. Le tableur trace cette courbe et nous en donne une équation.



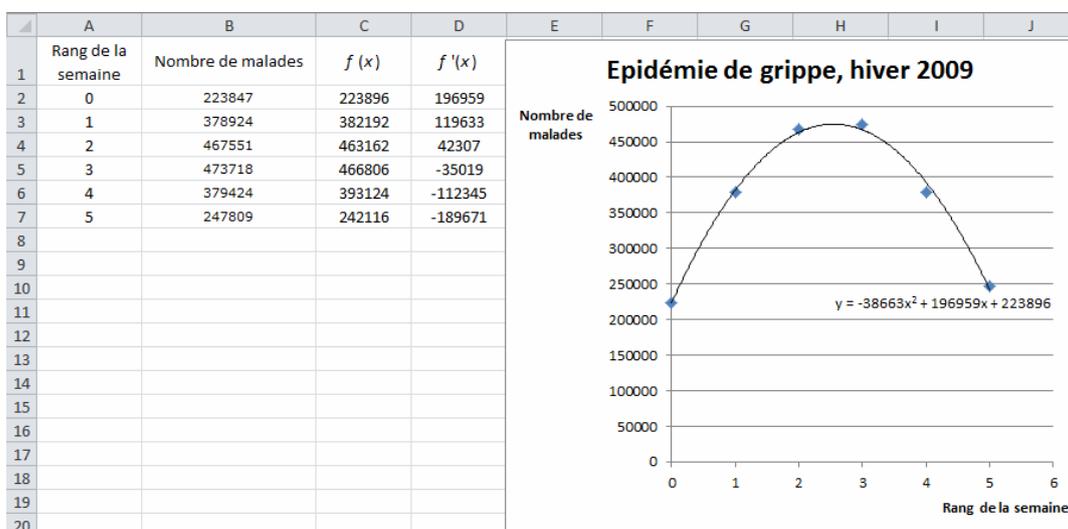


On considère la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = -38\,663x^2 + 196\,959x + 223\,896$.

Cette fonction modélise le nombre de personnes malades en France lors de l'épidémie de grippe de la fin de l'année 2009 : x est le rang de la semaine étudiée et $f(x)$ est une estimation du nombre de personnes malades, en milliers, la semaine de rang x .

La fonction f' est définie sur $[0 ; 5]$ par $f'(x) = -77\,326x + 196\,959$.

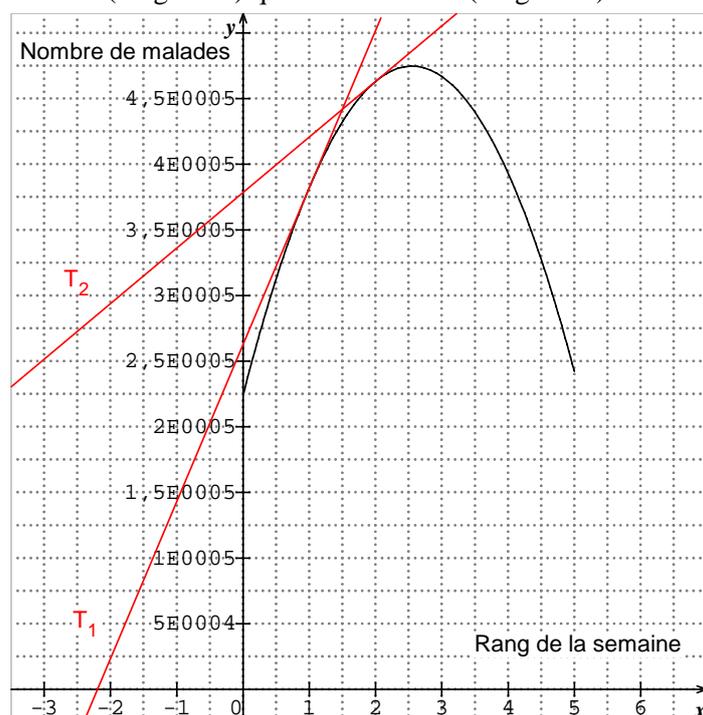
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de f et de f' pour les semaines considérées :



À partir de la fonction f et de sa courbe, on étudie la vitesse de propagation ou de disparition de la grippe à un instant x en lien avec le nombre dérivé de la fonction f en x .

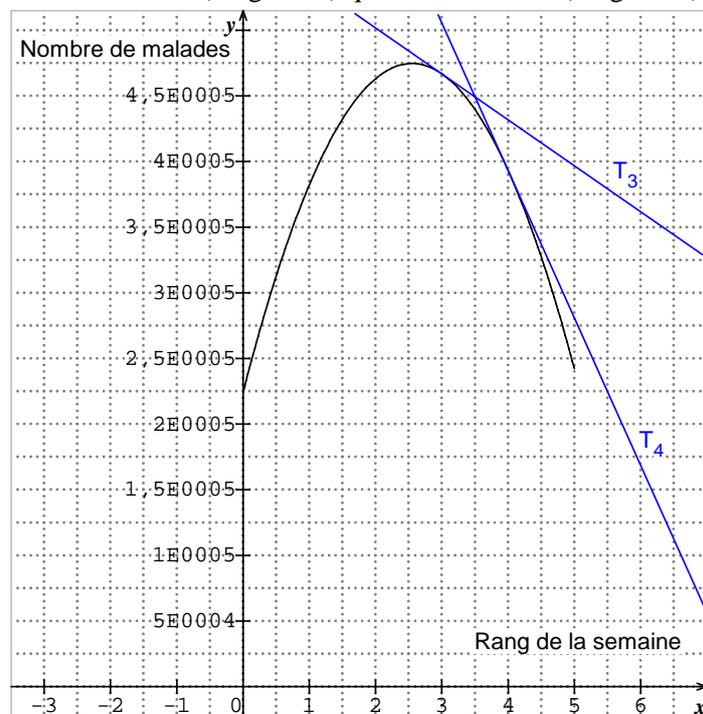
Pendant les semaines de rang 0 à 2, le nombre de malades augmente mais la vitesse de propagation de l'épidémie diminue.

Le tracé des tangentes aux points d'abscisses 1 et 2 rend cette constatation plus aisée : la propagation est plus rapide en semaine 47 (rang $x = 1$) qu'en semaine 48 (rang $x = 2$).



Pendant les semaines de rang 3 à 5, le nombre de malades diminue mais la vitesse de disparition de l'épidémie augmente.

Le tracé des tangentes aux points d'abscisses 3 et 4 rend cette constatation plus aisée : la disparition de la grippe est plus lente en semaine 49 (rang $x = 3$) qu'en semaine 50 (rang $x = 4$).



On pourra aussi remarquer la position particulière de la tangente à la parabole en son sommet : cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses (son coefficient directeur est nul) et elle permet de visualiser la fin de l'augmentation du nombre de malades.

Exemple d'énoncé :

Le réseau Sentinelles fournit les chiffres suivants pour l'épidémie de grippe de l'hiver 2009.

Semaine	46	47	48	49	50	51
Rang de la semaine	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas	223 847	378 924	467 551	473 718	379 424	247 809

Données réseau Sentinelles, INSERM, UPMC

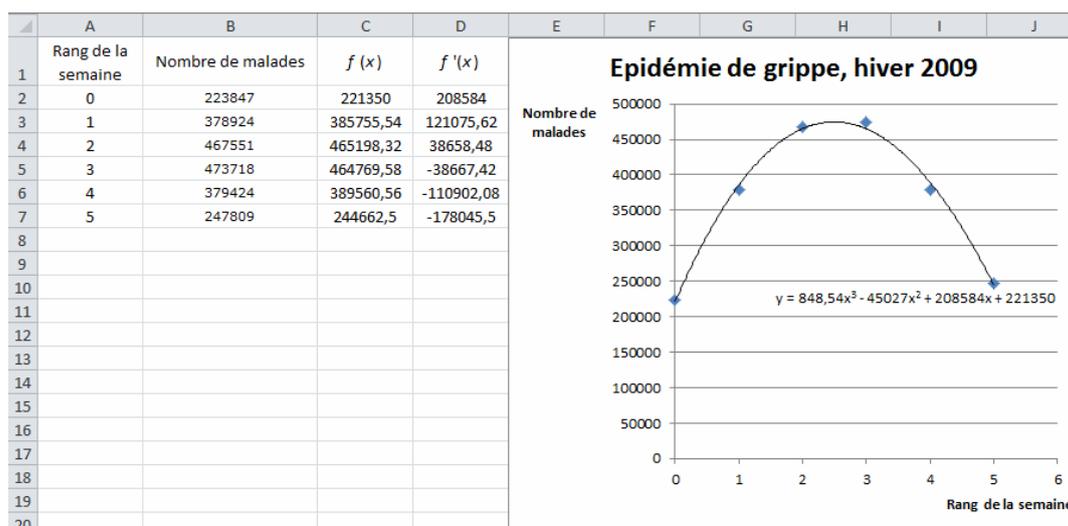
www.sentiweb.fr

1. Représentation graphique du nombre de malades et courbe de tendance
 - 1.A. Dans une feuille de calcul, compléter un tableau avec les rangs des semaines et les nombres de cas recensés. Insérer un graphique du type nuage de points pour représenter les données.
 - 1.B. Quel type de fonction pourrait modéliser ces données ?
 - 1.C. À l'aide des courbes de tendance du tableur, déterminer l'expression d'une telle fonction que l'on notera f .
2. Étude de la phase d'apparition de la grippe.
 - 2.A. Calculer $f'(1)$ et $f'(2)$.
 - 2.B. La grippe se propage-t-elle plus vite lors de la semaine 47 ($x = 1$) ou 48 ($x = 2$) ?
 - 2.C. Que semble représenter le nombre dérivé par rapport à la propagation de la maladie ?
3. Étude de la phase de disparition de la grippe.
 - 3.A. Calculer $f'(3)$ et $f'(4)$.
 - 3.B. Interpréter ces résultats en termes de vitesse de disparition de la maladie.

Prolongement : Fonction polynôme de degré 3

Il est également possible de demander au tableur de donner une courbe de tendance polynomiale de degré 3.

On obtient alors :



Dans ce cas, la fonction f est définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = 848,54x^3 - 45\,027x^2 + 208\,584x + 221\,350$.

La fonction f' est alors définie sur $[0 ; 5]$ par $f'(x) = 2\,545,62x^2 - 90\,054x + 208\,584$.

Les constatations sur les vitesses d'apparition et de disparition de l'épidémie restent les mêmes.